

Unified Representation of
Special Relativity and Quantum Theory

狭义相对论和量子理论一元化表述

于学刚　著



科学出版社

Unified Representation of
Special Relativity and Quantum Theory

狭义相对论和量子理论
一元化表述

www.sciencep.com
ISBN 978-7-03-035576-8



科学出版中心 数理分社
电话：(010)64033664
E-mail：math-phy@mail.sciencep.com
网址：http://www.math-phy.cn

定价：85.00元

狭义相对论和量子理论一元化表述

Unified Representation of Special Relativity and Quantum Theory

于学刚　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书论述狭义相对论和量子理论的一元化问题。由双曲复数建立起一类 Minkowski 复空间，分析双曲复空间的代数结构，赋予四维复空间度量公理和泛函分析结构，抽象出一类广域 Hilbert 相空间。以广域 Hilbert 相空间作为狭义相对论和量子力学的共同数学基础，可以讨论狭义相对论、经典量子力学、相对论量子力学以及场论的物理内容。

本书可作为数学、物理以及相关专业本科生选修课教科书以及研究生专业基础课教材，也可作为数学、物理领域科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

狭义相对论和量子理论一元化表述＝Unified Representation of Special Relativity and Quantum Theory/于学刚著. 一北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-035576-8

Ⅰ.①狭… Ⅱ.①于… Ⅲ.①狭义相对论-研究②量子论-研究 Ⅳ.①O412.1②O413

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 220908 号

责任编辑：钱 俊 / 责任校对：张凤琴

责任印制：钱玉芬 / 封面设计：北京耕者图文设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏 杰 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 9 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2012 年 9 月第一次印刷 印张：22 1/4

字数：434 000

定价：85.00 元

前　　言

相对论和量子理论是现代物理学的两大支柱，对于我们这个世界的构造及其运动规律，两种理论分别建立起自洽的理论体系。但两种理论之间有抵触，相互间很难协调，所以相对论和量子理论的一元化一直是人们关注的热点。Dirac 曾说过："我们有了相对论和量子论，两个建立非常完善的理论，每一个在它自己的领域内都是非常可靠的，可是它们彼此之间却难以相互协调。如果两个理论都是正确的，那么会想到，它们马上就应该协调成一个单一的体系。但是相对论和量子力学的情况并非如此，它们之间有一定的抵触，这个抵触是最近四十年来物理学的主要问题。"Einstein 也指出："相对论和现行量子力学的理论是不相容的，未来的理论必须把两者统一起来。"显然，要解决一元化，首先应解决融洽问题。但两论抵触的原因在哪里呢？从何处入手解决这个抵触问题是应该首先考虑和探讨的课题。近一个世纪以来人们围绕这些问题作了许多探索，Einstein 为此花费了后半生来研究统一场论，Stephen Hawking 想通过广义相对论奇点的分立结构来解决广义相对论和量子力学的一元化问题，但至今尚无被认可的结果。

本书作者经过二十余年的研究和探索，利用在 Clifford 几何代数中引入的一类双曲虚单位，发现其复数性质与 Minkowski 几何相对应，这引起了我们对两论的基础关联的关注。即两论相互抵触和不融洽可能是数学基础的缺陷造成的，传统复数性质与 Minkowski 空间的几何性质相互错位可能是造成非欧理论产生缺陷的原因。如果利用这种新的虚单位建立起相关的四维复时空间，并抽象出一类与 Minkowski 空间相融合的代数结构和泛复函分析理论，可能为狭义相对论和量子力学提供一套统一的数学框架，为两论的一元化打开一个突破口。

建立一套适用狭义相对论和量子理论的非欧系统理论，首先考虑两个切入点：一个是复数本体空间问题，另一个是奇点的局域性质。对于第一个切入点，Dirac 曾有精彩论述："我想建议人们把单复变函数论当做基础，这一数学分支特别美，此外，与它相联系的变换群，亦即复平面的变换群，是与支配狭义相对论时空的 Lorentz 群相同的，这就导致人们猜测在单复变函数论与狭义相对论的时空之间存在着某种深刻的联系，找出这种联系是未来的一项困难任务。"显然，Dirac 早已注意到单复变函数与相对论的时空关联，但目前狭义相对论中的 Lorentz 群和时空变换关系与单复变函数的性质还缺少本质上的联系，这是因为狭义相对论的基础是建立在两个物理基本假设之上，即相对性原理和光速不变原理。时空变换性质可以不依赖于单复变函数，即不必利用单复变函数的复数性，照样能导出

Lorentz 变换并解决狭义相对论的物理问题。然而在量子力学中，几率态函数和粒子运动方程应该与单复变函数存在逻辑上的关联，如果缺少复数性，态函数的相位、几率诠释、光量子的干涉等物理量无法用实数表达。因此，狭义相对论和量子力学在利用单复变函数的性质解决物理问题上存在差异，所以讨论单复变函数与所对应复空间的联系，用以表述狭义相对论和量子力学数学基础是解决问题的关键，也是建立新的空间理论首个切入点。

第二个切入点来源于 Hawking 的量子引力论。我们感兴趣的是，Hawking 想对非 Euclidean 时空的奇点进行度量和时空量子化，从而解决相对论与量子力学的数学关联问题。不同的是，Hawking 考虑的是弯曲时空中的奇点，我们考虑的是平直 Minkowski 空间奇点问题。其实，Minkowski 空间的类光区是一类具有物理意义的奇异区。由于数学工具所限，传统的数学和物理理论都没有对非 Euclidean几何所对应的无限大奇点区域进行系统的研究。狭义相对论中，当 $v=c$ 时，相对论因子 $\frac{1}{\alpha}=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$，出现 $\frac{1}{0}$ 的奇点。类光区的奇点，并不是孤立奇点，由于它延伸无穷远，不能用 Laurent 级数消除，目前仅知道类光区的奇点是光量子和电磁场的对应区域，却不能讨论它的局部性质。量子力学的数学基础是建立在以 Euclidean 几何为原空间的 Hilbert 空间，由于 Euclidean 空间的局限性，不可能讨论光量子对应区域问题，也不可能利用 Hilbert 空间讨论实物粒子与场的几何关联。追其原因，还是单复变函数的复数性与非 Euclidean 几何的时空性质不吻合。即传统的单复变函数与 Minkowski 空间不存在内在的因果关联，所以也就不可能通过其复数性来刻画 Minkowski 空间的时空性质。

两个切入点的关键是要找到一种单复变函数与非欧空间相对应，通过复数运算规则所描述的复数性质与 Minkowski 空间的时空性质相吻合，通过建立一套非 Euclidean 空间的公理体系来刻画 Minkowski 空间邻近关系和局部性质。找出类时区与类光区的逻辑关联，从几何上解释有静质量粒子和光量子的耦合问题，这涉及建立非欧几何的代数结构和分析结构。传统狭义相对论的数学基础是四维 Minkowski 几何，缺少的是分析结构；量子力学的数学基础是 Hilbert 空间，缺少的是几何结构。由于传统 Hilbert 空间的分析理论是以 Euclidean 几何为原空间，或以 Euclidean 空间的公理化体系抽象出的一类泛函分析理论，它与 Minkowski 几何性质是不吻合的。显然，如果能以 Minkowski 几何为原空间，建立起一套非 Euclidean 几何的公理化体系，并抽象出相应的泛函分析以及代数理论，使狭义相对论和量子力学在这套统一的非 Euclidean 数学理论中描述物理问题，两论的抵触问题就可能得以解决。值得关注的是，如何将经典量子力学中低速运动的微观客体纳入 Minkowski 几何，并能解释波粒二象性、不确定关系以及态函数几率诠释等物理问题，是制约狭义相对论与量子力学一元化的瓶颈。

本书引入 Clifford 代数中的一种双曲虚单位 j($j^2=1, j\neq 1, j^*=-j$)，它对应的双曲复数与 Minkowski 空间的时空性质相吻合，我们期待它能为两论的一元化带来一线曙光。但如何处理新复数与传统复数的关系，从数学上，应该界定两种复数所对应的本体空间，从几何和代数中找出两种复数的同构关系，从而能对不同复数的应用范围作出判断；物理上，利用复数的共性对传统物理理论给出统一的描述，利用复数的个性对现代物理中出现的疑难问题找出解决办法，当然，这需要对传统理论和观念进行深层次的改革和更新。复数具有本体空间，这是一个新的观念。一般认为实数到复数的扩充，相应的实空间也应扩展到复空间。传统理论将 Minkowski 复空间称为赝欧空间，用以区别 Euclidean 复空间。但高速运动客体的时空位置和运动规律能用 Minkowski 复空间的几何点来描述吗？答案并不是肯定的。严格来讲，在 Minkowski 复空间的类时区并不能描述客体的运动规律，甚至不能刻画两个物理事件的几何关联。因为类时区中未来时的光锥内，时空点的负元对应于过去时光锥内的时空点，所以在未来时光锥内不能简单地定义减法。两个未来事件时空间隔的几何意义，需要解释为一个未来事件的时空点与一个过去事件时空点的直和，这背离了两个未来事件时空间隔的物理含义。Minkowski 复空间的几何性质与物理性质相脱节的原因可能与传统复数与非欧几何的错位有关，新复数的引入应该克服数学和物理的脱节和错位关系，这就涉及不同虚单位对应不同复空间，涉及复数的本体空间问题。

不同物理事件间的因果联系可通过建立时空点间的运算规则来表述。物理事件的运动规律和变换关系需要讨论空间中两点的度量和距离，这涉及几何空间的分析结构和代数结构，涉及空间度量的公理性质。传统狭义相对论不能系统地讨论 Minkowski 空间中任意两点的度量和距离，本质上是没有建立起这种非 Euclidean 空间的公理化体系。由于 Minkowski 空间的时空间隔不变量只能通过复数乘法的缩并形式来表示，这种局限性制约了时空点间运算规则的建立，也制约了客体所对应的物理事件运动规律的描述。尽管在相对论量子力学中通过无穷小 Lorentz 变换讨论了 Dirac 波动方程的协变性问题，但由于相对论的能量动量关系摆脱不了复数乘法缩并的影响，显现出无法消除的矛盾，使粒子和场的几何关联问题至今没有得到解决。事实上，无论是狭义相对论和经典量子力学，还是相对论量子力学和场论都没有与四维几何空间建立起深刻的联系，这可能是两种理论之间相互抵触以及量子客体不能进行因果描述的真正原因。

Minkowski 空间具有的方向奇异性为类时区和类光区建立了一种几何关联。以内积形式定义度量空间，抽象出一类以 Minkowski 空间为原空间的 Hilbert 相空间，可能为量子力学提供新的数学框架。将具有静质量微观客体的时空区域与 Minkowski 空间类时区相对应，光量子或场的时空区域与类光区相对应。在类时区与类光区的联系中可分别刻画光量子与有静质量粒子的耦合以及静质量粒子之

间的几何关联。对具有方向奇异性的 Minkowski 空间进行时空量子化，由这种非质点相格抽象出的 Hilbert 相空间作为量子力学的数学基础，可将量子力学与 Minkowski 空间联系起来。但这种联系需要与 Minkowski 空间的类光区（奇点区）建立起度量和邻近关系，并分别赋予分析结构和代数结构。

为了试图建立狭义相对论和量子力学统一的数学框架，消除两论的抵触，我们对双曲复函在狭义相对论和量子力学中的应用预设了一些条件，同时这也是本书的总体思路：① 建立以 Minkowski 空间为原空间的公理体系，包括几何体系、代数体系和泛函分析体系，作为相对论和量子理论的统一数学基础；② 利用非 Euclidean 时空度量和拓扑结构刻画 Minkowski 空间零因子区或类光区的邻近关系，分析类时区与类光区的几何关联；③ 建立以 Minkowski 空间为原空间的 Hilbert 相空间作为量子力学的数学基础，对量子力学的基本假设和物理实验通过时空性质给出几何解释；④ 当经典近似时，一方面在 Minkowski 空间中使用 Galilei 变换描述微观低速粒子的运动规律，另一方面对有静质量粒子与光量子的耦合给出几何解释；⑤ 利用复数的共性，覆盖传统复数在两论中的应用，使之不与实验规律相违背，并能论述狭义相对论和量子力学所涉及的物理内容；⑥ 对一些与时空性质有关的疑难问题，给出合理的解释，并分析传统理论不能解释的原因；⑦ 对狭义相对论和量子力学中的连续与分立、时间箭头、因果关联和几率诠释等问题给出合理的哲学解释；⑧ 在 Minkowski 空间建立量子力学中粒子和场论的微分方程，并通过时空奇异性描述微观客体与场的耦合关系。由 Dirac 波动方程导出含有质量项的 Yang-Mills 方程、Maxwell 方程以及强相互作用方程。

由于本书涉及数学和物理两个学科，考虑部分物理读者对数学要求不高，所以将数学基础部分放到后半部分，物理应用放到前半部分。物理应用中需要引入后面的数学内容时均以章节对应的公式号表示。由于作者水平有限，只能起到抛砖引玉作用，希望能引起更多业内专家和学者关注。

本书在成文过程中受到了熊锡金教授、吴咏时教授、薛康教授、丁培柱教授、冯果忱教授、王锡绂教授以及 Jaime Keller 教授等众多专家的指导；本书也得到了作者的同事李武明教授、阎英纪教授、马龙军教授、赵征老师、张与鸿老师、高云娥老师以及宋翠英老师的指点和协助；本书出版得到天津市科协专著基金资助，在此表示衷心的感谢！

作　者

2012 年 5 月

目　录

第一部分

狭义相对论和量子理论的基础关联

第一章　多复变函数

虚单位 $\mathrm{i}(\mathrm{i}^2=-1,\mathrm{i}\neq\pm1,\mathrm{i}^*=-\mathrm{i})$ 的引入，解决了 -1 开方的问题，同时它也是实数到复数的扩充。虚单位 i 现已广泛应用于数学、物理及工程等各个领域，在现代物理特别是量子力学中，粒子态函数的相位以及用非质点相格表示的微观粒子间的干涉、衍射等都与复数的性质密不可分。但是，英国数学家 William K. Clifford (1845～1879)和德国数学家 E. Study (1862～1930)又分别引进了两种虚单位 $\mathrm{j}(\mathrm{j}^2=1,\mathrm{j}\neq\pm1,\mathrm{j}^*=-\mathrm{j})$ 和 $\mathrm{k}(\mathrm{k}^2=0,\mathrm{k}\neq0,\mathrm{k}^*=-\mathrm{k})$，它们同样是实数到复数的扩充。值得关注的是，并列的三套复数具有何种性质，怎样的相互关联，应用于哪些领域，是否可替代现有的数学框架和物理基础，是需要讨论和解决的问题。

1.1　双曲复数与二维坐标变换

19 世纪 70 年代英国数学家 Clifford 引入一种新的虚单位 j，有性质：

$$\mathrm{j}^2=1,\quad \mathrm{j}\neq\pm1,\quad \mathrm{j}^*=-\mathrm{j} \tag{1.1.1}$$

其中，j^* 为 j 的复共轭，j 可命名为双曲虚单位。取 $H(x,\mathrm{j}y)$ 为二维双曲复平面，线性关系式

$$a=x+\mathrm{j}y \tag{1.1.2}$$

式(1.1.2)命名为双曲复数，其中实数 x 和 y 分别为复数 a 的实部和虚部。为了使双曲复平面与物理时空相联系，取 $x=ct$，$y=r$。若 c 表示光速，t 为时间，r 为一维空间坐标，则 $H(ct,\mathrm{j}r)$ 构成二维复平面。与传统复数不同的是，双曲复数的实部为时间轴，虚部为空间轴。取时间为正定的，虚坐标空间可以有正、负之分，这种形式在狭义相对论和量子力学中有重要的几何意义和物理意义，在后续章节中会陆续讨论。式(1.1.2)和其复共轭可写为

$$\begin{cases}a=ct+\mathrm{j}r & (1.1.3\mathrm{a})\\ a^*=ct-\mathrm{j}r & (1.1.3\mathrm{b})\end{cases}$$

双曲复数的模

$$R=|a|_{\mathrm{m}}=\sqrt{|a^*\cdot a|}=\sqrt{|c^2t^2-r^2|} \tag{1.1.4}$$

取

$$c^2t^2-r^2=\pm1 \tag{1.1.5}$$

式(1.1.5)在图 1.1 中给出两对双曲线。由于复数的单位模为双曲线，所以将式

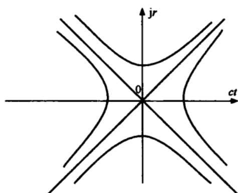


图 1.1 双曲 Minkowski 空间图

(1.1.2)称为双曲复数，所对应复平面称为双曲复平面。当 $R=0$，曲线为式(1.1.5)的渐近线，构成的 Minkowski 空间类光区或零因子区将双曲复平面分割成四个区域。

当 $|r|<ct$ 时，为亚光速区或类时区，单位模对应式(1.1.5)中的正号，是以实轴 ct 为对称轴的一对双曲线。与传统理论不同的是，类时区的上、下光锥由左、右光锥所取代，如时间是正定的，整个类时区均为未来时的定义区域。当 $|r|>ct$ 时，为超光速区或类空区，单位模对应式(1.1.5)中的负号，是以虚轴 $\mathrm{j}r$ 为对称轴的一对双曲线。当 $|r|=ct$ 时，零模点 $R=0$，是光速区或类光区，在数学中也称为迷向区。显然二维双曲复平面与 Minkowski 空间相吻合，命名为双曲 Minkowski 空间，简称 Minkowski 复空间，它与双曲复数的性质具有逻辑上的关联。

在双曲复平面的类时区，设双曲复数 a 相对于实轴 ct 的辐角为

$$\varphi=\operatorname{arcth}\frac{r}{ct} \tag{1.1.6}$$

其中，

$$\begin{cases} r=R\operatorname{sh}\varphi \\ ct=R\operatorname{ch}\varphi \end{cases} \tag{1.1.7}$$

双曲复数式(1.1.2)可写成双曲函数和双曲指数形式

$$a=R(\operatorname{ch}\varphi+\mathrm{j}\operatorname{sh}\varphi)=R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{1.1.8}$$

其中，

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{j}\varphi)^n}{n!}=\operatorname{ch}\varphi+\mathrm{j}\operatorname{sh}\varphi \tag{1.1.9}$$

而

$$\operatorname{ch}\varphi=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{2}=1+\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}+\cdots \tag{1.1.10a}$$

$$\operatorname{sh}\varphi=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{2\mathrm{j}}=\varphi+\frac{\varphi^3}{3!}+\cdots \tag{1.1.10b}$$

式(1.1.9)和(1.1.10)称为双曲 Euler 方程。当 $R=1$ 时有关系：

$$\operatorname{ch}^2\varphi-\operatorname{sh}^2\varphi=c^2t^2-r^2=1 \tag{1.1.11}$$

是与式(1.1.5)中的正号相对应的双曲线方程。

规定双曲复数的加法为实部与虚部分别相加，构成新的双曲复数的实部和虚部：

$$a_1+a_2=(ct_1+\mathrm{j}r_1)+(ct_2+\mathrm{j}r_2)=c(t_1+t_2)+\mathrm{j}(r_1+r_2) \tag{1.1.12}$$

同理，规定双曲复数的乘法规则是按多项式的交叉积运算：

$$a_1\cdot a_2=(ct_1+\mathrm{j}r_1)\cdot(ct_2+\mathrm{j}r_2)=(c^2t_1t_2+r_1r_2)+\mathrm{j}c(t_1r_2+t_2r_1) \tag{1.1.13}$$

由式(1.1.6)，令 $r=vt$，满足 $v<c$，有

$$\mathrm{th}\varphi=\frac{\mathrm{sh}\varphi}{\mathrm{ch}\varphi}=\frac{v}{c} \tag{1.1.14}$$

取两坐标系 $H(ct',\mathrm{j}r')$ 与 $H(ct,\mathrm{j}r)$ 相互间作映射变换。令 $H(ct,\mathrm{j}r)$ 中的单位双曲复数

$$a_{\mathrm{m}}=\mathrm{ch}\varphi+\mathrm{j}\,\mathrm{sh}\varphi \tag{1.1.15}$$

作为式(1.1.13)的特例，满足映射关系式

$$a'=a_{\mathrm{m}}\cdot a \tag{1.1.16}$$

将 a' 和 a 分别代入式(1.1.3a)，得

$$\begin{cases}ct'=ct\,\mathrm{ch}\varphi+r\,\mathrm{sh}\varphi\\ r'=ct\,\mathrm{sh}\varphi+r\,\mathrm{ch}\varphi\end{cases} \tag{1.1.17}$$

由式(1.1.11)和(1.1.14)导出

$$\mathrm{ch}\varphi=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\alpha} \tag{1.1.18}$$

其中 $\alpha=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 称为相对论因子，代入式(1.1.17)，给出 Lorentz 变换

$$\begin{cases}r'=\dfrac{1}{\alpha}(r+vt)\\ t'=\dfrac{1}{\alpha}\left(t+\dfrac{v}{c^2}r\right)\end{cases} \tag{1.1.19}$$

将 $-v$ 替换 v，给出 Lorentz 逆变换

$$\begin{cases}r=\dfrac{1}{\alpha}(r'-vt')\\ t=\dfrac{1}{\alpha}\left(t'-\dfrac{v}{c^2}r'\right)\end{cases} \tag{1.1.20}$$

在超光速区或类空区设双曲复数 a 相对于虚轴 $\mathrm{j}r$ 的辐角为

$$\phi=\mathrm{arcth}\,\frac{ct}{r} \tag{1.1.21}$$

取

$$\begin{cases}r=R\,\mathrm{ch}\phi\\ ct=R\,\mathrm{sh}\phi\end{cases} \tag{1.1.22}$$

双曲复数式(1.1.2)可写成双曲函数和双曲指数形式

$$a = R(\mathrm{sh}\phi + \mathrm{j}\,\mathrm{ch}\phi) = \mathrm{j}R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} \tag{1.1.23}$$

将式(1.1.9)和(1.1.10)中的 φ 换成 ϕ，双曲 Euler 方程同样成立。当 $R=1$ 时，有关系

$$\mathrm{sh}^2\phi - \mathrm{ch}^2\phi = c^2t^2 - r^2 = -1 \tag{1.1.24}$$

是与式(1.1.5)中的负号相对应的双曲线方程。

类空区的乘积运算同样满足式(1.1.13)和(1.1.16)。由式(1.1.21)，令

$$\mathrm{th}\phi = \frac{\mathrm{sh}\phi}{\mathrm{ch}\phi} = \frac{c}{v} \tag{1.1.25}$$

其中，$v > c$，取 $H(ct, \mathrm{j}r)$ 中的单位双曲复数

$$a_{\mathrm{m}} = \mathrm{sh}\phi + \mathrm{j}\,\mathrm{ch}\phi \tag{1.1.26}$$

有时空变换关系

$$\begin{cases} r' = ct\,\mathrm{ch}\phi + r\,\mathrm{sh}\phi \\ ct' = ct\,\mathrm{sh}\phi + r\,\mathrm{ch}\phi \end{cases} \tag{1.1.27}$$

由式(1.1.21)和(1.1.24)导出

$$\mathrm{sh}\phi = \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\bar{\alpha}} \tag{1.1.28}$$

其中，$\bar{\alpha} = \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$，将式(1.1.28)代入式(1.1.27)给出双曲复平面超光速区的时空变换关系式

$$\begin{cases} r' = \dfrac{1}{\bar{\alpha}}(r + vt) \\ t' = \dfrac{1}{\bar{\alpha}}\left(t + \dfrac{vr}{c^2}\right) \end{cases} \tag{1.1.29}$$

1.2 椭圆复数与二维坐标变换

传统虚单位 $\mathrm{i}(\mathrm{i}^2 = -1, \mathrm{i}^* = -\mathrm{i})$ 命名为椭圆虚单位，以示与双曲虚单位相区别。取 $E(ct, \mathrm{i}r)$ 为二维椭圆复平面，椭圆复数和其复共轭可写作

$$\begin{cases} b = ct + \mathrm{i}r \\ b^* = ct - \mathrm{i}r \end{cases} \tag{1.2.1}$$

椭圆复数的模

$$L = |b|_{\mathrm{m}} = \sqrt{b^* \cdot b} = \sqrt{c^2t^2 + r^2} \tag{1.2.2}$$

取

$$c^2t^2 + r^2 = 1 \tag{1.2.3}$$

式(1.2.3) 为单位圆方程，对应复数的模方，这是复数(1.2.1)称为椭圆复数的

原因。

取椭圆复数 b 相对于实轴 ct 的辐角为

$$\psi = \arctan \frac{r}{ct} \tag{1.2.4}$$

椭圆复数(1.2.1)可以写成三角函数和指数形式

$$b = L(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) = L\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} \tag{1.2.5}$$

其中

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\psi)^n}{n!} = \cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi \tag{1.2.6}$$

而

$$\begin{cases} \cos\psi = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}}{2} = 1 - \dfrac{\psi^2}{2!} + \dfrac{\psi^4}{4!} - \cdots & (1.2.7\mathrm{a}) \\ \sin\psi = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}}{2\mathrm{i}} = \psi - \dfrac{\psi^3}{3!} + \dfrac{\psi^5}{5!} - \cdots & (1.2.7\mathrm{b}) \end{cases}$$

式(1.2.6)和(1.2.7)称为椭圆 Euler 方程。规定椭圆复数的加法和乘法运算分别为

$$b_1 + b_2 = (ct_1 + \mathrm{i}r_1) + (ct_2 + \mathrm{i}r_2) = c(t_1 + t_2) + \mathrm{i}(r_1 + r_2) \tag{1.2.8}$$

$$b_1 \cdot b_2 = (ct_1 + \mathrm{i}r_1) \cdot (ct_2 + \mathrm{i}r_2) = (c^2 t_1 t_2 - r_1 r_2) + \mathrm{i}c(r_1 t_2 + r_2 t_1) \tag{1.2.9}$$

由式(1.2.4),令

$$\tan\psi = \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{v}{c} \tag{1.2.10}$$

其中,v 为物体的速度,c 为光速,$v < c$。作为式(1.2.9)的特例,取两坐标系 $E(ct',\mathrm{i}r')$ 与 $E(ct,\mathrm{i}r)$ 相互间作映射变换。令 $b_{\mathrm{m}} = \cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi$,为 $E(ct,\mathrm{i}r)$ 中的单位椭圆复数,式(1.2.3)可写作

$$\cos^2\psi + \sin^2\psi = 1 \tag{1.2.11}$$

取映射关系式

$$b' = b_{\mathrm{m}} \cdot b \tag{1.2.12}$$

将 b' 和 b 分别代入式(1.2.1),得

$$ct' + \mathrm{i}r' = (\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)(ct + \mathrm{i}r) \tag{1.2.13}$$

展开式(1.2.13),有关系式

$$\begin{cases} r' = ct\sin\psi + r\cos\psi \\ ct' = ct\cos\psi - r\sin\psi \end{cases} \tag{1.2.14}$$

由式(1.2.10)和(1.2.11),导出

$$\cos\psi = \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\beta} \tag{1.2.15}$$

将式(1.2.15)代入式(1.2.14)可导出二维椭圆复平面的坐标变换关系式

$$\begin{cases} r' = \dfrac{1}{\beta}(r + vt) \\ t' = \dfrac{1}{\beta}\left(t - \dfrac{rv}{c^2}\right) \end{cases} \tag{1.2.16}$$

由于 $\beta = \left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 不是相对论因子，所以式(1.2.16)不是狭义相对论中的 Lorentz 变换，式(1.2.16)与 Lorentz 变换式(1.1.19)在一定条件下可能存在一种逻辑关联。

1.3　两类复时平面的几何关联

双曲复平面 $H(ct, jr)$ 与二维 Minkowski 复平面相对应，椭圆复平面 $E(ct, ir)$ 与二维 Euclidean 复平面相对应，说明两类复数应该有各自的定域空间。两类复变函数和复平面虽有差异，但利用 Gudemannian 函数可以建立它们之间的几何对应关系。将双曲复平面 $H(ct, jr)$ 和椭圆复平面 $E(ct, ir)$ 的虚轴 jr 和 ir 相重合，实轴 ct 与虚轴正交，在图 1.2 中可用二维实平面 $E(ct, r)$ 找出两类复平面中单位模的对应关系。

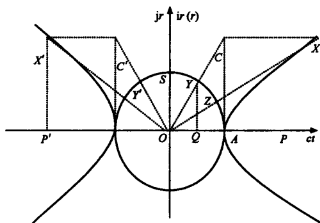


图 1.2　双曲复数和椭圆复数几何关联图

图 1.2 中，实平面 $E(ct, r)$ 的坐标轴与两类复平面 $H(ct, jr)$ 和 $E(ct, ir)$ 的坐标轴分别重合。双曲复平面 $H(ct, jr)$ 的类时区中具有单位模的时空点是以 ct 为对称轴的双曲线 $c^2t_1^2 - r_1^2 = 1$。在实平面 $E(ct, r)$ 中取双曲线上时空点 $X(ct_1, r_1)$ 与双曲复平面 $H(ct, jr)$ 中双曲线的时空点 $X(ct_1, jr_1)$ 相吻合，也满足关系式 $c^2t_1^2 - r_1^2 = 1$；取椭圆复平面 $E(ct, ir)$ 的时空点 $Y(ct_2, ir_2)$ 与实平面 $E(ct, r)$ 的时空点 $Y(ct_2, r_2)$，两者相吻合，满足关系式 $c^2t_2^2 + r_2^2 = 1$ 时为单位圆，则两类复平面

时空点之间的关系可用实平面中不同的时空点的几何联系来表述。

图 1.2 中，实平面 $E(ct,r)$ 上单位圆 $c^2t_2^2+r_2^2=1$ 与双曲线 $c^2t_1^2-r_1^2=1$ 交于 A 点。从 A 点引切线，与从 $X(ct_1,jr_1)$ 点所引的与横坐标平行的直线 XC 相交于 C 点。把坐标原点 O 同 C 点用直线连接起来，该直线在椭圆复平面 $E(ct,ir)$ 上与单位圆相交于时空点 $Y(ct_2,ir_2)$。时空点 $X(ct_1,jr_1)$ 和时空点 $Y(ct_2,ir_2)$ 在各自的复平面同时满足时空间隔

$$c^2t_2^2+r_2^2=c^2t_1^2-r_1^2=1 \tag{1.3.1}$$

或

$$\begin{cases}X^*\cdot X=Y^*\cdot Y=1\\ L^2=R^2=1\end{cases} \tag{1.3.2}$$

在图 1.2 中，从点 Y 向 Oct 轴作垂线，交 Oct 轴于 Q 点，可得关系

$$\frac{OA}{OQ}=\frac{AC}{QY} \tag{1.3.3}$$

即 $\frac{1}{ct_2}=\frac{r_1}{r_2}$，或 $r_1=\frac{r_2}{ct_2}$，代入双曲线方程(1.3.1)，得

$$c^2t_1^2-\frac{r_2^2}{c^2t_2^2}=1 \tag{1.3.4}$$

整理后得 $E(ct,ir)$ 中的单位圆方程

$$c^2t_2^2+r_2^2=c^4t_1^2t_2^2=1 \tag{1.3.5}$$

因此，双曲复平面 $H(ct,jr)$ 中双曲线上的时空点 $X(ct_1,jr_1)$ 与椭圆复平面 $E(ct,ir)$ 中单位圆上的时空点 $Y(ct_2,ir_2)$ 满足关系式

$$\begin{cases}r_1=\dfrac{r_2}{ct_2}\\ ct_1=\dfrac{1}{ct_2}\end{cases} \tag{1.3.6}$$

式(1.3.6)说明两类复平面的时空变换所对应空间位置和时间是不相同的。

在二维实空间取双曲辐角 φ 和椭圆辐角 ψ，有关系

$$\begin{cases}\varphi=\operatorname{arcth}\dfrac{r_1}{ct_1}\\ \psi=\arctan\dfrac{r_2}{ct_2}\end{cases} \tag{1.3.7}$$

由图 1.2 可分析双曲辐角 φ 和椭圆辐角 ψ 的关系。在双曲线的右支，当 X 与 A 重合时，Y 也与 A 重合，$OX=OY=OA$，此时 $\varphi=\psi=0$。当双曲辐角 φ 逐渐增大时，椭圆辐角 ψ 也对应增加。双曲辐角 φ 的取值是从 0 到 $\frac{\pi}{4}$，即 $0<\angle XOP<\frac{\pi}{4}$；椭圆辐角 ψ 的取值对应从 0 到 $\frac{\pi}{2}$，即 $0<\angle YOA<\frac{\pi}{2}$。设双曲线上无穷远处

为 D 点，当 X 趋近 D 点时，Y 趋近 S 点。同理，在双曲线的左支，双曲辐角 φ 的取值为 $\frac{3\pi}{4} < \angle X'OP' < \pi$，椭圆辐角 ψ 的取值对应为 $\frac{\pi}{2} < Y'OP' < \pi$。

由式(1.3.5)，在双曲复平面 $H(ct,\mathrm{j}r)$ 中，双曲线上时空点 $X(ct,\mathrm{j}r)$ 的模 R 与在实空间 $E(ct,r)$ 上相切圆的模有一一对应的等价关系。同时，它也等同于椭圆复平面 $E(ct,\mathrm{i}r)$ 上相切圆时空点 $Y(ct_2,r_2)$ 的模 $OY=L$。即在双曲复平面 $H(ct,\mathrm{j}r)$ 的类时区上任取时空点 $X(ct,\mathrm{j}r)$，通过等模关系在椭圆复平面 $E(ct,\mathrm{i}r)$ 上有一时空点 $Y(ct',\mathrm{i}r')$ 与之对应。当 $X(ct,\mathrm{j}r)$ 为有限点，双曲复平面 $H(ct,\mathrm{j}r)$ 的类时区与椭圆复平面 $E(ct,\mathrm{i}r)$ 的全空间具有一一对应的同构关系；当 $X(ct,\mathrm{j}r)\to\infty$ 时，$Y(ct',\mathrm{i}r')\to S$ 为聚点。因此可以说，椭圆复平面 $E(ct,\mathrm{i}r)$ 仅能与以亚光速运动的物理事件建立几何联系。

双曲复平面的类光区对应双曲线的渐近线，时空间隔 $R=0$ 为零模点，它与椭圆复平面的坐标原点相对应。即在双曲复平面 $H(ct,\mathrm{j}r)$ 的类光区找不到与椭圆复平面 $E(ct,\mathrm{i}r)$ 相对应的同构关系。从复数域的角度，我们可把椭圆复平面 $E(ct,\mathrm{i}r)$ 赋予一定的代数结构定义为椭圆复域；而双曲复平面 $H(ct,\mathrm{j}r)$ 的类时区和类光区定义为双曲非类空复域，简称双曲广域(参见第二十章定义 20.12)。

在双曲复平面和椭圆复平面内，分别取双曲辐角和椭圆辐角的虚角为 $\mathrm{j}\varphi$ 和 $\mathrm{i}\psi$，两者有关系：

$$\mathrm{j}\varphi=\mathrm{i}\psi \tag{1.3.8}$$

注意到双曲虚单位 j 和椭圆虚单位 i 的性质，将式(1.3.8)同乘 i，有 $\psi=-\mathrm{ij}\varphi$，代入式(1.2.6)，变换为式(1.1.9)；相反，式(1.3.8)同乘 j，有 $\varphi=\mathrm{ij}\psi$，代入式(1.1.9)，也能变换到式(1.2.6)。

将式(1.3.8)代入式(1.1.10)和(1.2.7)可导出双曲函数与椭圆函数的关系式：

$$\mathrm{i}\sin\psi=\mathrm{j}\,\mathrm{sh}\varphi \tag{1.3.9}$$

$$\cos\psi=\mathrm{ch}\varphi \tag{1.3.10}$$

$$\mathrm{i}\tan\psi=\mathrm{j}\,\mathrm{th}\varphi \tag{1.3.11}$$

$$-\mathrm{i}\,\mathrm{ctan}\psi=\mathrm{j}\,\mathrm{cth}\varphi \tag{1.3.12}$$

利用式(1.3.9)和(1.3.10)，可将双曲单位复数及椭圆单位复数合并为

$$a_{\mathrm{m}}=\mathrm{ch}\varphi+\mathrm{j}\,\mathrm{sh}\varphi=\cos\psi+\mathrm{i}\sin\psi \tag{1.3.13}$$

对式(1.3.13)取内积，同样能得到两类复空间单位圆的模方程(1.3.1)。

一般情况下，图 1.2 中 $OA=R=L\neq1$，在双曲复平面内取双曲线上时空点

$$X=ct+\mathrm{j}r=R(\mathrm{ch}\varphi+\mathrm{j}\,\mathrm{sh}\varphi) \tag{1.3.14}$$

该双曲线上时空点的模均相等。同理，椭圆复平面上以原点为中心，以 L 为半径的圆与双曲线在 ct 轴相切的时空点为

$$Y = ct_2 + \mathrm{i}r_2 = L(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) \tag{1.3.15}$$

该圆上时空点的模与相切双曲线的模相等。注意到式(1.3.13)，对式(1.3.14)和(1.3.15)取模平方并联立，得

$$X^* \cdot X = Y^* \cdot Y = R^2 = L^2 \tag{1.3.16}$$

或

$$c^2t_1^2 - r_1^2 = c^2t_2^2 + r_2^2 = R^2 = L^2 \tag{1.3.17}$$

式(1.3.3)可写作

$$\frac{\sqrt{c^2t_2^2 + r_2^2}}{ct_2} = \frac{r_1}{r_2} \tag{1.3.18}$$

由式(1.3.17)和(1.3.18)，则式(1.3.6)可改写成

$$\begin{cases} r_1 = \beta r_2 \\ ct_1 = \dfrac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{r_2} \end{cases} \tag{1.3.19}$$

其中，$\beta = \left(1 + \frac{r_2^2}{c^2t_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 为式(1.2.15)中的时空变换因子。

Gudemannian 函数将 Euclidean 复几何的全空间与 Minkowski 复几何的类时区建立起一一对应的同构关系，说明在两类复几何之间可建立一种具有逻辑关联的等价关系。问题是，两类时空的时间和空间坐标并不等同，如时空点联系着物理事件，哪一类复平面对应着物理事件的真实时间和空间呢？如果考虑物理事件应满足相对论原理和质量能量关系，双曲复平面 $H(ct, \mathrm{j}r)$ 应该与自然界的真实时间和空间相对应。而在椭圆复平面 $E(ct, \mathrm{i}r)$ 内，需要通过式(1.3.19)的变换来求得真实的时间和空间坐标。当经典近似时 $ct \gg r$，由式(1.3.19)推出 $r_1 = r_2, t_1 = t_2$，则式(1.1.19)和(1.2.16)均可过渡到 Galilei 变换，这时两类复时空都对应着物理事件的真实时间和空间。由于双曲复数性质与 Minkowski 空间性质相吻合，双曲复空间能够真实地描述高速粒子运动行为，物理理论用双曲复数的运算规则来刻画，应具有较高的数学秩序。

1.4　圆锥复数及其性质

德国数学家 Study(E. Study，1862～1930)引入了另一种虚单位 k，有性质

$$\mathrm{k}^2 = 0, \quad \mathrm{k} \neq 0, \quad \mathrm{k}^* = -\mathrm{k} \tag{1.4.1}$$

其中，k^* 为 k 的复共轭，k 命名为抛物虚单位。取 $P(ct, \mathrm{k}r)$ 为二维抛物复平面，对应抛物复数(参考文献[9])

$$\begin{cases} d = ct + \mathrm{k}r & (1.4.2) \\ d^* = ct - \mathrm{k}r & (1.4.3) \end{cases}$$

抛物复数的模为

$$D = |d|_{\mathrm{m}} = \sqrt{d^{*} \cdot d} = \sqrt{c^2t^2} = ct \tag{1.4.4}$$

抛物复数也可以写成指数形式

$$d = D(1 + \mathrm{k}\theta) = D\mathrm{e}^{\mathrm{k}\theta} \tag{1.4.5}$$

其中，$\theta = \frac{r}{ct}$ 为抛物复数的辐角。式(1.4.5)的指数形式也可写成级数形式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{k}\theta} = 1 + \mathrm{k}\theta + \frac{(\mathrm{k}\theta)^2}{2} + \cdots = 1 + \mathrm{k}\theta \tag{1.4.6}$$

有抛物 Euler 方程

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{k}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{k}\theta}}{2} = 1, \quad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{k}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{k}\theta}}{2} = \theta \tag{1.4.7}$$

单位抛物复数

$$d_{\mathrm{m}} = 1 + \mathrm{k}\theta \tag{1.4.8}$$

式(1.4.4)与(1.4.8)联立，得以实轴为对称轴的抛物线方程

$$c^2t^2 - 1 = 0 \tag{1.4.9}$$

单位模(1.4.9)为两条平行于 kr 轴的直线

图 1.3 的零因子区为 $ct = 0$ 的 kr 轴线。取 $\theta = \frac{v}{c}$，由式(1.1.16)的映射公式

$$\begin{aligned} d' = ct' + \mathrm{k}r' = d_{\mathrm{m}} \cdot d &= (1 + \mathrm{k}\theta) \cdot (ct + \mathrm{k}r) \\ &= ct + \mathrm{k}(ct\theta + r) = ct + \mathrm{k}(vt + r) \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

式(1.4.10)满足 Galilei 变换

$$\begin{cases} t' = t \\ r' = r + vt \end{cases} \tag{1.4.11}$$

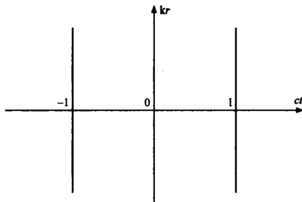


图 1.3 抛物复空间图

双曲复数、椭圆复数和抛物复数统称圆锥复数。在经典近似时，式(1.1.19)和式(1.2.16)可过渡到式(1.4.11)，抛物复数为椭圆复数和双曲复数的交，如

图 1.4。

圆锥复数的虚单位有关系

$$i^2+j^2=k^2 \qquad (1.4.12)$$

式(1.4.12)可看做圆锥复数的约束方程和封闭性条件，亦即三个虚单位不是独立的，它们有相互重叠的复域和变换关系。

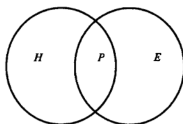


图 1.4 圆锥复数关联图

圆锥复数可统一写作广义 Euler 方程

$$X=ct+\lambda r=Me^{\lambda\omega}=\begin{cases}R(\text{ch}\varphi+\text{j}\,\text{sh}\varphi),\text{j}=\lambda\in H,M=R\\ D(1+\text{k}\theta),\text{k}=\lambda\in P,M=D\\ L(\cos\psi+\text{i}\sin\psi),\text{i}=\lambda\in E,M=L\end{cases} \qquad (1.4.13)$$

取 $v<c$，圆锥复数的广义辐角可定义为

$$\omega=\begin{cases}\varphi=\text{arcth}\,\dfrac{v}{c}\in H\\ \theta=\dfrac{v}{c}\in P\\ \psi=\arctan\dfrac{v}{c}\in E\end{cases} \qquad (1.4.14)$$

1.5 建立圆锥复数的意义

在引入多复变函数之前，从实数到复数的扩充，其所对应的空间也由实空间过渡到复空间。在 Euclidean 空间引入虚轴对应为 Euclidean 复空间；在 Minkowski 空间引入虚轴，对应为 Minkowski 复空间或赝 Euclidean 空间。现在引入了多个单复数，显然复变函数的本体空间问题摆在了面前。复数的本体空间应由复数的性质所决定，复数的运算规则是决定复变函数性质的重要因素。将复数表示为本体空间的一个几何点，所对应的独立坐标分量应该写成线性多项式的形式，复数的运算规则决定了几何点的运动规律和坐标变化规律。作为复数本体空间的几何性质与该复数相对应的运算规则相吻合，并具有普适而自洽的数学描述。椭圆复数的本体空间为 Euclidean 复空间，复变函数的运算规则形成了描述 Euclidean 复空间几何性质的理论体系。将双曲复数的本体空间定义为 Minkowski 空间是因为它们之间具有一种深层次的内在联系。Minkowski 空间的坐标变换、方向奇异性以及类时区与类光区的关联，可以通过双曲复数的运算规则来描述。双曲复数的模对应着坐标变换不变量和时空度量，使复数性质与复时空性质取得了内在联系。

确定 Minkowski 空间是双曲复数的本体空间具有很重要的物理意义。不同的单复变函数具有不同的本体空间，以不同的本体空间为原空间可建立对应的公理体系，并抽象出相应的代数结构和泛函分析结构。以 Minkowski 空间为原空间

抽象出一类广域 Hilbert 空间，为量子力学提供了一类新的数学基础框架，无论是经典量子力学还是相对论量子力学均可在这个新的数学基础框架中描述微观客体的运动行为。粒子态函数的概率可与双曲复数的模方相联系，为时空变换不变量。在相对论量子力学中，正粒子和反粒子与相互厄米共轭态函数分别相对应，并且在四维动量的 Minkowski 空间中找到了时空对应点，为狭义相对论和量子力学的一元化表述打开了一个突破口。

在传统狭义相对论中，将复数 $E(\mathrm{i}ct, r)$ 代入 Minkowski 空间，复数的二次项写成

$$b \cdot b = (r, \mathrm{i}ct) \cdot (r, \mathrm{i}ct) = r^2 - c^2t^2 \tag{1.5.1}$$

式(1.5.1)的算法是一种复数的缩并，即只考虑同类项的乘积而不考虑交叉项的乘积。交叉项在物理中是有其物理含义的，比如光的干涉等，取消干涉项所表示的物理意义是有局限性的。由式(1.5.1)所确定的时空间隔不变量和坐标变换关系是一种特殊情况，即两个坐标系只能相互平行地作直线运动。

传统狭义相对论中，一般认为，高速运动的物体进行经典对应时，坐标变换由 Lorentz 变换过渡到 Galilei 变换，相对论力学过渡到 Newton 力学，时空间也应从 Minkowski 空间过渡到 Euclidean 空间。双曲复变函数的引入，这一观念可能要受到冲击，特别是微观客体的时空对应关系成为一个尚待探讨的问题。双曲复空间的时空变换关系式(1.1.19)在经典近似时虽然可过渡到 Galilei 变换式(1.4.11)，但几何空间并不过渡到 Euclidean 空间。这是因为双曲复空间在经典近似时其时空奇异性并没有改变，另外，四维 Euclidean 复空间和三维 Euclidean 实空间也是有区别的。抛物复数所对应的复空间与三维 Euclidean 实空间尽管都对应 Galilei 变换，但一个是复空间，一个是实空间，从本质上讲时空性质不同。在图 1.4 中，抛物复数为椭圆复数和双曲复数的交，抛开抛物复数不谈，仅就 Galilei 变换来讲，它既可能对应 Euclidean 空间，也可能对应 Minkowski 空间，也就是说具有相对论效应的高速粒子在经典近似时，虽然坐标变换由 Lorentz 变换过渡到 Galilei 变换，但所对应的时空间却可能是 Minkowski 空间而不是 Euclidean 空间。应该注意到，无论是双曲复数对应的 Minkowski 空间，还是椭圆复数对应的 Euclidean 空间，它们均为复空间，而 Newton 力学所对应的三维空间为实 Euclidean 空间，该空间具有各向同性的特点。这就是说，Galilei 变换所对应的空间，既有不同复空间的区分，也有复空间与实空间的差异，找出时空间与坐标变换的对应关系，是建立现代物理学时空理论的关键。

第二章　四维坐标变换的普遍形式

狭义相对论以两个基本原理（相对性原理和光速不变原理）为基础，通过Lorentz变换描述高速运动物体的时空变换关系。高速客体的相对论效应和运动规律已被实验所验证，正确性勿容置疑。问题是，一套自洽的系统理论建立在物理原理基础上，是否隐藏了更深层次的数学秩序。这样的怀疑不是没有道理，因为至今没有解决狭义相对论和量子力学相互抵触问题，深层次原因可能不是物理因素，而是数学基础和数学秩序问题。其实，狭义相对论自身也有许多尚需讨论的内容，例如，至今没有定义Minkowski几何空间中任意两点间的距离，非欧几何的公理化体系也没有形成。Dirac正、反粒子在Minkowski几何空间没有找到时空对应点，类光区的局域性质以及类光区与类时区的几何联系还不清楚，这些都是应该解决的问题。特别是，单复变函数的本体空间涉及Minkowski空间的复数性质，利用双曲复函数讨论Minkowski复空间的物理问题应该具有更高的数学秩序，这可能为解决现代物理中的疑难问题打开一个突破口。

2.1　两类四维复矢量

取四维基 $\{e\vec{n}_1, e\vec{n}_2, e\vec{n}_3, e_0 n_4\}$ 满足关系

$$e_0 = n_4 = 1,\quad e^* = -e,\quad \vec{n}_i^* = \vec{n}_i\quad (i = 1,2,3) \tag{2.1.1}$$

其中，e为虚单位，$\vec{n}_i$ 为三维空间的实数基。四维基构成一个四维复线性关系：

$$\begin{cases} X = e_0 ct + ex\vec{n}_1 + ey\vec{n}_2 + ez\vec{n}_3 = ct + e\vec{r} & (2.1.2a) \\ X^* = e_0 ct - ex\vec{n}_1 - ey\vec{n}_2 - ez\vec{n}_3 = ct - e\vec{r} & (2.1.2b) \end{cases}$$

其中，ct, x, y, z 分别是时间和空间的坐标分量，$\vec{r} = x\vec{n}_1 + y\vec{n}_2 + z\vec{n}_3$ 为三维空间位矢，$X(ct, e\vec{r})$ 相当于一个超复数，也叫四元数或四维复矢量，X^* 是 X 的复共轭。将 $X(ct, e\vec{r})$ 看做四维复空间 $H(ct, e\vec{r})$ 的时空矢量，对 $X(ct, e\vec{r})$ 的运算规则进行规定，通过 $X(ct, e\vec{r})$ 的复数性质可以描述四维复空间 $H(ct, e\vec{r})$ 的几何性质，四维复空间 $H(ct, e\vec{r})$ 的空间性质也为 $X(ct, e\vec{r})$ 的运算规则和函数性质提供了一个几何平台。

1. 四维双曲复矢量

由式(1.1.1)引入双曲虚单位，由虚单位j构成的四元数 $X(ct, j\vec{r})$ 与Minkowski

复空间相对应。将 $H(ct,\mathrm{j}\vec{r})$ 看做二维超时空复平面，空间四元数 $X(ct,\mathrm{j}\vec{r})$ 可写作

$$X = ct + \mathrm{j}\vec{r} \tag{2.1.3}$$

四维基 $\{e_0, e\vec{n}_1, e\vec{n}_2, e\vec{n}_3\} = \{e_0, \mathrm{j}\vec{n}_1, \mathrm{j}\vec{n}_2, \mathrm{j}\vec{n}_3\}$，三维位矢的模为 $|\vec{r}| = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$。四元数 $X(ct,\mathrm{j}\vec{r})$ 具有复数和矢量的双重性质，取矢量内积的乘法规则为

$$X_m^* X_n = \sum_{m,n=1}^{4} x_m^* x_n \tag{2.1.4}$$

则四维间隔不变量满足关系：

$$X^* X = (ct + \mathrm{j}\vec{r})^* (ct + \mathrm{j}\vec{r}) = c^2t^2 - r^2 = R^2 \tag{2.1.5}$$

双曲虚单位构成超复数的时间分量是正定的，为四维复空间的实轴；空间作为虚轴具有正、负之分。四元数 $X(ct,\mathrm{j}\vec{r})$ 也可写作

$$X = R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vec{\varphi}} = R(\mathrm{ch}\vec{\varphi} + \mathrm{j}\,\mathrm{sh}\vec{\varphi}) \tag{2.1.6}$$

其中，$R = (c^2t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}$ 是双曲四元数的模。参照 1.1 节中双曲复平面的相关性质，在四维双曲复空间 $H(ct,\mathrm{j}\vec{r})$ 的类时区 $|\vec{r}| < ct$，设 $\vec{\varphi}$ 为时空点 $X(ct,\mathrm{j}\vec{r})$ 相对 ct 轴的矢量辐角，$|\vec{\varphi}| = \varphi$ 为矢量辐角 $\vec{\varphi}$ 的模或称标量辐角，有

$$\vec{\varphi} = \vec{r}_0\varphi = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\mathrm{arcth}\,\frac{r}{ct} \tag{2.1.7}$$

双曲指数和级数形式为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vec{\varphi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{j}\vec{\varphi})^n}{n!} = \mathrm{ch}\vec{\varphi} + \mathrm{j}\,\mathrm{sh}\vec{\varphi} \tag{2.1.8}$$

四维双曲函数可写作

$$\begin{cases} \mathrm{ch}\vec{\varphi} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vec{\varphi}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{\varphi}}}{2} = 1 + \dfrac{\varphi^2}{2!} + \dfrac{\varphi^4}{4!} + \cdots \\ \mathrm{sh}\vec{\varphi} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vec{\varphi}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{\varphi}}}{2\mathrm{j}} = \vec{r}_0\,\mathrm{sh}\varphi = \vec{r}_0\left(\varphi + \dfrac{\varphi^3}{3!} + \cdots\right) \end{cases} \tag{2.1.9}$$

式(2.1.8)和(2.1.9)为四维双曲型 Euler 方程。当 $R = 1$ 时，有

$$\mathrm{ch}^2\vec{\varphi} - \mathrm{sh}^2\vec{\varphi} = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1 \tag{2.1.10}$$

在不跨越零因子线情况下，连通区域中定义线性四元数的乘法为多项式的交叉运算，与式(2.1.4)具有类同的形式

$$X_m X_n = \sum_{m,n=1}^{4} x_m x_n \tag{2.1.11}$$

由式(2.1.11)，任意四元数满足

$$\begin{aligned} X &= ct + \mathrm{j}\vec{r} = X_1X_2 = (ct_1 + \mathrm{j}\vec{r}_1)(ct_2 + \mathrm{j}\vec{r}_2) \\ &= (c^2t_1t_2 + \vec{r}_1\vec{r}_2) + \mathrm{j}(ct_1\vec{r}_2 + ct_2\vec{r}_1) \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

作为式(2.1.12)的特例，进行四维空间映射，取单位四元数

$$X_m = \mathrm{ch}\vec{\varphi} + \mathrm{jsh}\vec{\varphi} \tag{2.1.13}$$

代入式(1.1.16)，有

$$X' = ct' + \mathrm{j}\vec{r}' = X_m X = (\mathrm{ch}\vec{\varphi} + \mathrm{jsh}\vec{\varphi})(ct + \mathrm{j}\vec{r}) \tag{2.1.14}$$

展开式(2.1.14)，有

$$\vec{r}' = ct\,\mathrm{sh}\vec{\varphi} + \vec{r}\,\mathrm{ch}\vec{\varphi}, \quad ct' = ct\,\mathrm{ch}\vec{\varphi} + \vec{r}\,\mathrm{sh}\vec{\varphi} \tag{2.1.15}$$

取

$$\mathrm{th}\vec{\varphi} = \frac{\mathrm{sh}\vec{\varphi}}{\mathrm{ch}\vec{\varphi}} = \frac{\vec{v}}{c} \tag{2.1.16}$$

由式(2.1.10)和(2.1.16)，有

$$\mathrm{ch}\varphi = \frac{1}{\alpha} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{2.1.17}$$

将式(2.1.17)代入式(2.1.15)，导出三维 Lorentz 变换：

$$\begin{cases} \vec{r}' = \dfrac{1}{\alpha}(\vec{r} + \vec{v}t) \\ t' = \dfrac{1}{\alpha}\left(t + \dfrac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2}\right) \end{cases} \tag{2.1.18}$$

式(2.1.18)和(1.1.19)具有类同的形式。

2. 四维椭圆复矢量

参照双曲超复数式(2.1.3)，由椭圆虚单位 $\mathrm{i}(\mathrm{i}^2 = -1, \mathrm{i}^* = -\mathrm{i})$ 构成四维基 $\{e_0, e\vec{n}_1, e\vec{n}_2, e\vec{n}_3\} = \{e_0, \mathrm{i}\vec{n}_1, \mathrm{i}\vec{n}_2, \mathrm{i}\vec{n}_3\}$，四维复空间 $E(ct, \mathrm{i}\vec{r})$ 中取线性四元数 $Y = ct + \mathrm{i}\vec{r}$，在二维椭圆复平面，$ct$ 为复数的实部，$\vec{r}$ 为虚部。Y 可写作

$$Y = L\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\psi}} = L(\cos\vec{\psi} + \mathrm{i}\sin\vec{\psi}) \tag{2.1.19}$$

其中，$L = (c^2t^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}$ 为椭圆四元数的模。设 $\vec{\psi}$ 为椭圆复空间 $E(ct, \mathrm{i}\vec{r})$ 中时空点 $Y(ct, \mathrm{i}\vec{r})$ 相对 ct 轴的矢量辐角，$|\vec{\psi}| = \psi$ 为矢量辐角 $\vec{\psi}$ 的模或称标量辐角。椭圆复平面有相应的公式：

$$\vec{\psi} = \vec{r}_0\psi = \vec{r}_0 \arctan\left(\frac{r}{ct}\right) \tag{2.1.20}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\psi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\vec{\psi})^n}{n!} = \cos\vec{\psi} + \mathrm{i}\sin\vec{\psi} \tag{2.1.21}$$

$$\begin{cases} \cos\vec{\psi} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\psi}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{\psi}}}{2} = 1 - \dfrac{\psi^2}{2!} + \dfrac{\psi^4}{4!} - \cdots \\ \sin\vec{\psi} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\psi}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{\psi}}}{2\mathrm{i}} = \vec{r}_0 \sin\psi = \vec{r}_0\left(\psi - \dfrac{\psi^3}{3!} + \dfrac{\psi^5}{5!} - \cdots\right) \end{cases} \tag{2.1.22}$$

式(2.1.22) 为四维椭圆型 Euler 方程。

按式(2.1.4)规则对 Y 取内积

$$Y^{*}Y=(ct-\mathrm{i}\vec{r})(ct+\mathrm{i}\vec{r})=L^{2}(\cos\vec{\psi}-\mathrm{i}\sin\vec{\psi})(\cos\vec{\psi}+\mathrm{i}\sin\vec{\psi})=L^{2}$$

则

$$\cos^{2}\psi+\sin^{2}\psi=1 \tag{2.1.23}$$

由式(2.1.11)定义四元数乘法：

$$\begin{aligned}Y=ct+\mathrm{i}\vec{r}&=Y_1Y_2=(ct_1+\mathrm{i}\vec{r}_1)(ct_2+\mathrm{i}\vec{r}_2)\\&=(c^{2}t_1t_2-\vec{r}_1\vec{r}_2)+\mathrm{i}(c\vec{r}_1t_2+c\vec{r}_2t_1)\end{aligned} \tag{2.1.24}$$

显然，式(2.1.24)中 $Y=Y_1Y_2$ 是四维位矢，这与传统狭义相对论中的时空间隔有很大区别。时空间隔不变量只与式(2.1.24)右边第一项，即四维位矢的实部相对应。作为式(2.1.24)的特例，进行四维空间映射：

$$Y'=ct'+\mathrm{i}\vec{r}'=Y_MY=(\cos\vec{\psi}+\mathrm{i}\sin\vec{\psi})(ct+\mathrm{i}\vec{r}) \tag{2.1.25}$$

展开式(2.1.25)有关系式：

$$\begin{cases}\vec{r}'=ct\sin\vec{\psi}+\vec{r}\cos\vec{\psi}\\ct'=ct\cos\vec{\psi}-\vec{r}\sin\vec{\psi}\end{cases} \tag{2.1.26}$$

取

$$\tan\vec{\psi}=\frac{\sin\vec{\psi}}{\cos\vec{\psi}}=\frac{\vec{v}}{c} \tag{2.1.27}$$

由式(2.1.23)和(2.1.27)，有

$$\cos\vec{\psi}=\left(1+\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\beta} \tag{2.1.28}$$

将式(2.1.28)代入式(2.1.26)可导出四维椭圆复空间的坐标变换关系：

$$\begin{cases}\vec{r}'=\dfrac{1}{\beta}(\vec{r}+t\vec{v})\\t'=\dfrac{1}{\beta}\left(t-\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c^{2}}\right)\end{cases} \tag{2.1.29}$$

式(2.1.29)和(1.2.16)具有类同的形式。

3. 两类复矢量的联系

由 Gudemannian 函数，双曲单位四元数和椭圆单位四元数可有对等关系：

$$X_m=\mathrm{ch}\vec{\varphi}+\mathrm{j}\,\mathrm{sh}\vec{\varphi}=ct+\mathrm{j}\vec{r}=Y_m=\cos\vec{\psi}+\mathrm{i}\sin\vec{\psi}=ct'+\mathrm{i}\vec{r}' \tag{2.1.30}$$

对式(2.1.30)取内积，有

$$X_n^{*}X_m=\mathrm{ch}^{2}\varphi-\mathrm{sh}^{2}\varphi=Y_n^{*}Y_m=\cos^{2}\psi+\sin^{2}\psi=1 \tag{2.1.31}$$

注意到式(2.1.6)和(2.1.19)，由式(2.1.30)双曲矢量辐角 $\vec{\varphi}$ 和椭圆矢量辐角 $\vec{\psi}$ 满足关系：

$$\mathrm{j}\vec{\varphi}=\mathrm{i}\vec{\psi} \tag{2.1.32}$$

将 $\vec{\varphi}=\mathrm{ij}\vec{\psi}$ 代入式(2.1.8)和(2.1.9)可以分别得到式(2.1.21)和(2.1.22)；同理，将 $\vec{\psi}=-\mathrm{ij}\vec{\varphi}$ 代入式(2.1.21)和(2.1.22) 可以分别得到式(2.1.8)和(2.1.9)。可见两类 Euler 方程通过虚角度的替换可相互转换。与式(1.3.9)和(1.3.10)类同，有关系：

$$\begin{cases}\mathrm{i}\sin\vec{\psi}=\mathrm{j}\,\mathrm{sh}\vec{\varphi}\\ \cos\vec{\psi}=\mathrm{ch}\vec{\varphi}\end{cases}\tag{2.1.33}$$

一般情况下，可以在四维实空间 $E(ct,r)$ 建立两类四元数模方的联立方程

$$\begin{cases}X^*X=c^2t^2-r^2\\ Y^*Y=c^2t'^2+r'^2\end{cases}\tag{2.1.34}$$

可见双曲复数和椭圆复数在各自的四维复空间中满足相应的时空变换关系式，并具有不同的坐标变换不变量。

2.2　双曲复时空变换的普遍形式

在四维双曲复空间，Lorentz 变换式(2.1.18)分别给出了三维空间矢量和一维时间的坐标变换关系。其中 $\vec{v}$ 表示两个坐标系相互间的运动速度，当 $\vec{v}$ 为常速度(方向和数值均不变)时为惯性系。所谓 Lorentz 变换就是在 Minkowski 空间讨论惯性系之间的时空变换关系，但时空变换的普遍形式可分不同情况进行分类讨论。

首先，取 $\vec{r}\,/\!/\,\vec{v}$ 的特殊情况，即两坐标系沿位矢 $\vec{r}$ 方向作相对运动。可将式(2.1.18)写作矩阵形式：

$$X'_\mu=U_{\mu\nu}X_\nu\tag{2.2.1}$$

或

$$\begin{pmatrix}\mathrm{j}r'\\ ct'\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\alpha} & \mathrm{j}\dfrac{v}{\alpha c}\\ \mathrm{j}\dfrac{v}{\alpha c} & \dfrac{1}{\alpha}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{j}r\\ ct\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\varphi & \mathrm{j}\,\mathrm{sh}\varphi\\ \mathrm{j}\,\mathrm{sh}\varphi & \mathrm{ch}\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{j}r\\ ct\end{pmatrix}\tag{2.2.2}$$

由式(2.1.5)，间隔不变量满足关系式

$$X'^+_\mu X'_\mu=X^+_\mu X_\mu=R^2\tag{2.2.3}$$

或

$$(-\mathrm{j}r'\quad ct')\begin{pmatrix}\mathrm{j}r'\\ ct'\end{pmatrix}=(-\mathrm{j}r\quad ct)\begin{pmatrix}\mathrm{j}r\\ ct\end{pmatrix}=R^2\tag{2.2.4}$$

变换矩阵 $U_{\mu\nu}$ 满足关系式

$$U^+_{\mu\nu}U_{\mu\nu}=U_{\mu\nu}U^+_{\mu\nu}=I\tag{2.2.5}$$

其中，I 为单位阵，$U^+_{\mu\nu}$ 与 $U_{\mu\nu}$ 互为厄米共轭。式(2.2.5)可写作

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & -\mathrm{j}\frac{v}{\alpha c} \\ -\mathrm{j}\frac{v}{\alpha c} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & \mathrm{j}\frac{v}{\alpha c} \\ \mathrm{j}\frac{v}{\alpha c} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\varphi & -\mathrm{jsh}\varphi \\ -\mathrm{jsh}\varphi & \mathrm{ch}\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\varphi & \mathrm{jsh}\varphi \\ \mathrm{jsh}\varphi & \mathrm{ch}\varphi \end{pmatrix} = I \tag{2.2.6}$$

$\vec{r} /\!/ \vec{v}$ 的条件使 $\vec{r}$ 不能写成分量形式。如将式(2.1.18)展成坐标分量所对应的四阶矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \mathrm{j}x' \\ \mathrm{j}y' \\ \mathrm{j}z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & & & \mathrm{j}\frac{v_x}{\alpha c} \\ & \frac{1}{\alpha} & & \mathrm{j}\frac{v_y}{\alpha c} \\ & & \frac{1}{\alpha} & \mathrm{j}\frac{v_z}{\alpha c} \\ \mathrm{j}\frac{v_x}{\alpha c} & \mathrm{j}\frac{v_y}{\alpha c} & \mathrm{j}\frac{v_z}{\alpha c} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{j}x \\ \mathrm{j}y \\ \mathrm{j}z \\ ct \end{pmatrix} \tag{2.2.7}$$

变换矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & & & -\mathrm{j}\frac{v_x}{\alpha c} \\ & \frac{1}{\alpha} & & -\mathrm{j}\frac{v_y}{\alpha c} \\ & & \frac{1}{\alpha} & -\mathrm{j}\frac{v_z}{\alpha c} \\ -\mathrm{j}\frac{v_x}{\alpha c} & -\mathrm{j}\frac{v_y}{\alpha c} & -\mathrm{j}\frac{v_z}{\alpha c} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & & & \mathrm{j}\frac{v_x}{\alpha c} \\ & \frac{1}{\alpha} & & \mathrm{j}\frac{v_y}{\alpha c} \\ & & \frac{1}{\alpha} & \mathrm{j}\frac{v_z}{\alpha c} \\ \mathrm{j}\frac{v_x}{\alpha c} & \mathrm{j}\frac{v_y}{\alpha c} & \mathrm{j}\frac{v_z}{\alpha c} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \neq I$$

即变换矩阵 $U_{\mu\nu}$ 不能满足关系式(2.2.5)，所以式(2.2.7)不能写成式(2.2.3)的间隔不变量形式。这说明两坐标系 $(\mathrm{j}\vec{r}', ct')$ 和 $(\mathrm{j}\vec{r}, ct)$ 只能沿着 $\vec{r}$ 和 $\vec{v}$ 相同的方向作相对运动，否则不能保持各个坐标分量的 Lorentz 变换不变性。要想保持各坐标分量的 Lorentz 变换不变性，就要考虑 $\vec{r}$ 与 $\vec{v}$ 在方向不相同的情况下 Lorentz 变换的一般形式。

Lorentz 变换的普遍形式可借助 Clifford 几何代数的非交换矢量性质来描述。一般情况下 $\vec{r}$ 与相对运动速度 $\vec{v}$ 的方向不同，取 $\vec{r} = \vec{r}_{/\!/} + \vec{r}_{\perp}$，令 $\vec{r}_{/\!/} /\!/ \vec{v}$，$\vec{r}_{\perp} \perp \vec{v}$，即 $\vec{r}_{/\!/}$ 与 $\vec{v}$ 具有相同方向并保持相对运动，满足 Lorentz 变换。可以将式(2.1.18)改写为

$$\begin{cases} \vec{r}'_{/\!/} = \dfrac{1}{\alpha}(\vec{r}_{/\!/} + \vec{v}t) \\ t' = \dfrac{1}{\alpha}\left(t + \dfrac{\vec{r}_{/\!/} \cdot \vec{v}}{c^2}\right) = \dfrac{1}{\alpha}\left(t + \dfrac{1}{c^2}\vec{r} \cdot \vec{v}\right) \end{cases} \tag{2.2.8}$$

其中 r 平行分量可写作[参见第十八章式(18.3.5)，取 $a=\vec{r}, b=\vec{v}$]

$$\vec{r}_{/\!/}=(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}^{-1}=\frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \tag{2.2.9}$$

在 $\vec{r}$ 与 $\vec{v}$ 垂直的方向上并不存在相对性变换性质，即 $\vec{r}'_{\perp}=\vec{r}_{\perp}$。垂直分量对应写作

$$\vec{r}'_{\perp}=\vec{r}_{\perp}=\vec{r}-\vec{r}_{/\!/}=\vec{r}-(\vec{r}\cdot\vec{v})v^{-1}=\vec{r}-\frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \tag{2.2.10}$$

将式(2.2.9)和(2.2.10)代入式(2.2.8)，Lorentz 变换可写作[参见第十八章式(18.3.11)]

$$\begin{cases}\vec{r}'=\vec{r}+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2}+\dfrac{\vec{v}}{\alpha}t\\[2ex] t'=\dfrac{1}{\alpha}\left(t+\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)\end{cases} \tag{2.2.11}$$

式(2.2.11)按照 Clifford 几何代数性质和三维矢量的算法是不满足交换律的。可将式(2.2.11)按四维分量写成式(2.2.1)的矩阵形式：

$$\begin{pmatrix}\mathrm{j}x'\\ \mathrm{j}y'\\ \mathrm{j}z'\\ ct'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_x^2}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_y}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_z}{v^2} & \dfrac{\mathrm{j}v_x}{\alpha c}\\ \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_y}{v^2} & 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_y^2}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_yv_z}{v^2} & \dfrac{\mathrm{j}v_y}{\alpha c}\\ \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_z}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_yv_z}{v^2} & 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_z^2}{v^2} & \dfrac{\mathrm{j}v_z}{\alpha c}\\ \dfrac{\mathrm{j}v_x}{\alpha c} & \dfrac{\mathrm{j}v_y}{\alpha c} & \dfrac{\mathrm{j}v_z}{\alpha c} & \dfrac{1}{\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{j}x\\ \mathrm{j}y\\ \mathrm{j}z\\ ct\end{pmatrix} \tag{2.2.12}$$

其中，式(2.2.12)的变换矩阵 $U_{\mu\nu}^{+}$ 和 $U_{\mu\nu}$ 满足式(2.2.5)的厄米正交条件，所以式(2.2.3)的时空间隔不变量写成矩阵形式：

$$(-\mathrm{j}x' \quad -\mathrm{j}y' \quad -\mathrm{j}z' \quad ct')\begin{pmatrix}\mathrm{j}x'\\ \mathrm{j}y'\\ \mathrm{j}z'\\ ct'\end{pmatrix}=(-\mathrm{j}x \quad -\mathrm{j}y \quad -\mathrm{j}z \quad ct)\begin{pmatrix}\mathrm{j}x\\ \mathrm{j}y\\ \mathrm{j}z\\ ct\end{pmatrix} \tag{2.2.13}$$

或

$$X_\mu'^{+}X_\mu'=c'^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2=X_\mu^{+}X_\mu \tag{2.2.14}$$

Lorentz 变换式(2.2.12)也可写成分量形式

$$\begin{cases} x' = x + \left(\dfrac{1}{\alpha} - 1\right)\dfrac{(\vec{r}\cdot\vec{v})v_x}{v^2} + \dfrac{v_x}{\alpha}t \\ y' = y + \left(\dfrac{1}{\alpha} - 1\right)\dfrac{(\vec{r}\cdot\vec{v})v_y}{v^2} + \dfrac{v_y}{\alpha}t \\ z' = z + \left(\dfrac{1}{\alpha} - 1\right)\dfrac{(\vec{r}\cdot\vec{v})v_z}{v^2} + \dfrac{v_z}{\alpha}t \\ t' = \dfrac{1}{\alpha}\left(t + \dfrac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c^2}\right) \end{cases} \tag{2.2.15}$$

式(2.2.12)和(2.2.15)保持各个坐标分量的 Lorentz 变换的不变性,为四维双曲复空间 Lorentz 变换的普遍形式。当 $v_x = v, v_y = v_z = 0$ 或 $v \perp v_y, v \perp v_z$ 时,式(2.2.12)和(2.2.15)简化成特殊 Lorentz 变换:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{j}x' \\ \mathrm{j}y' \\ \mathrm{j}z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha} & & & \mathrm{j}\dfrac{v}{\alpha c} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \mathrm{j}\dfrac{v}{\alpha c} & & & \dfrac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{j}x \\ \mathrm{j}y \\ \mathrm{j}z \\ ct \end{pmatrix} \tag{2.2.16}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\alpha}(x + vt), y' = y, z' = z \\ t' = \dfrac{1}{\alpha}\left(t + \dfrac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \tag{2.2.17}$$

将式(2.2.11)中 $\vec{v}$ 换成 $-\vec{v}$,$\vec{r}$ 与 $\vec{r}'$ 互换,t 与 t' 互换,有 Lorentz 逆变换:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \left(\dfrac{1}{\alpha} - 1\right)\dfrac{(\vec{r}'\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2} - \dfrac{\vec{v}}{\alpha}t' \\ t = \dfrac{1}{\alpha}\left(t' - \dfrac{\vec{r}'\cdot\vec{v}}{c^2}\right) \end{cases} \tag{2.2.18}$$

式(2.2.12)的逆变换为

$$\begin{pmatrix} \mathrm{j}x \\ \mathrm{j}y \\ \mathrm{j}z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_x^2}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_y}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_z}{v^2} & -\dfrac{\mathrm{j}v_x}{\alpha c} \\ \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_y}{v^2} & 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_y^2}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_yv_z}{v^2} & -\dfrac{\mathrm{j}v_y}{\alpha c} \\ \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_z}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_yv_z}{v^2} & 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_z^2}{v^2} & -\dfrac{\mathrm{j}v_z}{\alpha c} \\ -\dfrac{\mathrm{j}v_x}{\alpha c} & -\dfrac{\mathrm{j}v_y}{\alpha c} & -\dfrac{\mathrm{j}v_z}{\alpha c} & \dfrac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{j}x' \\ \mathrm{j}y' \\ \mathrm{j}z' \\ ct' \end{pmatrix} \tag{2.2.19}$$

式(2.2.19)满足式(2.2.5),变换矩阵 $U_{\mu\nu}^{+}$ 与 $U_{\mu\nu}$ 互为厄米正交关系。式(2.2.15)分量形式改写成

$$\begin{cases} x = x' + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{(\vec{r}' \cdot \vec{v})v_x}{v^2} - \frac{v_x}{\alpha}t' \\ y = y' + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{(\vec{r}' \cdot \vec{v})v_y}{v^2} - \frac{v_y}{\alpha}t' \\ z = z' + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{(\vec{r}' \cdot \vec{v})v_z}{v^2} - \frac{v_z}{\alpha}t' \\ t = \frac{1}{\alpha}\left(t' - \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{c^2}\right) \end{cases} \tag{2.2.20}$$

当 $v_x = v, v_y = v_z = 0$ 时，式(2.2.20)简化成特殊 Lorentz 变换：

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\alpha}(x' - vt'), y = y', z = z' \\ t = \frac{1}{\alpha}\left(t' - \frac{v}{c^2}x'\right) \end{cases} \tag{2.2.21}$$

式(2.2.17)和(2.2.21)中 x' 与 x 相互平行。值得注意的是，一般情况下，$\vec{r}$ 与相对运动速度 $\vec{v}$ 的外积满足反交换律 $\vec{r} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{r}$，所以 Lorentz 变换的普遍形式也不满足交换律[参见第十八章式(18.3.1)]。

2.3　椭圆复时空变换的普遍形式

按照第一章的讨论，椭圆复数所对应复空间不应是 Minkowski 空间，而应是椭圆复空间或 Euclidean 复空间。利用椭圆复数的运算规则可以讨论坐标变换的普遍形式。由式(2.1.29)写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i}r' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & \frac{\mathrm{i}v}{\beta c} \\ \frac{\mathrm{i}v}{\beta c} & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i}r \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \mathrm{i}\sin\psi \\ \mathrm{i}\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i}r \\ ct \end{pmatrix} \tag{2.3.1}$$

其中，$\beta = \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$。式(2.3.1)满足式(1.2.11)、(2.2.3)和(2.2.5)。将式(2.2.9)和(2.2.10)代入式(2.1.29)，四维椭圆复空间的一般坐标变换可写作

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}}{v^2} + \frac{\vec{v}t}{\beta} \\ t' = \frac{1}{\beta}\left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2}\right) \end{cases} \tag{2.3.2}$$

式(2.3.2)也可写为四阶矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} ix' \\ iy' \\ iz' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_x^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_xv_y}{v^2} & \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_xv_z}{v^2} & \frac{iv_x}{\beta c} \\ \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_xv_y}{v^2} & 1+\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_y^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_yv_z}{v^2} & \frac{iv_y}{\beta c} \\ \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_xv_z}{v^2} & \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_yv_z}{v^2} & 1+\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_z^2}{v^2} & \frac{iv_z}{\beta c} \\ \frac{iv_x}{\beta c} & \frac{iv_y}{\beta c} & \frac{iv_z}{\beta c} & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix \\ iy \\ iz \\ ct \end{pmatrix} \tag{2.3.3}$$

式(2.3.3)的变换矩阵为对称矩阵，同样满足关系式(2.2.5)，并可写作

$$Y_\mu'^+ Y_\mu' = Y_\mu^+ Y_\mu \tag{2.3.4}$$

式(2.3.4)与式的平方相对应，满足

$$Y_\mu'^+ Y_\mu' = x'^2 + y'^2 + z'^2 + c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 + c^2t^2 = Y_\mu^+ Y_\mu \tag{2.3.5}$$

式(2.3.3)也可写成分量形式：

$$\begin{cases} x' = x + \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})v_x}{v^2} + \frac{v_x}{\beta}t \\ y' = y + \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})v_y}{v^2} + \frac{v_y}{\beta}t \\ z' = z + \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})v_z}{v^2} + \frac{v_z}{\beta}t \\ t' = \frac{1}{\beta}\left(t - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c^2}\right) \end{cases} \tag{2.3.6}$$

当 $v_x = v, v_y = v_z = 0$ 时，式(2.3.3)和(2.3.6)简化成

$$\begin{pmatrix} ix' \\ iy' \\ iz' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & & & i\frac{v}{\beta c} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ i\frac{v}{\beta c} & & & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix \\ iy \\ iz \\ ct \end{pmatrix} \tag{2.3.7}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\beta}(x+vt), y' = y, z' = z \\ t' = \frac{1}{\beta}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \tag{2.3.8}$$

式(2.3.2)、(2.3.3)以及(2.3.6)的逆变换可分别写为

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{(\vec{r}'\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2} - \frac{\vec{v}t'}{\beta} \\ t = \frac{1}{\beta}\left(t' + \frac{\vec{r}'\cdot\vec{v}}{c^2}\right) \end{cases} \tag{2.3.9}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i}x \\ \mathrm{i}y \\ \mathrm{i}z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_x^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_xv_y}{v^2} & \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_xv_z}{v^2} & -\frac{\mathrm{i}v_x}{\beta c} \\ \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_xv_y}{v^2} & 1+\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_y^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_yv_z}{v^2} & -\frac{\mathrm{i}v_y}{\beta c} \\ \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_xv_z}{v^2} & \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_yv_z}{v^2} & 1+\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_z^2}{v^2} & -\frac{\mathrm{i}v_z}{\beta c} \\ -\frac{\mathrm{i}v_x}{\beta c} & -\frac{\mathrm{i}v_y}{\beta c} & -\frac{\mathrm{i}v_z}{\beta c} & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i}x' \\ \mathrm{i}y' \\ \mathrm{i}z' \\ ct' \end{pmatrix} \tag{2.3.10}$$

$$\begin{cases} x = x' + \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{(\vec{r}'\cdot\vec{v})v_x}{v^2} - \frac{v_x}{\beta}t' \\ y = y' + \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{(\vec{r}'\cdot\vec{v})v_y}{v^2} - \frac{v_y}{\beta}t' \\ z = z' + \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{(\vec{r}'\cdot\vec{v})v_z}{v^2} - \frac{v_z}{\beta}t' \\ t = \frac{1}{\beta}\left(t' + \frac{\vec{r}'\cdot\vec{v}}{c^2}\right) \end{cases} \tag{2.3.11}$$

当 $v_x = v, v_y = v_z = 0$ 时，简化成

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\beta}(x' - vt'), y = y', z = z' \\ t = \frac{1}{\beta}\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{cases} \tag{2.3.12}$$

显然，椭圆复数对应 Euclidean 复空间，其时空变换关系普遍形式(2.3.10)并不是 Lorentz 变换。

2.4　四维时空性质的讨论

虚单位的差异使两类四维复空间对应不同的时空变换关系，这涉及多复变函数本体空间的性质问题。四维 Minkowski 空间坐标变换的普遍形式一方面可以讨论狭义相对论中的物理问题，另一方面能够完整地刻画几何空间的数学性质。由双曲型 Minkowski 空间可抽象出一类广域复函，包括时空度量、距离以及公理体系，既要体现几何空间的普适性，又要具有很高的应用价值，它涉及 Minkowski 空间的方向奇异性、类时区与类光区的几何关联以及狭义相对论与量子力学一元化等问题。四维 Euclidean 复空间的时空变换关系(2.3.2)目前还不清楚在物理中的应用价值，由于 Lorentz 变换的普遍形式(2.2.11)与虚单位无关，能否在四维 Minkowski 空间引入椭圆虚单位，建立起与传统狭义相对论相对应的时空变换关系，是探讨四维时空性质的重要问题。

引入椭圆复矢量的 Minkowski 空间称为赝 Euclidean 空间或伪 Euclidean 空间，传统狭义相对论中利用椭圆复数可以讨论 Minkowski 空间的 Lorentz 变换。取四维坐标 $Y'(x',y',z',\mathrm{i}ct')$，$Y(x,y,z,\mathrm{i}ct)$，变换关系满足

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\alpha}(x-vt),\ y' = y,\ z' = z \\ t' = \dfrac{1}{\alpha}\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \tag{2.4.1}$$

其中，$\alpha = \left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$，式(2.4.1)表示两惯性系在 x' 和 x 坐标分量方向上作相对运动。对应矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ \mathrm{i}ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha} & & & \dfrac{\mathrm{i}v}{\alpha c} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -\dfrac{\mathrm{i}v}{\alpha c} & & & \dfrac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \mathrm{i}ct \end{pmatrix} \tag{2.4.2}$$

满足关系

$$U_{\mu\nu}^{\sim} U_{\mu\nu} = U_{\mu\nu} U_{\mu\nu}^{\sim} = I \tag{2.4.3}$$

其中，$U_{\mu\nu}^{\sim}$ 为 $U_{\mu\nu}$ 的转置矩阵。同理取 X'_μ 和 X_μ 的转置矩阵分别为 $X'^{\sim}_\mu$ 和 $X_\mu^{\sim}$，所对应的时空变换不变量可写为

$$Y'^{\sim}_\mu Y'_\mu = Y_\mu^{\sim} Y_\mu = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \tag{2.4.4}$$

从运算规则角度来说，式(2.4.1)是一种特殊 Lorentz 变换，要求两坐标系 x' 和 x 相互平行。或者说，式(2.4.1)只能保持某一坐标分量满足相对性变换，而不能像式(2.2.15)保持各个坐标分量的 Lorentz 变换不变性。因此，式(2.2.15)比式(2.4.1)更具有普适性。另一方面，式(2.4.2)应看做是一种特殊的运算规则，即不考虑各坐标分量间的交叉运算，等同于一种缩并运算。而式(2.1.11)的算法对应的是复矢量乘积运算，在特殊情况下对应复矢量的缩并，满足

$$Y_m Y_m = \sum_{m=1}^{4} y_m y_m \tag{2.4.5}$$

式(2.4.5)和(2.4.4)相类同，它们均不考虑交叉项的混合乘积，这对于讨论特殊 Lorentz 变换所对应的物理问题没有影响，但建立非欧几何的公理体系，进一步论证 Minkowski 空间的时空性质却存在问题。

四维复空间的公理体系涉及时空间度量和距离的定义，也涉及时空性质和时空点的变化关系。一般来讲，坐标变换对应不同空间中一点的变换或映射关系，两点的变换对应不同坐标的等距变换。坐标中任意两点间的关系决定了空间的度量和距离，也决定了空间的邻近关系和区域的化分。仅通过时空变换的特殊形式不

具有时空性质的普适性，不能分析任意时空点间的邻近关系和局域性质，也不能建立 Minkowski 空间的公理体系。因为时空点的度量和距离涉及任意两点间的不变量，涉及各分量间的交叉运算，而四元数缩并不能满足四维空间度量和距离的运算规则，这可能是传统的 Hilbert 空间不能与 Minkowski 空间相联系的原因。

其实，将椭圆复数引入 Minkowski 空间也可以得到四维 Lorentz 变换的普遍形式。取椭圆复矢量 $Y = Y(ct, \mathrm{i}\vec{r})$，四维变换矩阵满足

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i}x' \\ \mathrm{i}y' \\ \mathrm{i}z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_x^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_x v_y}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_x v_z}{v^2} & \frac{\mathrm{i}v_x}{\alpha c} \\ \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_x v_y}{v^2} & 1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_y^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_y v_z}{v^2} & \frac{\mathrm{i}v_y}{\alpha c} \\ \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_x v_z}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_y v_z}{v^2} & 1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_z^2}{v^2} & \frac{\mathrm{i}v_z}{\alpha c} \\ -\frac{\mathrm{i}v_x}{\alpha c} & -\frac{\mathrm{i}v_y}{\alpha c} & -\frac{\mathrm{i}v_z}{\alpha c} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i}x \\ \mathrm{i}y \\ \mathrm{i}z \\ ct \end{pmatrix} \tag{2.4.6}$$

式(2.4.6)可写成式(2.2.15)的分量形式，变换矩阵满足正交关系式(2.4.3)。时空间隔不变量由式(2.4.4)写成矩阵形式：

$$(\mathrm{i}x' \quad \mathrm{i}y' \quad \mathrm{i}z' \quad ct')\begin{pmatrix} \mathrm{i}x' \\ \mathrm{i}y' \\ \mathrm{i}z' \\ ct' \end{pmatrix} = (\mathrm{i}x \quad \mathrm{i}y \quad \mathrm{i}z \quad ct)\begin{pmatrix} \mathrm{i}x \\ \mathrm{i}y \\ \mathrm{i}z \\ ct \end{pmatrix} = R^2 \tag{2.4.7}$$

式(2.4.6)虽为 Lorentz 变换的普遍形式，但只能作为一个数学方法来对待。因为椭圆复矢量 $Y = Y(ct, \mathrm{i}\vec{r})$ 不能写成线性多项式形式，运算规则与 Minkowski 空间性质存在差异，不可能进行矢量本身或矢量微分后各分量间的交叉运算。不能定义复矢量的四则运算，Minkowski 空间的几何性质也就不可能通过复时空矢量的运算规则来论述。式(2.4.7)作为时空间隔不变量不能写成内积形式，在 Minkowski 空间不能按内积形式定义度量，也就不能抽象出 Hilbert 空间，从数学角度这可能是狭义相对论与量子力学不能进行一元化表述的主要原因。

Minkowski 复空间的时空性质与 $X = X(ct, \mathrm{j}\vec{r})$ 的复数性质有关，即 Lorentz 变换的普遍形式与双曲复数运算规则存在内在的逻辑关联，可以说在 Minkowski 复空间中双曲复数 $X = X(ct, \mathrm{j}\vec{r})$ 具有较高的数学秩序；而在 Euclidean 复空间中椭圆复数 $Y = Y(ct, \mathrm{i}\vec{r})$ 具有较高的数学秩序，即 $Y = Y(ct, \mathrm{i}\vec{r})$ 的复数性质与椭圆复空间存在内在的逻辑关联。从虚单位的性质分析，两类复数既具有共性，也具有个性。虚单位的共轭变换 $\mathrm{i}^* = -\mathrm{i}, \mathrm{j}^* = -\mathrm{j}$，其正、负号的变化相同为共性；虚单位的平方 $\mathrm{i}^2 = -1, \mathrm{j}^2 = 1$，符号相反为个性。利用复数的共性可以对特殊情况下的物理事件作出相同的描述。在经典近似时，两种复数对低速粒子本身的运动行为可

以作出一致的描述，表现了它们的共性；但实物粒子与光量子的相互作用涉及类时区与类光区的几何关联，就需要利用双曲复数的个性。对于 Minkowski 空间的时空间隔不变量 $R^2 = c^2t^2 - r^2$，椭圆虚单位利用了 $\mathrm{i}^2 = -1$，双曲虚单位采取了 $\mathrm{j}^*\mathrm{j} = -1$。两者虽然间隔不变量的形式相同，但椭圆复数是以牺牲交叉项的乘积运算为代价，而交叉项对描述坐标变换的一般形式，表示粒子的干涉、衍射等物理内容起到了关键性作用。从普适性角度，复数与各自本体空间的联系体现了复数个性与相应复空间性质之间的逻辑关联。问题的关键，我们的宇宙与哪一类复时空间相对应，物质世界是否与复数性质有关，复空间的公理化体系能否反映物质的运动和演化规律，这些都是需要进一步探讨的重要问题。

现代物理学，包括狭义相对论和量子力学，均使用椭圆复数讨论物理内容。引入双曲虚单位后，强化复数性质与它们对应的复时空性质存在逻辑关联是必要的。但为了尊重传统习惯，本书不强调在 Minkowski 空间中必须替换虚单位，在不需要与时空性质相联系的情况下，两种复数均可作为一种数学算法来解决物理问题，也可以通过两类复数的实部和虚部具有的等同关系来讨论二元实函数的应用，后续章节分别作了一些对比和讨论。需要利用复数的个性论述数学或物理问题时，分别冠名双曲复数和椭圆复数，双曲虚单位对应的 Minkowski 空间称为 Minkowski 复空间或广域，椭圆虚单位对应复空间称为 Euclidean 复空间。

第三章 相对论效应的几何诠释

Minkowski 复空间中引入双曲虚单位，双曲复数的性质与 Minkowski 几何的时空性质相吻合，利用双曲复数的运算规则可以讨论狭义相对论的物理问题。由于非欧几何的方向奇异性，在 Minkowski 空间定义两时空点的度量时，同一类时区中不同方向的两点间距离存在很大差异，有必要对两点的度量和物理事件之间的联系进行分类。同一时空点与邻近时空点的连线按不同方位分别对应类时间隔、类光间隔和类空间隔，物理上也分别对应以亚光速进行因果联系的类时事件、以光信号进行因果联系的类光事件和不可能进行因果联系的类空事件。在 Minkowski 空间进行四则运算涉及不同连通区域时空点间的关联，其中减法运算确定了时间箭头的单向性，否定了时间倒流，这与传统相对论理论存在很大差异。相对论效应，如同时的相对性、时间膨胀、尺度收缩以及光的 Doppler 效应等在 Minkowski 复空间都能得到相应的几何解释。

3.1 Minkowski 复时空中的物理事件

用 Minkowski 复空间类时区的时空点可以表示物理事件。图 3.1 中四维复空间（四维时空、四维速度或四维动量）的类时区 C_1 中取时空点 $X_1(ct_1,\mathrm{j}r_1)$ 和 $X_2(ct_2,\mathrm{j}r_2)$，分别表示以亚光速运动（或静止）的客体所发生的两个物理事件。由于 Minkowski 复空间具有方向奇异性，在讨论物理事件相互关联时就应该与 Minkowski 复空间的时空性质对应起来，即用不同方向的几何连线或世界线表示不同性质的两个物理事件的因果关联。

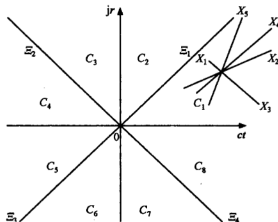


图 3.1 物理事件的几何关联图

在类时区 C_1 中以时空点 $X_1(ct_1, \mathrm{j}r_1)$ 为中心，分三种情况来讨论两个物理事件之间的几何联系。取时空点 $X_n(ct_n, \mathrm{j}r_n)$ 与 $X_1(ct_1, \mathrm{j}r_1)$ 相减，满足关系：

$$\Delta X = c\Delta t + \mathrm{j}\Delta r \tag{3.1.1}$$

时空间隔不变量为

$$\Delta R^2 = \Delta X^* \Delta X = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 \tag{3.1.2}$$

其中，Δt 为两物理事件的时间间隔，Δr 为空间间隔。由式(1.1.6)，令

$$\varphi = \operatorname{arcth} \frac{\Delta r}{c\Delta t} \tag{3.1.3}$$

式(3.1.3)中 φ 为两时空点的连线相对于实轴 ct 的辐角。

当 $c|\Delta t| > |\Delta r|$，$0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{4}$，或 $-\frac{\pi}{4} < \varphi \leqslant 0$ 时，图 3.1 中两物理事件 $X_1(ct_1, \mathrm{j}r_1)$ 和 $X_2(ct_2, \mathrm{j}r_2)$ 以亚光速 v 取得因果联系，称为类时事件。即在类时区以亚光速 v 相对运动的两物理事件，它们在空间间隔为 $\Delta r = r_2 - r_1$ 中取得因果联系的时间间隔为 $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta r}{v}$。如光速传播的时间间隔为 $\Delta t' = \frac{\Delta r}{c}$，因为 $v < c$，则 $\Delta t > \Delta t'$。这种情况可用于讨论狭义相对论中两个具有静止质量的客体之间所发生物理事件的因果关联，例如两物体的碰撞。

两个以亚光速取得因果联系的物理事件所对应的时空间隔不变量为

$$\Delta R^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 > 0 \tag{3.1.4}$$

式(3.1.4)称为同一类时区(如 C_1)两物理事件的类时间隔。取

$$\Delta X = X_2 - X_1 = c\Delta t + \mathrm{j}\Delta r \in C \tag{3.1.5}$$

式(3.1.5)中的 ΔX 为类时区的时空点。在图 3.1 中取 $X_2 = aX_0$，$X_0 \in C$ 命名为单位因子，$a \in R$ 为实数(参见第二十章定义 20.5)。当 a 一定时，如 $X_0, X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 在同一类时区，则它们的连线对应相同的辐角。a 的不同取值，在式(3.1.3)中辐角不同，方向因子 $0 < \rho_0 \leqslant 1$ 也不同(参见第二十一章定义 21.8)。对以匀速 v 运动的客体，相对论因子为 $\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$。同一类时区中每一个确定的 v 对应一个确定的方向因子 $\rho_0 = \sqrt{\mathrm{ch}^2\varphi - \mathrm{sh}^2\varphi}$，是一系列相互平行的世界线。不同的 v，相对论因子的取值不同，方向因子 ρ_0 也不同，两个物理事件在类时区连线的角度也不同。

当 $c|\Delta t| = |\Delta r|$，$\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$ 时，在 Minkowski 复空间的同一类时区(如 C_1)中，由图 3.1 对应连线 X_1X_3 和 X_1X_4。两物理事件 $X_1(ct_1, \mathrm{j}r_1)$ 和 $X_3(ct_3, \mathrm{j}r_3)$ 的几何连线平行或垂直于类光区 Ξ。这种情况下，同一类时区中以亚光速运动的两物理事件只能用光信号取得联系。[参见第二十章中式(20.2.1)]有关系：

$$\begin{cases} \Delta X = X_3 - X_1 = a\theta_0 & (3.1.6a) \\ \Delta X^* = X_3^* - X_1^* = a\theta_0^* & (3.1.6b) \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} X_3 = X_1 + a\theta_0 & (3.1.7a) \\ X_3^* = X_1^* + a\theta_0^* & (3.1.7b) \end{cases}$$

其中，$a \in R$ 为实数，$\theta_0 \in \Xi$ 命名为单位零因子，θ_0^* 与 θ_0 相互复共轭，分别位于两个相互复共轭的类光区中。式(3.1.6)和(3.1.7)中 ΔX 与 ΔX^* 相互正交，它们分别平行或垂直于同一类光区，可命名为正交同类元。将式(3.1.6)和(3.1.7)取内积，有关系：

$$\theta_0\theta_0^* = \theta_0^*\theta_0 = 0 \tag{3.1.8}$$

式(3.1.8)为零模点。对应的时空间隔不变量为

$$\Delta R^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta r^2 = a^2\theta_0^*\theta_0 = 0 \tag{3.1.9}$$

图3.1中，两物理事件 $X_1(ct_1, jr_1)$ 和 $X_3(ct_3, jr_3)$，或 $X_1(ct_1, jr_1)$ 和 $X_4(ct_4, jr_4)$，看做同一类时区中的类光事件。式(3.1.6)、(3.1.7)和(3.1.9)将 Minkowski 复空间的类时区和类光区从时空性质上联系起来，就是说，两个以亚光速运动的物理事件，如果它们可以用光信号取得因果联系，则在 Minkowski 空间类时区中所对应的时空点连线平行或垂直于类光区。对此我们可以提出这样的问题，量子力学中粒子的量子跃迁是否能通过 Minkowski 几何性质来表示它们之间的因果联系呢？因为传统的狭义相对论中的物理事件可以当做质点处理，相互传递光信号并没有与时空性质相联系；量子力学中，微观粒子的能级跃迁和光电效应与吸收和放出光量子有关，但我们也一直没能把它们与时空性质联系起来。式(3.1.6)、(3.1.7)刻画了 Minkowski 空间的方向奇异性，同一类时区中时空点 $X_\nu(ct_2, jr_2)$ 与时空点 $X_\mu(ct_1, jr_1) \pm a\theta_0$ 具有一种等价关系，数学上 Minkowski 空间的类时区与类光区取得的几何关联，物理上可能为有静止质量粒子与光量子的耦合提供一种时空诠释。

例 3.1　在图3.1的 C_1 中，取时空点 $X_1 = 5+2\mathrm{j}, X_4 = 6+3\mathrm{j}, X_3 = 7+\mathrm{j}$，则 $X_4 - X_1 = 1+\mathrm{j} = \Delta X, X_3 - X_1 = 2-2\mathrm{j} = \Delta X^*$，取内积有关系：$\Delta X^*\Delta X = 0$；对 C_1 中的时空点取复共轭对应于 C_8 中时空点，有关系：$X_4^* - X_1^* = \Delta X^* \perp (X_4 - X_1)$；$X_3^* - X_1^* = \Delta X \perp (X_3 - X_1)$。即 C_1 与 C_8 中的时空点相互正交，同时满足厄米共轭关系。

当 $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$ 时，有 $c|\Delta t| < |\Delta r|$，对应图3.1连线 X_1X_5，即两物理事件的空间间隔大于光信号在时间间隔 Δt 内传播的空间距离，称为类空事件。因为自然界中光速为极限速度，类时区两物理事件 $X_1(ct_1, jr_1)$ 和 $X_5(ct_5, jr_5)$ 不可能取得因果联系，所对应的时空间隔不变量称为类空间隔。满足关系：

$$\Delta R^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 < 0 \tag{3.1.10}$$

从上文分析可见，Minkowski 空间具有方向奇异性。类时区两个时空点的时空差值分别与类光区或类空区的某个时空点取得了几何上的关联，物理上解释为不同事件间的几何联系，这可能暗示现代物理学与 Minkowski 复空间存在深层次的逻辑关联。特别是有静止质量的实物粒子与光量子的几何关联，可能对量子力学基本原理赋予新的物理解释。由于这种逻辑联系与 Minkowski 复空间的几何性质紧密相关，所以严格定义和分析 Minkowski 复空间中两点间的度量和邻近关系，可以提高传统物理理论的数学秩序，必将给现代物理学带来新的内涵。

3.2　时间箭头的正定性

时间以及时间的方向性是一个古老的话题，时间这一概念是为了描述事件之间顺序而引入的，时间的方向性则是为了区分过去、现在和将来的需要而定义的。对于时间本性的研究历史由来已久，许多科学家经过长期的努力和探索，对现代科学时间理论的建立作出了重大贡献。英国理论物理学家 Hawking 认为，至少存在三个时间箭头，将过去和将来区分开来。它们是热力学箭头，就是无序度增加的时间方向；心理学箭头，即是在这个方向上我们能记住过去而不是将来；第三个是宇宙学箭头，也就是宇宙膨胀而不是收缩的方向。Hawking 指出，心理学箭头本质上应和热力学箭头相同，而观测表明热力学箭头和宇宙学箭头是相一致的。因此，热力学箭头是三种箭头的核心，而热力学箭头反映出时间流逝的单向性和正定性。

尽管 Hawking 的三个时间箭头刻画了时间方向的单向性和正定性，但现代物理理论并不完全支持这种时间箭头的观点。对 Newton 力学而言，时间是绝对的，它与空间和物质及物体的运动无关。时间的方向也与物体的运动规律无关，即时间方向的改变，将 t 变为 $-t$，并不影响经典物体的运动规律。Einstein 的狭义相对论对绝对的时间观有了本质上的突破，他将三维空间和一维时间统一起来，即四维 Minkowski 时空理论。但在狭义相对论中，时间方向的改变也不影响物体的运动规律，这与 Newton 力学并无本质上的区别。在 Minkowski 空间中，通常将时间轴对应的下光锥称为过去类时区，上光锥为未来类时区，下光锥是上光锥的时间反演区。即 t 变为 $-t$，将未来变为过去是狭义相对论所允许的。甚至有人认为，通过时间隧道时间可以倒流，即可颠倒现在与过去的时序关系。科幻电影中人们重新返回远古时代，就是以这种时间隧道为依托将时间演义成倒流。显然，在传统的狭义相对论中，时间并不是单向的，也不是正定的，t 变为 $-t$，将未来变为过去是允许的，时间的不正定显现出它与热力学箭头的差异。

众所周知，时间反演与其他种类的对称性不同，它既没有守恒量相对应，自然界也没有发现时间倒流现象。在生物学和社会学中，时间作为历史流逝只沿着未

来进行；万物的生老病死，也都表明时间按正定的方向来运行。熵的增加和宇宙的膨胀与时间的不可逆性相关联，这就是热力学箭头和宇宙学箭头的时间单向性。在微观粒子理论中，时间反演与粒子的波函数的幺正变换相对应，而这种对应关系恰恰反映了时间反演与共轭变换的联系。在 Minkowski 空间中，如何协调狭义相对论的时间箭头与热力学箭头的关系，找出时间反演与共轭变换的内在联系以及时间反演的本质，是我们感兴趣的问题。

传统 Minkowski 空间将上光锥或下光锥用以区别未来事件和过去事件，从几何角度讲就是将上光锥和下光锥两个不同区域的单个时空点进行对比。所谓时间倒流是指未来类时区的时空点取为 t，过去类时区中时空点取为 $-t$。这涉及两个不同区域的一点问题，而不是同一区域中的两点问题，也不是同一类时区两个不同时空点或不同物理事件的关联和对比。就是说，狭义相对论并没有将两个物理事件的联系与时空性质结合起来，所谓"倒流"，在几何中没有通过不同时空点的时间差异表现出来。要表示时间的流动，涉及同一时空中的两点问题，涉及两个物理事件的时间差，也涉及时空的减法规则。

在 Minkowski 赝欧空间 $(\vec{r},ict)$ 中，虚轴 ict 反演到 $-ict$，是 t 到 $-t$ 的反演还是 i 到 i^* 的变换，出现了一种不相容现象。如果是时间反演，下光锥就不应看做上光锥的共轭复域，这样如何来确定共轭复数的时空对应点呢？反之，把下光锥看做上光锥的共轭复域，则时间应该是正定的，这又如何体现过去类时区的时间反演呢？另外，在实 Minkowski 空间 $(\vec{r},ct)$ 中，t 到 $-t$ 的变换就是时间反演。显然，传统的狭义相对论在协调两类空间 $(\vec{r},ict)$ 和 $(\vec{r},ct)$ 的关系，以及刻画时间反演和共轭变换的联系上出现混乱。

双曲 Minkowski 复空间 $H(ct,j\vec{r})$，将时间 ct 作为复坐标的实轴，空间 $j\vec{r}$ 作为虚轴，这与传统的 Minkowski 复空间 $H(ict,\vec{r})$ 或 $H(ct,\vec{r})$ 的时空存在差异，物理意义也有所不同。如图 3.1，将 $X(ct,j\vec{r})=ct+j\vec{r}$ 作为二维超复平面 $H(ct,j\vec{r})$ 的物理事件，将 $H(ct,j\vec{r})$ 划分成不同的空间区域 C_i（$i=1,\cdots,8$）或 Ξ_i（$i=1,\cdots,4$）（参见第二十章 20.1 节）。其中，C_i（$i=1,\cdots,8$）中 C_1、C_8、C_4 及 C_5 为类时区，C_8 与 C_1 互为复共轭，C_4 与 C_5 互为复共轭，C_1 与 C_5 及 C_8 与 C_4 互为负元区；C_2、C_3、C_6 及 C_7 构成类空区，其中 C_2 与 C_7 及 C_3 与 C_6 互为复共轭，C_2 与 C_7 及 C_3 与 C_6 互为负元区；在 $\Xi_i(i=1,\cdots,4)$ 中 Ξ_1、Ξ_2、Ξ_3 及 Ξ_4 为类光区，其中 Ξ_1 与 Ξ_4 及 Ξ_2 与 Ξ_3 互为复共轭，Ξ_1 与 Ξ_3 及 Ξ_2 与 Ξ_4 互为负元区。

Minkowski 复空间的类时区 C_4 和 C_5 按传统狭义相对论的解释应是 C_1 和 C_8 的时间反演区，即过去类时区。在 Minkowski 复空间过去时的含义已不存在，因为 C_1 和 C_5 互为负元区，两个区域时空点的直和定义为双曲复空间的减法。例如，在 C_1 中取两个时空点或两个物理事件 $X_1(ct_1,j\vec{r}_1)$ 和 $X_2(ct_2,j\vec{r}_2)$，它们的时空间隔为

$$\Delta X = X_2 - X_1 = \Delta X(c\Delta t, \mathrm{j}\Delta \vec{r}) \tag{3.2.1}$$

式(3.2.1)可以看做 C_1 中两个物理事件 $X_1(ct_1, \mathrm{j}\vec{r}_1)$ 和 $X_2(ct_2, \mathrm{j}\vec{r}_2)$ 的减法，但从数学和几何角度，C_1 本身不能定义减法。所以，严格讲应该理解为 C_1 中时空点 $X_2(ct_2, \mathrm{j}\vec{r}_2)$ 与 C_5 中时空点 $-X_1(ct_1, \mathrm{j}\vec{r}_1)$ 的直和，或 $X_2 \oplus (-X_1)$。同理，如果 $X_1(ct_1, \mathrm{j}\vec{r}_1)$ 和 $X_2(ct_2, \mathrm{j}\vec{r}_2)$ 是 C_8 的时空点，则式(3.2.1)为 C_8 与 C_4 中时空点的直和。从物理上我们不能把式(3.2.1)理解为未来事件 X_2 和过去事件 $-X_1$ 的因果联系，而只能看做两个同类事件(如同是未来事件)的时空间隔。$t_2 - t_1 = \Delta t$ 应理解为时间差或时间间隔，$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \Delta r$ 为三维空间距离。由于 $-t$ 与 t 的关系不能看做过去时到未来时的变换，则在双曲 Minkowski 空间的类时区 C_4 和 C_5 中就失去了时间反演的意义。从物理上讲，应将 C_4 和 C_5 中时空点的时间分量前面的负号理解为时间间隔的减法，无论是复域 C_1 和 C_8，还是 C_4 和 C_5，从物理角度对应的时间均应为正定的，这为 Minkowski 复空间的时间正定性以及正、反粒子的时空对应关系奠定了几何基础。

四维 Minkowski 时空只用以表示未来事件的时间间隔，排除了过去事件和时间倒流。我们希望时间正定性问题以及时间反演和共轭变换的这种混乱状态能在 Minkowski 复空间 $H(ct, \mathrm{j}\vec{r})$ 中得到解决。与传统的 Minkowski 赝欧空间不同的是，Minkowski 复空间中类时区没有上下之分，只有左右之别。取 $X(ct, \mathrm{j}\vec{r})$ 为 C_1 中的时空点，它的复共轭在 C_8 中，不需跨越类光区，时间也均为正定的。C_4 和 C_5 对应 $-t$，但时间即不表示过去，也不能倒流，上文分析了 C_4 和 C_5 分别是 C_8 和 C_1 的负元区，所以时间的倒流是传统物理理论缺少数学秩序造成的。

Minkowski 复空间的类时区，具有相互复共轭的时空点同在未来类时光锥中，这种性质与传统 Minkowski 赝欧空间具有很大区别。首先，它将时间反演与共轭变换分成两个不同区域。Minkowski 复空间的时空点 $X(ct, \mathrm{j}\vec{r})$ 的复共轭变换对应着空间反演 $X^*(ct, -\mathrm{j}\vec{r})$，两时空点的时间均为正定的。Hawking 在应用 Feynman对历史求和的问题中，使用了时间的虚数化，与此相反，在 Minkowski 复时空同样也可应用 Feynman 对历史求和的方法，但使用了三维空间的虚数化。其实，在量子力学的实验中已证实了在正定的时间里，正、反粒子在三维空间中具有相反的运动轨迹。第十三章中我们也将看到，描述正、反微观粒子的 CTQ 反演对应着共轭变换，即厄米共轭变换应与 CTQ 的联合反演相联系。

双曲 Minkowski 空间的时间正定性与热力学时间单向性相吻合，它否认了时间倒流的可能性，也排除了有守恒量相对应。我们认为，完善双曲 Minkowski 空间的时空性质和时间方向的讨论，在量子力学和狭义相对论中有利于一些物理疑难问题的解决。Minkowski 空间的两点问题对应距离和度量等概念，方向异性的时空性质使在 Minkowski 空间中讨论距离和度量要比 Euclidean 空间复杂得多。其实，无论在狭义相对论还是量子力学从来没有真正地将物理事件与时空坐标结

合起来，也从来没有从几何时空中给出数学的定义并规范数学的运算规则。双曲Minkowski空间代数结构的建立规范了非欧几何与数学算法的关系，理顺了物理规律与数学秩序的联系。

3.3　同时的相对性和类空区的物理性

式(3.1.10)为Minkowski复空间同一类时区中两个物理事件的类空间隔，在类时区怎么会出现类空间隔呢？可以这样考虑问题，在图3.1中，从物理事件$X_1(ct_1, jr_1)$发出一个光信号，还没有到达$X_5(ct_5, jr_5)$，在X_5处的物理事件就发生了，即$X_1(ct_1, jr_1)$和$X_5(ct_5, jr_5)$没有取得因果联系。说明两个物理事件的空间间隔Δr大于光在时间间隔Δt内传播的空间距离，有关系：$c|\Delta t| = |\Delta r_c| < |\Delta r|$，所以两物理事件的时空间隔是类空的。Minkowski复空间类时区中两个物理事件的类空间隔对应于类空区域的一个时空点，这为类空区即所谓的超光速区赋予了一种新的物理诠释。类空区中的时空点，并不一定表示该时空点所对应的物理事件是以超光速运行的，它可以与类时区中两个物理事件的类空间隔相关联。同一类时区两个物理事件在类空间隔中不会有因果联系，但仍可利用光信号作为一个标准或尺子来描述它们的时间间隔与空间间隔的关系。例如取Δr是$c\Delta t$的二倍、三倍等，表示两个类时事件发生的空间距离与光传播距离的对比关系，可以在类空区由不同的时空点来表示。这样，在狭义相对论中就没有必要引入超光速的概念，去追求与类空区时空点相对应的物理事件在超光速下的因果诠释。

例3.2　在图3.1的C_1中，取时空点$X_1 = 5 + 2\mathrm{j}$，$X_5 = 6 + 4\mathrm{j}$，则$X_5 - X_1 = 1 + 2\mathrm{j} \in C_2$。取内积，有关系：$\Delta X^* \Delta X = 1 - 4 = -3 < 0$，时空间隔为类空的。如取$X_5 = 5 + 4\mathrm{j}$，则$X_5 - X_1 = 2\mathrm{j}$，满足$\Delta X^* \Delta X = -4 < 0$。

类时区中两个物理事件的类空间隔在特殊情况下取$\Delta t = 0, \Delta r \neq 0, \varphi = \frac{\pi}{2}$时，说明两物理事件异地同时发生。图3.1中如$X_1(ct, jr)$和$X_5(ct, jr)$的连线垂直于$ct$轴，这时不可能考虑两物理事件的因果联系，但由Lorentz变换可以讨论两个参照系同时性的相对性。在类时区取两个时空点的差值

$$\Delta X = X_5 - X_1 = c\Delta t + \mathrm{j}\Delta \vec{r} \tag{3.3.1}$$

对应间隔不变量为

$$\Delta X^* \Delta X = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta r)^2 \tag{3.3.2}$$

当$\Delta t = 0$时，有

$$\Delta X^* \Delta X = -(\Delta r)^2 < 0 \tag{3.3.3}$$

式(3.3.3)为类空间隔，说明异地同时发生的两物理事件之间没有因果联系。将式(2.2.20)的时空变换关系改写成

$$\begin{cases}\Delta x=\left[1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_x^2}{v^2}\right]\Delta x'+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_y}{v^2}\Delta y'+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_z}{v^2}\Delta z'-\frac{v_x}{\alpha}\Delta t'\\ \Delta y=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_y}{v^2}\Delta x'+\left[1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_y^2}{v^2}\right]\Delta y'+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_yv_z}{v^2}\Delta z'-\frac{v_y}{\alpha}\Delta t'\\ \Delta z=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_y}{v^2}\Delta x'+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_yv_z}{v^2}\Delta y'+\left[1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_z^2}{v^2}\right]\Delta x'-\frac{v_z}{\alpha}\Delta t'\\ \Delta t=\frac{1}{\alpha}\left(\Delta t'-\frac{v_x}{c^2}\Delta x'-\frac{v_y}{c^2}\Delta y'-\frac{v_z}{c^2}\Delta z'\right)\end{cases} \tag{3.3.4}$$

当式(3.3.4)中 $\Delta t=0$ 时，有

$$\Delta t'=\frac{v_x}{c^2}\Delta x'+\frac{v_y}{c^2}\Delta y'+\frac{v_z}{c^2}\Delta z'=\frac{\vec{v}\cdot\Delta\vec{r}'}{c^2} \tag{3.3.5}$$

式(3.3.5)说明，在坐标系 $X(ct,jr)$ 中同时发生的物理事件，在 $X'(ct',jr')$ 系中并不一定同时发生，即同时性具有相对性。

参照时空间隔不变量关系式(2.2.14)，可以将式(3.3.4)写成内积形式

$$\begin{aligned}\Delta X^*\Delta X&=(c\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2\\&=(c\Delta t')^2-(\Delta x')^2-(\Delta y')^2-(\Delta z')^2=\Delta X'^*\Delta X'\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

将式(3.3.6)代入同时性条件，有

$$-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2=(c\Delta t')^2-(\Delta x')^2-(\Delta y')^2-(\Delta z')^2 \tag{3.3.7}$$

将式(3.3.5)与(3.3.7)联立，满足

$$(c\Delta t')^2-(\Delta x')^2-(\Delta y')^2-(\Delta z')^2=\left(\frac{\vec{v}\cdot\Delta\vec{r}'}{c}\right)^2-(\Delta\vec{r}')^2=\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)(\Delta r')^2 \tag{3.3.8}$$

由于两参照系之间的相互运动为亚光速，满足 $v<c$，则式(3.3.7)满足关系式：

$$\Delta X'^*\Delta X'=\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)(\Delta r')^2=-(\Delta r)^2=\Delta X^*\Delta X<0 \tag{3.3.9}$$

式(3.3.9)为类空的。即两个物理事件如在坐标系 $X(ct,jr)$ 中同时发生，在坐标系 $X'(ct',jr')$ 中可以不同时发生，但两事件之间保持类空性质，不可能发生因果联系。

3.4 时胀、尺缩及时序问题

两个物理事件在不同参照系 $X'(ct',jr')$ 和 $X(ct,jr)$ 中的坐标变换关系由式(2.2.11)可以写成

$$\begin{cases}\Delta\vec{r}' = \Delta\vec{r} + \left(\dfrac{1}{\alpha} - 1\right)\dfrac{(\Delta\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2} + \dfrac{\vec{v}}{\alpha}\Delta t \\ \Delta t' = \dfrac{1}{\alpha}\left(\Delta t + \dfrac{\Delta\vec{r}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)\end{cases} \tag{3.4.1}$$

取两个事件在 $X(ct,\mathrm{j}r)$ 中同一地点发生，有关系：$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 0$。如果两事件先后发生，则相应的时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$。将 $\Delta\vec{r} = 0$ 代入式(3.4.1)中，可简化为

$$\begin{cases}\Delta\vec{r}' = \dfrac{\vec{v}}{\alpha}\Delta t \\ \Delta t' = \dfrac{1}{\alpha}\Delta t\end{cases} \tag{3.4.2}$$

式(3.4.2)表明同地也具有相对性，即在 $X(ct,\mathrm{j}r)$ 中同一地点发生的两个事件，在 $X'(ct',\mathrm{j}r')$ 中 $\Delta\vec{r}' \neq 0$，说明两个物理事件是异地发生的。图 3.1 坐标系 $X(ct,\mathrm{j}r)$ 中，同地发生的物理事件对应于 ct 轴是一条水平线，辐角 $\varphi = 0$。但在坐标系 $X'(ct',\mathrm{j}r')$ 中，对应异地发生的物理事件是与 ct' 轴具有一定倾角的直线，辐角 $\varphi' > 0$。因此，不同参照系 $X'(ct',\mathrm{j}r')$ 和 $X(ct,\mathrm{j}r)$ 间的坐标变换相当于同一参照系 $X(ct,\mathrm{j}r)$ 绕定点转动。

式(3.4.2)中包含了时间膨胀和尺度收缩的相对论效应。其中第二式的 Δt 是由静止于此参照系 $X(ct,\mathrm{j}r)$ 中的钟测出的，对应的固有时最短。$\Delta t'$ 是两事件在相对运动的参照系 $X'(ct',\mathrm{j}x')$ 中的时间间隔，$\Delta t'$ 与固有时 Δt 相比发生了时间膨胀效应。如取一个尺子静止在 $X'(ct',\mathrm{j}x')$ 中，则在式(3.4.2)第一式中，$|\Delta\vec{r}'| = |\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1| = l'$，为尺的原长。在 $X(ct,\mathrm{j}r)$ 中同一地点，$\Delta\vec{r} = 0$，用时间间隔 Δt 测得该尺的长度为 $|\vec{v}|\Delta t = l$，为测长。式(3.4.2)中第一式可改写为

$$l = \alpha l' \tag{3.4.3}$$

式(3.4.3)满足尺度收缩的相对论效应。显然时间膨胀和尺度收缩的相对论效应对应同一个四维时空变换关系，即时间膨胀应伴随尺度收缩，反之亦然。式(3.4.2)的时空变换不变量为

$$(c\Delta t')^2 - (\Delta\vec{r}')^2 = (c\Delta t)^2 \tag{3.4.4}$$

由于式(3.4.4)中 $(c\Delta t)^2 > 0$，所以为类时间隔。即时间膨胀和尺度收缩效应只满足于两物理事件以亚光速运动的类时间隔，而两事件的类光间隔和类空间隔均不满足时胀和尺缩效应。

式(3.4.2)第二式中 $\Delta t'$ 和 Δt 的时间次序是不能颠倒的。可以证明时序颠倒只适用于类空事件。方便起见，取逆变换式(3.3.4)中的一维情况，满足关系 $\Delta t = t_2 - t_1 < 0$，$\Delta t' = t'_2 - t'_1 > 0$，以及 $\Delta x' = x'_2 - x'_1 > 0$，即假设两物理事件在坐标系 $X(ct,\mathrm{j}x)$ 和 $X'(ct',\mathrm{j}x')$ 的时序是颠倒的。对应式(3.3.4)中第四式满足关系：

$$\Delta t = \frac{1}{\alpha}\left(\Delta t' - \frac{v_x \Delta x'}{c^2}\right) < 0 \tag{3.4.5}$$

因为相对论因子 $\alpha > 0$，有关系：

$$\Delta t' - \frac{v_x \Delta x'}{c^2} < 0 \tag{3.4.6}$$

或

$$\frac{c\Delta t'}{\Delta x'} < \frac{v_x}{c} < 1 \tag{3.4.7}$$

满足关系：

$$c\Delta t' < \Delta x' \tag{3.4.8}$$

式(3.4.8)说明时序颠倒只能在事件的类空间隔中发生，即满足时序颠倒的事件之间不能产生因果关系。

3.5 光的 Doppler 效应

两个物理事件以光信号取得因果联系时对应于类时区中的类光间隔。在图3.1中，两物理事件 $X_1(ct_1, \mathrm{j}r_1)$ 和 $X_3(ct_3, \mathrm{j}r_3)$ 以及 $X_1(ct_1, \mathrm{j}r_1)$ 和 $X_4(ct_4, \mathrm{j}r_4)$ 均为事件的类光间隔。满足四维间隔不变量

$$(c\Delta t')^2 - (\Delta \vec{r}')^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta r)^2 = 0 \tag{3.5.1}$$

对于微观客体之间实物粒子与光量子的耦合涉及质量和能量的转换关系，在后续章节中进行讨论。对于宏观物体之间通过光信号的联系，由式(3.5.1)有

$$\begin{cases} c\Delta t' = \Delta \vec{r}' \\ c\Delta t = \Delta r \end{cases} \tag{3.5.2}$$

式(3.5.1)和(3.5.2)说明，在不同坐标系 $X'(ct', \mathrm{j}x')$ 和 $X(ct, \mathrm{j}r)$ 中两个事件的类光间隔相等，这表示两个事件相距的空间距离等于光信号传播的时间间隔，或两个物理事件可以通过光信号取得因果联系。当发出光信号的光源与观察者相对静止时，光信号的波长、周期以及频率分别为 λ、T、$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{T}$，或 $cT = \lambda$，与式(3.5.2)的第二式类同。当光源向着观察者运动，发出相邻两个光波峰时，光源向观察者运动距离为 $v\Delta t' = vT'$。两波峰之间距离为 $\lambda' = (c - v)T'$，观察者测得光的频率为

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{(c - v)T'} \tag{3.5.3}$$

T 是相对于波源静止的参照系测得同一地点光源相继发出两个波峰的时间周期，为固有时，满足式(3.4.2)的时间膨胀关系

$$T' = \frac{1}{\alpha}T = \frac{cT}{\sqrt{c^2 - v^2}} \tag{3.5.4}$$

式(3.5.4)为光源以亚光速运动时所对应的参照系与静止参照系之间所满足的相对论效应。由式(3.5.3)和(3.5.4)，有

$$\nu' = \frac{c}{(c-v)T'} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\nu \tag{3.5.5}$$

同理，当光源远离观察者时，将 $-v$ 代替式(3.5.5)中的 v 有

$$\nu' = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\nu \tag{3.5.6}$$

第四章　运动学和动力学

Minkowski 复空间作为双曲复数的本体空间，可以将狭义相对论的物理问题进行数学化处理。按双曲复函数的运算规则论述狭义相对论中的物理问题，使高速运动客体的物理规律与复数的性质结合起来，为解决狭义相对论的普遍形式提供了新的数学工具。对高速运动物体的客观规律赋予几何、代数以及分析结构，使狭义相对论的理论基础脱离了对物理思辨的依赖关系。两个物理基本假设融入数学的运算规则中，完成了狭义相对论从物理假设到数学基础的转变过程。同时，从复变函数的运算规则出发使狭义相对论物理规律与复变函数的性质建立起内在的逻辑关联，为后续内容特别是找到并建立一套与量子力学具有深层次联系的数学框架奠定了理论基础。

4.1　四维双曲速度

在四维 Minkowski 复空间取惯性系 $H(ct',\mathrm{j}\vec{r}')$ 和 $H(ct'',\mathrm{j}\vec{r}'')$ 以常速 $\vec{v}'$ 相对运动。对坐标函数微分，则式(3.4.1)的变换可写成

$$\begin{cases} \mathrm{d}\vec{r}' = \mathrm{d}\vec{r}'' + \left(\dfrac{1}{\alpha'} - 1\right)\dfrac{(\mathrm{d}\vec{r}''\cdot\vec{v}')\vec{v}'}{v'^2} + \dfrac{\vec{v}'}{\alpha'}\mathrm{d}t'' \\ \mathrm{d}t' = \dfrac{1}{\alpha'}\left(\mathrm{d}t'' + \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}''\cdot\vec{v}'}{c^2}\right) \end{cases} \tag{4.1.1}$$

其中，相对论因子 $\alpha' = \sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}$。式(4.1.1)中，令 $t''=\tau$ 为固有时，取 $\mathrm{d}\vec{r}''=0$，满足关系：

$$\begin{cases} \mathrm{d}\vec{r}' = \dfrac{\vec{v}'}{\alpha'}\mathrm{d}t'' = \dfrac{\vec{v}'}{\alpha'}\mathrm{d}\tau \\ \mathrm{d}t' = \dfrac{1}{\alpha'}\mathrm{d}t'' = \dfrac{1}{\alpha'}\mathrm{d}\tau \end{cases} \tag{4.1.2}$$

间隔不变量可写作

$$c^2\mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}r'^2 = c^2\mathrm{d}t''^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2 \tag{4.1.3}$$

另取惯性系 $H(ct,\mathrm{j}\vec{r})$，令其与 $H(ct'',\mathrm{j}\vec{r}'')$ 以常速 $\vec{v}''$ 相对运动，满足关系：

$$\begin{cases} \mathrm{d}\vec{r} = \dfrac{\vec{v}''}{\alpha''}\mathrm{d}t'' = \dfrac{\vec{v}''}{\alpha''}\mathrm{d}\tau \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\alpha''}\mathrm{d}t'' = \dfrac{1}{\alpha''}\mathrm{d}\tau \end{cases} \tag{4.1.4}$$

其中，相对论因子 $\alpha''=\sqrt{1-\frac{v''^2}{c^2}}$，间隔不变量可写作

$$c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}r^2=c^2\mathrm{d}t''^2=c^2\mathrm{d}\tau^2 \tag{4.1.5}$$

如惯性系 $H(ct',\mathrm{j}\vec{r}')$ 和 $H(ct,\mathrm{j}\vec{r})$ 以常速度 $\vec{v}$ 相对运动，则由式(4.1.1)满足关系式：

$$\begin{cases}\mathrm{d}\vec{r}'=\mathrm{d}\vec{r}+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{(\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2}+\frac{\vec{v}}{\alpha}\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}t'=\frac{1}{\alpha}\left(\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)\end{cases} \tag{4.1.6}$$

其中，相对论因子 $\alpha=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$。由式(4.1.3)和(4.1.5)联立，有间隔不变量

$$c^2\mathrm{d}t'^2-\mathrm{d}r'^2=c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}r^2=c^2\mathrm{d}\tau^2 \tag{4.1.7}$$

或

$$c^2\left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}\tau}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}\tau}\right)^2=c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\tau}\right)^2=c^2 \tag{4.1.8}$$

式(4.1.8)中包含了狭义相对论两条基本原理。惯性系 $H(ct',\mathrm{j}\vec{r}')$、$H(ct'',\mathrm{j}\vec{r}'')$ 以及 $H(ct,\mathrm{j}\vec{r})$ 相互间具有任意性和等价性，满足狭义相对论中的相对性原理；式(4.1.8)表示在四维速度空间的坐标变换中光速为坐标变换不变量，满足光速不变原理。式(4.1.8)是从复变函数的运算规则出发，以四维时空等距变换的数学形式推导出狭义相对论两条基本原理，应该具有较高的数学秩序。

由式(2.1.3)，取

$$\mathrm{d}X_\mu=c\mathrm{d}t+\mathrm{j}\mathrm{d}\vec{r} \tag{4.1.9}$$

式(2.2.12)的四维 Lorentz 变换可改写为

$$\begin{pmatrix}\mathrm{j}\mathrm{d}x'\\ \mathrm{j}\mathrm{d}y'\\ \mathrm{j}\mathrm{d}z'\\ c\mathrm{d}t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_x^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_y}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_z}{v^2} & \frac{\mathrm{j}v_x}{\alpha c}\\ \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_y}{v^2} & 1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_y^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_yv_z}{v^2} & \frac{\mathrm{j}v_y}{\alpha c}\\ \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v''_xv_z}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_yv_z}{v^2} & 1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_z^2}{v^2} & \frac{\mathrm{j}v_z}{\alpha c}\\ \frac{\mathrm{j}v_x}{\alpha c} & \frac{\mathrm{j}v_y}{\alpha c} & \frac{\mathrm{j}v_z}{\alpha c} & \frac{1}{\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{j}\mathrm{d}x\\ \mathrm{j}\mathrm{d}y\\ \mathrm{j}\mathrm{d}z\\ c\mathrm{d}t\end{pmatrix} \tag{4.1.10}$$

满足时空间隔不变量

$$\mathrm{d}X_\mu'^+\mathrm{d}X_\mu'=\mathrm{d}X_\mu^+\mathrm{d}X_\mu \tag{4.1.11}$$

式(4.1.11)和(4.1.7)是相同的。式(4.1.8)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}X_\mu'^+}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}X_\mu'}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}X_\mu^+}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}X_\mu}{\mathrm{d}\tau}=c^2 \tag{4.1.12}$$

由式(4.1.12)可以抽象出一类随固有时变化的四维速度，取

$$\frac{\mathrm{d}X_\mu}{\mathrm{d}\tau}=\bar{\omega}_\mu \tag{4.1.13}$$

式(4.1.13)定义为四维速度，间隔不变量为光速。式(4.1.12)写成

$$\bar{\omega}_\mu'^{+}\bar{\omega}_\mu'=\bar{\omega}_\mu^{+}\bar{\omega}_\mu=c^2 \tag{4.1.14}$$

Minkowski 复空间 $H(ct,\mathrm{j}\vec{r})$ 和 $H(ct',\mathrm{j}\vec{r}')$ 的时空映射关系式(2.1.14)可改写为

$$X_\mu'=X_{m\mu}X_\mu=\frac{\bar{\omega}_\mu}{c}X_\mu \tag{4.1.15}$$

其中，$\bar{\omega}_\mu=\dfrac{1}{\alpha}(c+\mathrm{j}\vec{u})$ 为四维速度，$\vec{u}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ 为三维空间速度。令

$$\bar{\omega}_\mu=\frac{\mathrm{d}X_\mu}{\mathrm{d}\tau}=\bar{\omega}_0+\mathrm{j}\vec{\omega} \tag{4.1.16}$$

有关系：

$$\vec{\omega}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\alpha}\vec{u} \tag{4.1.17}$$

$$\bar{\omega}_0=c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\frac{c}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}u_0 \tag{4.1.18}$$

取 $\vec{\omega}$ 为物理事件 A 相对于时空坐标 $H(ct,\mathrm{j}\vec{r})$ 的运动速度，$\vec{v}$ 为两个四维时空坐标 $H(ct,\mathrm{j}\vec{r})$ 和 $H(ct',\mathrm{j}\vec{r}')$ 的相对运动速度。当 $H(ct',\mathrm{j}\vec{r}')$ 与物理事件 A 相对静止，$\mathrm{d}t'=\mathrm{d}\tau$ 为固有时，有关系：$\vec{u}=\vec{v}$。速度空间间隔(4.1.14)可写作

$$\bar{\omega}_\mu^{+}\bar{\omega}_\mu=\bar{\omega}_0^2-\bar{\omega}^2=c^2 \tag{4.1.19}$$

取四维速度空间 $H(\bar{\omega}_0,\mathrm{j}\vec{\omega})$，由式(4.1.6)和(4.1.17)，一般情况下 $\vec{u}$ 与 $\vec{v}$ 并不相等。式(4.1.19)中物理事件在两空间坐标中的速度分别是 $\vec{\omega}'$ 和 $\vec{\omega}$，即在 $H(ct,\mathrm{j}\vec{r})$ 中物体的运动速度 $\vec{\omega}$ 与 $\vec{v}$ 是不同的。可将 $\vec{\omega}$ 分解为 $\vec{\omega}=\vec{\omega}_{/\!/}+\vec{\omega}_{\perp}$，其中 $\vec{\omega}_{/\!/}$ 与 $\vec{v}$ 的方向相同，并具有相对论效应；$\vec{\omega}_{\perp}$ 与 $\vec{v}$ 的方向垂直，不具有相对论效应。对式(4.1.6)除以固有时，有四维速度空间的普遍 Lorentz 变换形式为

$$\begin{cases}\vec{\omega}'=\vec{\omega}+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{(\vec{\omega}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2}+\dfrac{\vec{v}}{\alpha c}\bar{\omega}_0\\[2ex]\vec{\omega}_0'=\dfrac{1}{\alpha}\left(\vec{\omega}_0+\dfrac{\vec{\omega}\cdot\vec{v}}{c}\right)\end{cases} \tag{4.1.20}$$

其中，$\vec{\omega}'=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}\tau}$，$\bar{\omega}_0'=c\dfrac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}\tau}$。式(4.1.20)也可写成四维矩阵形式

$$\bar{\omega}_\mu'=U_{\mu\nu}\bar{\omega}_\nu \tag{4.1.21}$$

其中，变换矩阵 $U_{\mu\nu}$ 满足式(2.2.5)。展开式(4.1.21)，有与式(4.1.10)相对应的四维速度变换矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathrm{j}\tilde{\omega}'_x \\ \mathrm{j}\tilde{\omega}'_y \\ \mathrm{j}\tilde{\omega}'_z \\ \tilde{\omega}'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_x^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_y}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_z}{v^2} & \frac{\mathrm{j}v_x}{\alpha c} \\ \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_y}{v^2} & 1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_y^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_yv_z}{v^2} & \frac{\mathrm{j}v_y}{\alpha c} \\ \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_z}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_yv_z}{v^2} & 1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_z^2}{v^2} & \frac{\mathrm{j}v_z}{\alpha c} \\ \frac{\mathrm{j}v_x}{\alpha c} & \frac{\mathrm{j}v_y}{\alpha c} & \frac{\mathrm{j}v_z}{\alpha c} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{j}\tilde{\omega}_x \\ \mathrm{j}\tilde{\omega}_y \\ \mathrm{j}\tilde{\omega}_z \\ \tilde{\omega}_0 \end{pmatrix} \tag{4.1.22}$$

式(4.1.22)可写成分量的形式

$$\begin{cases} \tilde{\omega}'_x = \tilde{\omega}_x + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{(\vec{\tilde{\omega}}\cdot\vec{v})v_x}{v^2} + \frac{v_x}{\alpha c}\tilde{\omega}_0 \\ \tilde{\omega}'_y = \tilde{\omega}_y + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{(\vec{\tilde{\omega}}\cdot\vec{v})v_y}{v^2} + \frac{v_y}{\alpha c}\tilde{\omega}_0 \\ \tilde{\omega}'_z = \tilde{\omega}_z + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{(\vec{\tilde{\omega}}\cdot\vec{v})v_z}{v^2} + \frac{v_z}{\alpha c}\tilde{\omega}_0 \\ \tilde{\omega}'_0 = \frac{1}{\alpha}\left(\tilde{\omega}_0 + \frac{\vec{\tilde{\omega}}\cdot\vec{v}}{c}\right) \end{cases} \tag{4.1.23}$$

对式(4.1.21)或(4.1.22)取内积,间隔不变量可对应写作

$$\tilde{\omega}_0'^2 - \vec{\tilde{\omega}}'^2 = \tilde{\omega}_0^2 - \vec{\tilde{\omega}}^2 = \frac{1}{\alpha'^2}(c^2 - u'^2) = \frac{1}{\alpha^2}(c^2 - u^2) = c^2 \tag{4.1.24}$$

式(4.1.24)与(4.1.14)具有类同的形式。

非欧内积空间抽象出的拟距离由线度因子和方位因子共同决定(参见第二十一章定义 21.8)。式(4.1.24)中四维速度所对应的拟距离可定义为

$$\rho = \sqrt{\tilde{\omega}_\mu^* \tilde{\omega}_\mu} = \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{\alpha} \tag{4.1.25}$$

式(4.1.25)中 $\sqrt{c^2-u^2}$ 看做线度因子,相对论因子 α 为方位因子。当取 $0\leqslant v\leqslant c$ 时,限定了 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$。图 3.1 类时区 C_1 中,两时空点的连线 X_1X_3 和 X_1X_4 对应于类光间隔,满足 $v=c$,或 $\left|\frac{\Delta\vec{r}}{c\Delta t}\right|=1$,$\alpha=0$,拟距离等于零;而连线 X_1X_2 对应 $v<c$,或 $\left|\frac{\Delta\vec{r}}{c\Delta t}\right|<1$,$0<\alpha<1$,对应拟距离大于零。

4.2　速度的合成

在四维 Minkowski 复空间可以讨论速度合成的一般形式。式(4.1.6)可改写成

$$\begin{cases} d\vec{r}' = d\vec{r} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{(d\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2} + \frac{\vec{v}}{\alpha}dt \\ dt' = \frac{1}{\alpha}\left(dt + \frac{d\vec{r}\cdot\vec{v}}{c^2}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)dt \end{cases} \tag{4.2.1}$$

用式(4.2.1)的第二式除第一式，得

$$\vec{u}' = \frac{\vec{v} + \alpha\vec{u} + (1-\alpha)\dfrac{(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2}}{1 + \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}} \tag{4.2.2}$$

式(4.2.2)为一般的速度合成公式。当 $\vec{u} \mathbin{/\!/} \vec{v}$ 时，得

$$u' = \frac{v+u}{1+\dfrac{vu}{c^2}} \tag{4.2.3}$$

式(4.2.3)为特殊情况下的速度合成公式。由式(4.2.2)，速度合成公式可写成分量形式

$$\begin{cases} u_x' = \dfrac{v_x + \left[\alpha + (1-\alpha)\dfrac{v_x^2}{v^2}\right]u_x + (1-\alpha)\dfrac{v_xv_y}{v^2}u_y + (1-\alpha)\dfrac{v_xv_z}{v^2}u_z}{1 + \dfrac{1}{c^2}(v_xu_x + v_yu_y + v_zu_z)} \\ u_y' = \dfrac{v_y + (1-\alpha)\dfrac{v_xv_y}{v^2}u_x + \left[\alpha + (1-\alpha)\dfrac{{v_y}^2}{v^2}\right]u_y + (1-\alpha)\dfrac{v_yv_z}{v^2}u_z}{1 + \dfrac{1}{c^2}(v_xu_x + v_yu_y + v_zu_z)} \\ u_z' = \dfrac{v_z + (1-\alpha)\dfrac{v_xv_z}{v^2}u_x + (1-\alpha)\dfrac{v_yv_z}{v^2}u_y + \left[\alpha + (1-\alpha)\dfrac{v_z^2}{v^2}\right]u_z}{1 + \dfrac{1}{c^2}(v_xu_x + v_yu_y + v_zu_z)} \end{cases}$$

(4.2.4)

或

$$\begin{cases} u_x' = \dfrac{v_x + \alpha u_x + (1-\alpha)\dfrac{\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{u})}{v^2}}{1 + \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}} \\ u_y' = \dfrac{v_y + \alpha u_y + (1-\alpha)\dfrac{\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{u})}{v^2}}{1 + \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}} \\ u_z' = \dfrac{v_z + \alpha u_z + (1-\alpha)\dfrac{\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{u})}{v^2}}{1 + \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}} \end{cases} \tag{4.2.5}$$

当 $v = v_x, v_y = v_z = 0$ 时，式(4.2.5)可写成

$$\begin{cases}\dfrac{dx'}{dt'} = u'_x = \dfrac{v + u_x}{1 + \dfrac{vu_x}{c^2}} \\ \dfrac{dy'}{dt'} = u'_y = \dfrac{\alpha u_y}{1 + \dfrac{vu_x}{c^2}} \\ \dfrac{dz'}{dt'} = u'_z = \dfrac{\alpha u_z}{1 + \dfrac{vu_x}{c^2}}\end{cases} \tag{4.2.6}$$

由式(4.1.13)～式(4.2.3)，可验证式(4.2.5)和(4.2.6)满足关系式：

$$\begin{cases}u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \\ u'^2 = u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z\end{cases} \tag{4.2.7}$$

双曲复空间速度合成公式(4.2.3)也可通过双曲复数辐角加法或 Minkowski 复空间的时空旋转而得到。设 φ_1, φ_2 分别为双曲复数 $a_1 = R_1(\text{ch}\varphi_1 + \text{j}\text{sh}\varphi_1), a_2 = R_2(\text{ch}\varphi_2 + \text{j}\text{sh}\varphi_2)$ 的辐角。取 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$，有双曲复数 $a = R(\text{ch}\varphi + \text{j}\text{sh}\varphi)$，由式(1.1.18)，取 $v = R\text{sh}\varphi, c = R\text{ch}\varphi$，有

$$\text{arcth}\,\frac{v}{c} = \text{arcth}\,\frac{v_1}{c} + \text{arcth}\,\frac{v_2}{c} \tag{4.2.8}$$

因为

$$\begin{cases}\text{sh}(x_1 + x_2) = \text{sh}x_1\text{ch}x_2 + \text{ch}x_1\text{sh}x_2 \\ \text{ch}(x_1 + x_2) = \text{ch}x_1\text{ch}x_2 + \text{sh}x_1\text{sh}x_2\end{cases} \tag{4.2.9}$$

式(4.2.9)与(4.2.8)联立得

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}} \tag{4.2.10}$$

式(4.2.10)与(4.2.3)具有相同的形式，为双曲复空间的速度合成公式。

4.3　惯性系中的加速度

在四维 Minkowski 复空间取加速度空间 $H(W_0, \text{j}\vec{W})$，四维双曲加速度定义为

$$W_\mu = \frac{d\bar{\omega}_\mu}{d\tau} = W_0 + \text{j}\vec{W} \tag{4.3.1}$$

其中

$$\begin{cases} \vec{W} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \\ W_0 = \dfrac{\mathrm{d}\omega_0}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\mathrm{d}\omega_0}{\mathrm{d}t} \end{cases} \tag{4.3.2}$$

取两惯性系 $H(ct, \mathrm{j}\vec{r})$ 和 $H(ct', \mathrm{j}\vec{r}')$，相对运动速度 $\vec{v}$ 为常矢量，客体的运动速度为 $\vec{u} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$，加速度为 $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$。式(4.3.2)可写作

$$\begin{cases} \vec{W} = \dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\vec{a}}{\alpha^2} \\ W_0 = \dfrac{c}{\alpha}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = 0 \end{cases} \tag{4.3.3}$$

加速度空间间隔不变量

$$W_\mu^* W_\mu = W_0^2 - W^2 = -\frac{a^2}{\alpha^4} \tag{4.3.4}$$

式(4.3.4)为类空的。在四维惯性系中可以讨论加速度的变换关系，对式(4.2.2)取微分，并注意到式(4.2.1)的第二式，有关系

$$\vec{a}' = \frac{\alpha^2\vec{a} + \alpha(1-\alpha)\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2}}{\left(1+\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)^2} - \frac{\vec{v} + \alpha\vec{u} + (1-\alpha)\dfrac{\vec{v}(\vec{u}\cdot\vec{v})}{v^2}}{\left(1+\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)^3} \cdot \frac{\alpha(\vec{v}\cdot\vec{a})}{c^2} \tag{4.3.5}$$

其中，$\vec{a}' = \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}'}{\mathrm{d}t'}$ 为客体在 $H(ct', \mathrm{j}\vec{r}')$ 中的加速度，$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$ 为客体在 $H(ct, \mathrm{j}\vec{r})$ 中的加速度。当 $\vec{u} \parallel \vec{v}$ 时，由式(4.2.3)，得

$$a' = \frac{\alpha^3}{\left(1+\dfrac{uv}{c^2}\right)^3} a \tag{4.3.6}$$

当取 $v = v_x, v_y = v_z = 0$ 时，由式(4.3.6)，有分量关系：

$$\begin{cases} a'_x = \dfrac{\alpha^3}{\left(1+\dfrac{vu_x}{c^2}\right)^3} a_x \\ a'_y = \dfrac{\alpha^2}{\left(1+\dfrac{vu_x}{c^2}\right)^2} a_y - \dfrac{\alpha^2}{\left(1+\dfrac{vu_x}{c^2}\right)^3}\dfrac{vu_y}{c^2} a_x \\ a'_z = \dfrac{\alpha^2}{\left(1+\dfrac{vu_x}{c^2}\right)^2} a_z - \dfrac{\alpha^2}{\left(1+\dfrac{vu_x}{c^2}\right)^3}\dfrac{vu_z}{c^2} a_x \end{cases} \tag{4.3.7}$$

式(4.3.7)为两惯性系相互间以速率 $v = v_x$ 运动时客体的加速度变换式。

在惯性系中四维 Minkowski 复空间为平直空间，所谓加速度空间 $H(W_0, \mathrm{j}\vec{W})$，

是客体在平直的非欧空间中作加速运动。对式(4.1.20)进行微分，有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}'}{\mathrm{d}\tau}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}\tau}+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}\tau}\cdot\vec{v}\right)\vec{v}+\dfrac{\vec{v}}{\alpha c}\dfrac{\mathrm{d}\bar{\omega}_0}{\mathrm{d}\tau}\\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{\omega}_0'}{\mathrm{d}\tau}=\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{\mathrm{d}\bar{\omega}_0}{\mathrm{d}\tau}+\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{c\mathrm{d}\tau}\cdot\vec{v}\right)\end{cases}\tag{4.3.8}$$

注意到式(4.3.3)，有关系

$$\begin{cases}\vec{W}'=\vec{W}\\ \vec{W}\cdot\vec{v}=0\end{cases}\tag{4.3.9}$$

式(4.3.9)第一式表明四维 Minkowski 平直空间中客体的三维空间加速度相等；式(4.3.9)的第二式表示三维空间加速度矢量 $\vec{W}=\dfrac{\vec{a}}{\alpha^2}$ 与两惯性系相对运动速度 $\vec{v}$ 相互正交。由于两惯性系之间的相对运动为匀速直线运动，说明客体在四维 Minkowski 平直空间中作加速运动时世界线为曲线，如图 4.1。

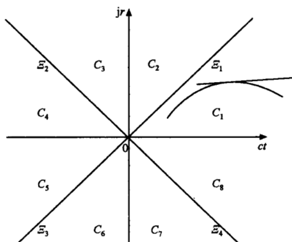


图 4.1　变速运动客体世界线图

四维加速度矢量也可写成矩阵形式

$$W_\mu'=U_{\mu\nu}W_\nu\tag{4.3.10}$$

或

$$\begin{pmatrix}\mathrm{j}W_x'\\ \mathrm{j}W_y'\\ \mathrm{j}W_z'\\ W_0'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_x^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_y}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_z}{v^2} & \frac{\mathrm{j}v_x}{\alpha c}\\ \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_y}{v^2} & 1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_y^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_yv_z}{v^2} & \frac{\mathrm{j}v_y}{\alpha c}\\ \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_z}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_yv_z}{v^2} & 1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_z^2}{v^2} & \frac{\mathrm{j}v_z}{\alpha c}\\ \frac{\mathrm{j}v_x}{\alpha c} & \frac{\mathrm{j}v_y}{\alpha c} & \frac{\mathrm{j}v_z}{\alpha c} & \frac{1}{\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{j}W_x\\ \mathrm{j}W_y\\ \mathrm{j}W_z\\ W_0\end{pmatrix}\tag{4.3.11}$$

对式(4.3.10)或(4.3.11)进行内积运算，满足式(4.3.4)的加速度空间间隔不变量。式(4.3.4)也可以写成度规张量的形式，加速度空间间隔不变量写为 $g_{\mu\nu}$，称为基本度规张量，则

$$ds^2 = g_{\mu\nu} d\tilde{\omega}^\mu d\tilde{\omega}^\nu = g'_{\mu\nu} d\tilde{\omega}'^\mu d\tilde{\omega}'^\nu \tag{4.3.12}$$

其中，$g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}$ ，为基本度规张量[参见第二十四章式(24.2.16)]。

由于式(4.3.11)中的变换矩阵或基本度规张量满足

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = g'^{\mu\nu} g'_{\mu\nu} = 1 \tag{4.3.13}$$

所以惯性系为平直空间，惯性系之间的相对运动为匀速直线运动，但作加速运动的粒子的世界线为曲线。由于实物粒子作亚光速运动，则世界线上各点的切线斜率满足 $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{4}$，或 $-\frac{\pi}{4} < \varphi \leqslant 0$，如图 4.1 所示。

4.4　非惯性系中的加速度

两时空坐标 $H(ct, \mathrm{j}\vec{r})$ 和 $H(ct', \mathrm{j}\vec{r}')$ 相对运动速度 $\vec{v}$ 为变矢量时对应非惯性系。论述一般情况下非惯性系的坐标变换关系应该在弯曲时空中进行，这超出了本书的讨论范围，本节只讨论特殊情况。取 $H(ct', \mathrm{j}\vec{r}')$ 固定在客体上，$dt' = d\tau$，$\vec{u} = \vec{v}, \vec{u}' = 0$。有关系：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\alpha^3 c^2} \tag{4.4.1}$$

将式(4.4.1)代入式(4.3.1)，注意到式(4.1.12)和(4.1.13)，有

$$\begin{cases} \vec{W} = \dfrac{1}{\alpha} \dfrac{d\vec{\tilde{\omega}}}{dt} = \dfrac{\vec{a}}{\alpha^2} + \dfrac{\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{a})}{\alpha^4 c^2} \\ W_0 = \dfrac{1}{\alpha} \dfrac{d\tilde{\omega}_0}{dt} = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\alpha^4 c} \end{cases} \tag{4.4.2}$$

而四维加速度为

$$W_\mu = \frac{d\tilde{\omega}_\mu}{d\tau} = \tilde{\omega}_\mu \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \mathrm{j}\,\frac{\vec{a}}{\alpha^2} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\alpha^4 c} + \mathrm{j}\left[\frac{\vec{a}}{\alpha^2} + \frac{\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{a})}{\alpha^4 c^2}\right] \tag{4.4.3}$$

由式(4.4.3)，加速度空间间隔可写作

$$W_\mu^* W_\mu = W_0^2 - W^2 = -\left[\frac{a^2}{\alpha^4} + \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})^2}{\alpha^6 c^2}\right] \tag{4.4.4}$$

如取 $\vec{v} \,/\!/\, \vec{a}$，则式(4.4.4)为

$$W_\mu^* \cdot W_\mu = W_0^2 - W^2 = -\frac{a^2}{\alpha^6} \tag{4.4.5}$$

将式(4.4.3)写成分量形式

$$\begin{cases} W_1 = \dfrac{a_x}{\alpha^2} + \dfrac{v_x(\vec{v} \cdot \vec{a})}{\alpha^4 c^2} \\ W_2 = \dfrac{a_y}{\alpha^2} + \dfrac{v_y(\vec{v} \cdot \vec{a})}{\alpha^4 c^2} \\ W_3 = \dfrac{a_z}{\alpha^2} + \dfrac{v_z(\vec{v} \cdot \vec{a})}{\alpha^4 c^2} \\ W_0 = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\alpha^4 c} \end{cases} \tag{4.4.6}$$

在 $H(ct, \mathrm{j}\vec{r})$ 中，式(4.4.6)可简化为

$$W = \frac{a}{\alpha^2} + \frac{v}{c} W_0, \quad W_0 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\alpha^4 c} \tag{4.4.7}$$

由式(4.1.14)取微分，有关系式：

$$\mathrm{d}\bar{\omega}_\mu^* \cdot \bar{\omega}_\mu + \bar{\omega}_\mu^* \cdot \mathrm{d}\bar{\omega}_\mu = W_\mu^* \cdot \bar{\omega}_\mu + \bar{\omega}_\mu^* \cdot W_\mu = 0 \tag{4.4.8}$$

一般形式的度规张量满足关系：

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial X'^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial X'^\beta} \mathrm{d}X^\alpha \mathrm{d}X^\beta = g'_{\mu\nu} \mathrm{d}X'^\mu \mathrm{d}X'^\nu$$

度规之间的联系为

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial X'^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial X'^\nu} g_{\alpha\beta}$$

4.5　四维双曲动量

在四维 Minkowski 动量空间取 $P_\mu = m_0 \bar{\omega}_\mu$，为四维双曲动量，其中 m_0 为静质量，取客体的质量 $m = \dfrac{m_0}{\alpha}$，则

$$P_\mu = p_0 + \mathrm{j}\vec{p} = \frac{m_0 c}{\alpha} + \mathrm{j} m_0 \frac{\vec{u}}{\alpha} = m_0 \frac{\mathrm{d}X_\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{4.5.1}$$

令客体的能量和质量关系为

$$E = \frac{m_0 c^2}{\alpha} = mc^2 \tag{4.5.2}$$

则式(4.5.1)可写作

$$P_\mu = m_0 \bar{\omega}_\mu = \frac{E}{c} + \mathrm{j}\vec{p} \tag{4.5.3}$$

对式(4.5.3)取内积，并注意到式(4.1.14)，有

$$P_\mu^* P_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2 \tag{4.5.4}$$

显然，$m_0^2 c^2 > 0$ 为四维动量空间的坐标变换不变量，在非欧度量空间中定义为拟

距离。式(4.5.4)中 m_0c^2 为静能，满足能量动量关系：

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \tag{4.5.5}$$

四维双曲动量在 Minkowski 动量空间中应有相应的几何表示。将图 4.2 分成类时区、类光区和类空区，式(4.5.1)在图 4.2 的类时区为一个四维几何点。在四维动量空间进行映射，取单位四元数

$$P_{M\mu} = \mathrm{ch}\vec{\xi} + \mathrm{jsh}\vec{\xi} \tag{4.5.6}$$

其中，$\vec{\xi}$ 为四维动量矢量相对 E/c 轴的矢量辐角，有关系：

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\mathrm{arcth}\frac{p}{E/c} \tag{4.5.7}$$

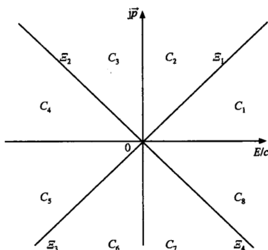


图 4.2　Minkowski 动量空间

对式(4.5.6)取内积，满足

$$\mathrm{ch}^2\xi - \mathrm{sh}^2\xi = 1 \tag{4.5.8}$$

参照式(2.1.14)，取两惯性系 $P'_\mu\left(\frac{E'}{c},\mathrm{j}\vec{p}'\right)$ 和 $P_\mu\left(\frac{E}{c},\mathrm{j}\vec{p}\right)$ 以速度 $\vec{v}$ 作相对运动，满足映射关系

$$P'_\mu = \frac{E'}{c} + \mathrm{j}\vec{p}' = P_{M\mu}P_\mu = (\mathrm{ch}\vec{\xi} + \mathrm{jsh}\vec{\xi})\left(\frac{E}{c} + \mathrm{j}\vec{p}\right) \tag{4.5.9}$$

展开式(4.5.9)有关系式：

$$\begin{cases} \vec{p}' = \dfrac{E}{c}(\mathrm{sh}\vec{\xi} + \vec{p}\,\mathrm{ch}\vec{\xi}) \\ \dfrac{E'}{c} = \dfrac{E}{c}(\mathrm{ch}\vec{\xi} + \vec{p}\,\mathrm{sh}\vec{\xi}) \end{cases} \tag{4.5.10}$$

取

$$\mathrm{th}\vec{\xi} = \frac{\mathrm{sh}\vec{\xi}}{\mathrm{ch}\vec{\xi}} = \frac{\vec{v}}{c} \tag{4.5.11}$$

由式(4.5.8)和(4.5.11)，有

$$\mathrm{ch}\vec{\xi} = \frac{1}{\alpha} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.5.12}$$

将式(4.5.11)和(4.5.12)代入式(4.5.10)导出动量形式的 Lorentz 变换

$$\begin{cases} \vec{p}' = \dfrac{1}{\alpha}\left(\vec{p}+\dfrac{E\vec{v}}{c^2}\right) \\ E' = \dfrac{1}{\alpha}(E+\vec{p}\cdot\vec{v}) \end{cases} \tag{4.5.13}$$

将式(4.5.13)写为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \mathrm{j}\vec{p}' \\ \dfrac{E'}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha} & \mathrm{j}\dfrac{\vec{v}}{\alpha c} \\ \mathrm{j}\dfrac{\vec{v}}{\alpha c} & \dfrac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{j}\vec{p} \\ \dfrac{E}{c} \end{pmatrix} \tag{4.5.14}$$

在双曲动量空间，$H\left(\frac{E}{c},\mathrm{j}\vec{p}\right)$ 和 $H\left(\frac{E'}{c},\mathrm{j}\vec{p}'\right)$ 也可讨论四维动量的一般变换形式，参照式(4.1.16)、(4.1.20)和(4.5.1)，有关系：

$$\begin{cases} \vec{p}' = \vec{p} + \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{(\vec{p}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2} + \dfrac{\vec{v}E}{\alpha c^2} \\ E' = \dfrac{1}{\alpha}(E+\vec{p}\cdot\vec{v}) \end{cases} \tag{4.5.15}$$

其中

$$\begin{cases} \vec{p}' = m_0\vec{\omega}' = m_0\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}\tau} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} \\ p_0' = m_0\bar{\omega}_0 = cm_0\dfrac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{E'}{c} \end{cases} \tag{4.5.16}$$

式(4.5.15)可以写成四维矩阵形式

$$P_\mu' = U_{\mu\nu}P_\nu \tag{4.5.17}$$

展开式(4.5.17)，有式(4.1.22)类似的矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \mathrm{j}p_x' \\ \mathrm{j}p_y' \\ \mathrm{j}p_z' \\ \dfrac{E'}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_x^2}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_y}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_z}{v^2} & \dfrac{\mathrm{j}v_x}{\alpha c} \\ \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_y}{v^2} & 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_y^2}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_yv_z}{v^2} & \dfrac{\mathrm{j}v_y}{\alpha c} \\ \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_z}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_yv_z}{v^2} & 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_z^2}{v^2} & \dfrac{\mathrm{j}v_z}{\alpha c} \\ \dfrac{\mathrm{j}v_x}{\alpha c} & \dfrac{\mathrm{j}v_y}{\alpha c} & \dfrac{\mathrm{j}v_z}{\alpha c} & \dfrac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{j}p_x \\ \mathrm{j}p_y \\ \mathrm{j}p_z \\ \dfrac{E}{c} \end{pmatrix} \tag{4.5.18}$$

对式(4.5.17)或(4.5.18)取内积，有关系式：

$$U_{\mu\nu}^{+}U_{\mu\nu}=U_{\mu\nu}U_{\mu\nu}^{+}=I \tag{4.5.19}$$

对应的动量空间间隔不变量为

$$P_{\mu}^{\prime +}P_{\mu}^{\prime}=P_{\mu}^{+}P_{\mu}=m_0^2c^2 \tag{4.5.20}$$

或

$$\frac{E^{\prime 2}}{c^2}-p^{\prime 2}=\frac{E^2}{c^2}-p^2=m_0^2c^2 \tag{4.5.21}$$

式(4.5.20)和(4.5.21)与能量动量关系式(4.5.5)具有相同的形式，但乘法规则却不相同。式(4.5.20)和(4.5.21)为四维动量空间中四维矢量的内积所对应的间隔不变量，满足动量空间的映射关系，利用了四维动量乘法所满足的多项式混合运算。它不仅是联系着四维时空中物体能量、动量和静止质量的关联方程式，也应满足高速运动粒子运动方程所满足的协变性条件，比传统理论内积的缩并运算具有较高数学秩序。式(4.5.18)能展成分量形式

$$\begin{cases} p_x^{\prime}=p_x+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{(\vec{p}\cdot\vec{v})v_x}{v^2}+\dfrac{Ev_x}{\alpha c^2} \\ p_y^{\prime}=p_y+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{(\vec{p}\cdot\vec{v})v_y}{v^2}+\dfrac{Ev_y}{\alpha c^2} \\ p_z^{\prime}=p_z+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{(\vec{p}\cdot\vec{v})v_z}{v^2}+\dfrac{Ev_z}{\alpha c^2} \\ E^{\prime}=\dfrac{1}{\alpha}(E+\vec{p}\cdot\vec{v}) \end{cases} \tag{4.5.22}$$

在图 4.2 的类时区也可以讨论两点问题。当两几何点 $\left(\frac{E_1}{c},\mathrm{j}p_1\right)$ 和 $\left(\frac{E_2}{c},\mathrm{j}p_2\right)$ 的连线平行或垂直类光区时，由式(4.5.3)满足关系式：

$$\Delta P_{\mu}=P_{2\mu}-P_{1\mu}=\frac{\Delta E}{c}+\mathrm{j}\Delta\vec{p} \tag{4.5.23}$$

对式(4.5.23)取内积，有

$$(\Delta E)^2=(E_2-E_1)^2=(p_2-p_1)^2c^2=(\Delta p)^2c^2=0 \tag{4.5.24}$$

式(4.5.24)将类时区的实物粒子与类光区的光量子在动量空间中联系起来，使实物粒子与场的质量能量转化关系有了几何解释。这为 Dirac 方程和 Yang-Mills 方程以及 Maxwell 方程的几何联系奠定了几何基础。

4.6　四维椭圆动量

相对论量子力学中，高速粒子运动微分方程满足的能量动量关系与 Minkowski

动量空间是有联系的，有必要讨论椭圆复数和其对应复空间的几何关联。在四维椭圆动量空间取四维矢量 $P_\mu\left(\frac{E}{c},\mathrm{i}\vec{p}\right)$，取线性关系

$$P_\mu=\frac{E}{c}+\mathrm{i}\vec{p}=G\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\zeta}}=G(\cos\vec{\zeta}+\mathrm{i}\sin\vec{\zeta}) \tag{4.6.1}$$

其中，$G=\left[\left(\frac{E}{c}\right)^2+p^2\right]^{\frac{1}{2}}$ 为椭圆四维动量的模，$\vec{\zeta}$ 为椭圆动量复空间中四维动量 $P\left(\frac{E}{c},\mathrm{i}\vec{p}\right)$ 相对 E/c 轴的矢量辐角，有关系：

$$\vec{\zeta}=\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\arctan\left(\frac{p}{E/c}\right) \tag{4.6.2}$$

满足关系式

$$\cos^2\zeta+\sin^2\zeta=1 \tag{4.6.3}$$

在椭圆动量空间取内积，有

$$P_\mu^* P_\mu=\left(\frac{E}{c}-\mathrm{i}\vec{p}\right)\left(\frac{E}{c}+\mathrm{i}\vec{p}\right)=\frac{E^2}{c^2}+p^2=G^2 \tag{4.6.4}$$

如取 $G^2=m_0^2c^2$，有

$$\frac{E^2}{c^2}+P^2=m_0^2c^2 \tag{4.6.5}$$

则式(4.6.5)并不是相对论中的能量动量关系。由式(1.2.9)取四维动量的乘法运算，满足关系

$$P_1P_2=\left(\frac{E_1}{c}+\mathrm{i}\vec{p}_1\right)\left(\frac{E_2}{c}+\mathrm{i}\vec{p}\,'_2\right)=\left(\frac{E_1E_2}{c^2}-\vec{p}_1\vec{p}_2\right)+\mathrm{i}\left(\frac{E_2}{c}\vec{p}_1+\frac{E_1}{c}\vec{p}_2\right) \tag{4.6.6}$$

可见式(4.6.6)右边是四维动量，并不是动量空间的动量间隔不变量。特殊情况下取

$$P'_\mu=P_{M\mu}P_\mu=(\cos\vec{\zeta}+\mathrm{i}\sin\vec{\zeta})\left(\frac{E}{c}+\mathrm{i}\vec{p}\right) \tag{4.6.7}$$

Euclidean 复空间中四维线性多项式乘法满足乘法封闭性条件，式(4.6.7)是四维线性动量构成的多项式，各分量之间的交叉混合乘积是四维椭圆矢量的坐标映射。展开式(4.6.7)，有关系：

$$\begin{cases}\vec{p}\,'=\frac{E}{c}\sin\vec{\zeta}+\vec{p}\cos\vec{\zeta}\\[2mm]\frac{E'}{c}=\frac{E}{c}\cos\vec{\zeta}-\vec{p}\sin\vec{\zeta}\end{cases} \tag{4.6.8}$$

取

$$\tan\vec{\zeta}=\frac{\sin\vec{\zeta}}{\cos\vec{\zeta}}=\frac{\vec{v}}{c} \tag{4.6.9}$$

有

$$\cos\zeta = \left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\beta} \tag{4.6.10}$$

满足四维椭圆动量空间变换关系：

$$\begin{cases} \vec{p}' = \dfrac{1}{\beta}\left(\vec{p}+\dfrac{E}{c^2}\vec{v}\right) \\ E' = \dfrac{1}{\beta}(E-\vec{p}\cdot\vec{v}) \end{cases} \tag{4.6.11}$$

式(4.6.11)不是动量空间的 Lorentz 变换，而是复 Euclidean 动量空间的坐标变换关系。显然在椭圆动量空间四维动量写为线性四元数形式，无论式(4.6.4)还是式(4.6.6)的算法都不能给出狭义相对论中的能量动量关系。

4.7 Minkowski 空间的椭圆四元数

狭义相对论的能量动量关系还需要在 Minkowski 空间中建立，在四维 Minkowski 空间中引入椭圆复数，时空点坐标构成四维椭圆复矢量 $X(ct,\mathrm{i}\vec{r})$。在 Minkowski 空间，$X(ct,\mathrm{i}\vec{r})$ 一般不能写成线性多项式形式，也不能按线性多项式乘法规则进行运算。如果用 $X(ct,\mathrm{i}\vec{r})$ 表示四维位形矢量，通过二次项的缩并可以将时空间隔不变量写为

$$X_\mu X_\mu = c^2t^2 - r^2 = R^2 \tag{4.7.1}$$

取 $P_\mu\left(\dfrac{E}{c},\mathrm{i}\vec{p}\right)$ 表示四维动量，通过二次项缩并给出满足相对论效应的能量动量关系：

$$P_\mu P_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2c^2 \tag{4.7.2}$$

四维动量 $P_\mu = P_\mu\left(\dfrac{E}{c},\mathrm{i}\vec{p}\right)$ 也可写成四维矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \mathrm{i}p'_x \\ \mathrm{i}p'_y \\ \mathrm{i}p'_z \\ \dfrac{E'}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_x^2}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_y}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_z}{v^2} & \dfrac{\mathrm{i}v_x}{\alpha c} \\ \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_y}{v^2} & 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_y^2}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_yv_z}{v^2} & \dfrac{\mathrm{i}v_y}{\alpha c} \\ \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_z}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_yv_z}{v^2} & 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_z^2}{v^2} & \dfrac{\mathrm{i}v_z}{\alpha c} \\ -\dfrac{\mathrm{i}v_x}{\alpha c} & -\dfrac{\mathrm{i}v_y}{\alpha c} & -\dfrac{\mathrm{i}v_z}{\alpha c} & \dfrac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i}p_x \\ \mathrm{i}p_y \\ \mathrm{i}p_z \\ \dfrac{E}{c} \end{bmatrix} \tag{4.7.3}$$

满足四维动量间隔不变量

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i}p'_x & \mathrm{i}p'_y & \mathrm{i}p'_z & \dfrac{E'}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i}p'_x \\ \mathrm{i}p'_y \\ \mathrm{i}p'_z \\ \dfrac{E'}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}p_x & \mathrm{i}p_y & \mathrm{i}p_z & \dfrac{E}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i}p_x \\ \mathrm{i}p_y \\ \mathrm{i}p_z \\ \dfrac{E}{c} \end{pmatrix} = m_0^2 c^2 \tag{4.7.4}$$

式(4.7.4)为狭义相对论中的能量动量关系

$$E'^2 - p'^2 c^2 = E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 \tag{4.7.5}$$

传统狭义相对论和量子力学的复数形式均使用椭圆虚单位，但椭圆四元数在Minkowski空间是不能写成由独立坐标分量组成的线性多项式，也不能刻画时空点的运行轨迹，只能看做处理物理问题的一种数学方法和手段。式(4.7.2)与(4.7.5)虽然形式相同，都是狭义相对论中的能量动量关系，但推导的方法不同，其数学性质和物理性质也存在差异。式(4.7.1)和(4.7.2)虽然满足时空间隔不变量和能量动量关系，由于二次项的缩并不考虑空间分量和时间分量的交叉运算，将四维坐标中时间分量和空间分量割裂开来，体现不出客体的相对论效应，也不能将Minkowski空间的几何性质和客体的物理性质结合起来；式(4.7.3)是由Hermite四元数演变来的[参见第十九章式(19.3.19)]，满足矩阵的运算规则，即式(4.7.3)至(4.7.5)考虑了矩阵中时间分量和空间分量的交叉乘积运算。式(4.7.3)在Minkowski空间能够得到相应的几何解释，但将非欧空间的几何性质和客体的物理性质结合起来却存在瑕疵，主要原因是椭圆虚单位与Minkowski空间存在错位关系。这时，可以将四维复函数分解成二元实函数，即用复数的实部和虚部分别讨论微观客体的物理规律就能绕过数学和物理的抵触。所以只要不涉及物理量与时空性质的联系，表述的物理规律与实验相吻合，就可以沿用传统的习惯，利用椭圆复数讨论狭义相对论和量子理论的内容。

4.8　四维力与运动方程

对式(4.5.4)取微分，得

$$P_\mu^* \cdot \mathrm{d}P_\mu + \mathrm{d}P_\mu^* \cdot P_\mu = 0 \tag{4.8.1}$$

展开式(4.8.1)，有

$$\frac{E\mathrm{d}E}{c^2} = \vec{p} \cdot \mathrm{d}\vec{p} \tag{4.8.2}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} = \frac{c^2}{E} p = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = u \tag{4.8.3}$$

在四维时空中取四维力为

$$F_\mu = m_0 W_\mu = \frac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} = F_0 + \mathrm{j}\vec{F} \tag{4.8.4}$$

其中

$$\begin{cases} \vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(m_0 \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\tau}\right) = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{u}) \\ F_0 = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_0\bar{\omega}_0) = \dfrac{1}{\alpha c}\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \end{cases} \tag{4.8.5}$$

取 $H(ct,\mathrm{j}\vec{r})$ 和 $H(ct',\mathrm{j}\vec{r}')$ 的相对运动速度 $\vec{v}$ 为常矢量，则式(4.8.5)可写作

$$\begin{cases} \vec{F} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{u}) = \dfrac{\vec{f}}{\alpha} \\ F_0 = \dfrac{c}{\alpha}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\alpha c}\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \tag{4.8.6}$$

其中，$\vec{f} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{u})$ 为三维空间的运动方程，由式(4.8.5)和(4.8.6)的第二式得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0,\quad E = mc^2 = \text{常量} \tag{4.8.7}$$

式(4.8.7)为能量守恒关系式。如两坐标系 $H(ct,\mathrm{j}\vec{r})$ 和 $H(ct',\mathrm{j}\vec{r}')$ 的相对运动速度 $\vec{v}$ 为变矢量，则式(4.8.5)对应写作

$$\begin{cases} \vec{F} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{u}) \\ F_0 = \dfrac{1}{\alpha c}\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{c}\vec{F}\cdot\vec{v} \end{cases} \tag{4.8.8}$$

其中，式(4.8.8)的第一式为相对论质点的运动方程，第二式为运动方程的能量积分，即 $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \vec{f}\cdot\vec{u}$。

式(4.8.4)也可写作

$$\mathrm{d}P_\mu = F_\mu \mathrm{d}\tau = \alpha F_\mu \mathrm{d}t \tag{4.8.9}$$

式(4.8.9)命名为四维动量定理，并可分写成：$\mathrm{d}P_\mu = \mathrm{d}p_0 + \mathrm{j}\mathrm{d}\vec{p}$，其中

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\mathrm{d}\tau = \alpha\vec{F}\mathrm{d}t \tag{4.8.10}$$

为相对论中相对于三维空间的动量定理。

$$\mathrm{d}p_0 = \frac{\mathrm{d}E}{c} = \alpha F_0 \mathrm{d}t$$

或

$$\mathrm{d}E = c\alpha F_0 \mathrm{d}t = \alpha\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \tag{4.8.11}$$

为相对论中的能量定理。当 $v \ll c$ 时，式(4.8.6)和(4.8.8)可分别过渡到经典的动量定理及能量定理。

如取 $\vec{f} \,/\!/\, \vec{u}$，则对式(4.8.4)取内积

$$F_\mu^* \cdot F_\mu = m_0^2 W_\mu^* \cdot W_\mu = -m_0^2 \frac{a^2}{\alpha^6} = -m^2 \frac{a^2}{\alpha^4} \qquad (4.8.12)$$

或

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right)^2 + (m\vec{A})^2 \qquad (4.8.13)$$

其中，$m\vec{A} = m\dfrac{\vec{a}}{\alpha}$ 定义为广义惯性力。式(4.8.13)可看做非惯性系中具有相对论效应的质点运动方程，它给出了能量变化率、动量变化率和广义惯性力之间的关联式。当 $u \ll c$ 时，$m = m_0$，式(4.8.13)过渡到 Newton 第二定律

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{u}) = m\vec{a} \qquad (4.8.14)$$

第五章　分析力学和连续体力学

Minkowski 说过:“在复数这个时空数量关系里,空间和时间本身都已成为影子,两者的结合才保证独立的存在。”双曲复数与 Minkowski 空间的逻辑关联使描述四维时空中的物理规律更能体现时间和空间的辩证统一关系。在经典物理中,运动物体的能量、动量以及质量分别为守恒量,Hamilton 函数一般与物体的能量相关联。在狭义相对论中,能量本身不再是守恒量,质量和能量之间可以相互转换,这时的能量还是系统的 Hamilton 量吗?粒子的静能作为四维动量空间坐标变换不变量也是体系的守恒量,能否取代经典物理中能量的位置成为物体 Hamilton 量,可以通过能量和动量这两个“影子”的结合表现出独立存在的形式。

5.1　第一类双曲型 Lagrangian 函数

在 Minkowski 复空间取最小作用量方程

$$S=\int b\mathrm{d}s \tag{5.1.1}$$

其中,b 为待定常数。因作用量函数必须满足与惯性系选择无关的要求,取 $\mathrm{d}s$ 为四维间隔不变量,有

$$\mathrm{d}^2 s=\mathrm{d}X_\mu^*\,\mathrm{d}X_\mu=(c^2-v^2)\mathrm{d}^2 t \tag{5.1.2}$$

则式(5.1.1)可写作

$$S=\int b_1\,(c^2-v^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\int L_1\mathrm{d}t \tag{5.1.3}$$

其中,$L_1=b_1\,(c^2-v^2)^{\frac{1}{2}}$ 称为第一类双曲型 Lagrangian 函数。对 $L_1(\dot{q})=L_1(v)$ 作偏微分,得

$$\frac{\partial L_1}{\partial\dot{\vec{q}}}=\frac{\partial L_1}{\partial\vec{v}}=-\frac{b_1\vec{v}}{\alpha c} \tag{5.1.4}$$

当取 $b_1=-m_0c$ 时,则

$$\frac{\partial L_1}{\partial\vec{v}}=\frac{m_0\vec{v}}{\alpha}=m\vec{v}=\vec{p} \tag{5.1.5}$$

而系统的 Hamilton 函数为

$$H=\vec{v}\,\frac{\partial L_1}{\partial\vec{v}}-L_1=mc^2=E \tag{5.1.6}$$

式(5.1.6)也可写作

$$H = -L_1 + \sum_{i=1}^{3} p_i \dot{q}_i \tag{5.1.7}$$

对式(5.1.7)微分，有

$$\mathrm{d}H = -\mathrm{d}L_1 + \sum_{i=1}^{3}(p_i \mathrm{d}\dot{q}_i + \dot{q}_i \mathrm{d}p_i) \tag{5.1.8}$$

如取 $L_1 = L_1(q,\dot{q},t)$，则

$$\mathrm{d}L_1 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}\dot{q}_i + \frac{\partial L_1}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i\right) + \frac{\partial L_1}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{5.1.9}$$

将式(5.1.9)代入式(5.1.8)，注意到式(5.1.5)，得

$$\mathrm{d}H = \sum_{i=1}^{3}(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \frac{\partial L_1}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i) - \frac{\partial L_1}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{5.1.10}$$

取 $H = H(q,p,t)$，则 Hamilton 函数的全微分为

$$\mathrm{d}H = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{5.1.11}$$

将式(5.1.10)和(5.1.11)联立，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = -\dfrac{\partial L_1}{\partial q_i} \\ \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i \end{cases} \tag{5.1.12}$$

因 $\frac{\partial L_1}{\partial \vec{r}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}$，式(5.1.12)可写作

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \end{cases} \tag{5.1.13}$$

式(5.1.13)为第一类双曲型正则方程，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L_1}{\partial q_i} = 0 \tag{5.1.14}$$

式(5.1.14)为第一类双曲型 Lagrangian 方程。

5.2　第二类双曲型 Lagrangian 函数

由式(5.1.1)，如取

$$\mathrm{d}^2 s = \frac{\mathrm{d}X_\mu^*}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}X_\mu}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}^2\tau = \bar{\omega}_\mu^* \cdot \bar{\omega}_\mu \mathrm{d}^2\tau = c^2\mathrm{d}^2\tau \tag{5.2.1}$$

则式(5.2.1)作用量函数必须满足与惯性系选择无关的要求,式(5.1.1)可写作

$$S=\int b_2(\tilde{\omega}_\mu^* \cdot \tilde{\omega}_\mu)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\tau=\int L_2\mathrm{d}\tau \tag{5.2.2}$$

如取 $b_2=m_0c=-b_1$ 时,有

$$L_2=b_2\ (\tilde{\omega}_\mu^*\tilde{\omega}_\mu)^{\frac{1}{2}}=m_0c^2=E_0=-\frac{L_1}{\alpha} \tag{5.2.3}$$

L_2 为静能,命名为第二类双曲型 Lagrangian 函数,在四维动量坐标变换中第二类双曲型 Lagrangian 函数保持为不变量。由式(4.1.16),有

$$\frac{\partial L_2}{\partial\tilde{\omega}_\mu}=\frac{\partial L_2}{\partial\tilde{\omega}_0}+\mathrm{j}\,\frac{\partial L_2}{\partial\vec{\tilde{\omega}}} \tag{5.2.4}$$

因 $L_2=b_2\ (\tilde{\omega}_0^2-\tilde{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}$,则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L_2}{\partial\tilde{\omega}_0}=\dfrac{b_2\tilde{\omega}_0}{c}=mc=\dfrac{E}{c}=p_0\\[2ex]\dfrac{\partial L_2}{\partial\vec{\tilde{\omega}}}=-\dfrac{b_2\vec{\tilde{\omega}}}{c}=-m\vec{v}=-\vec{p}\end{cases} \tag{5.2.5}$$

式(5.2.4)可写作

$$\frac{\partial L_2}{\partial\tilde{\omega}_\mu}=m_0\tilde{\omega}_\mu^*=P_\mu^* \tag{5.2.6}$$

将式(5.2.6)代入式(5.2.3),有

$$L_2=\tilde{\omega}_\mu\frac{\partial L_2}{\partial\tilde{\omega}_\mu}=\tilde{\omega}_\mu P_\mu^* \tag{5.2.7}$$

而 $m_0L_2=P_\mu^*P_\mu=\frac{E^2}{c^2}-p^2$ 对应着能量动量关系式(4.5.5)。所以式(5.2.7)可看做质能关系的 Lagrangian 函数形式。由式(5.2.7),有关系:

$$\tilde{\omega}_\mu\frac{\partial L_2}{\partial\tilde{\omega}_\mu}-L_2=0 \tag{5.2.8}$$

如令系统的 Hamilton 函数 $\tilde{\omega}_\mu\frac{\partial L_2}{\partial\tilde{\omega}_\mu}-L_2=H'$,式(5.2.8)可以写成与式(5.1.7)类同的形式:

$$H'=-L_2+\sum_{\mu=1}^{4}P_\mu^*\,\mathring{X}_\mu \tag{5.2.9}$$

式(5.2.9)中 H' 等于零,Hamilton 函数可能不再是系统的能量。在四维 Minkowski 动量空间中,由式(4.5.3)粒子的能量和动量是四维动量的坐标分量,它们不再是守恒量,能量和动量的结合才是独立的。系统的 Hamilton 函数也不应该再与能量相对应,而应该取系统的静止能量,因为静能在四维坐标变换下保持为不变量,可看做四维动量空间的拟距离。取系统的 Hamilton 函数等于 Lagrangian函数为静能,可写作

$$H_0 = m_0 c^2 = L_2 \tag{5.2.10}$$

式(5.2.9)改写成

$$H_0 = \bar{\omega}_\mu \frac{\partial L_2}{\partial \bar{\omega}_\mu} = \bar{\omega}_\mu \frac{\partial H_0}{\partial \bar{\omega}_\mu} = \bar{\omega}_\mu P_\mu^* \tag{5.2.11}$$

对式(5.2.11)进行全微分，有

$$\mathrm{d}H_0 = \mathrm{d}L_2 = \bar{\omega}_\mu \mathrm{d}P_\mu^* + P_\mu^* \mathrm{d}\bar{\omega}_\mu \tag{5.2.12}$$

因 $\bar{\omega}_\mu = \dfrac{\mathrm{d}X_\mu}{\mathrm{d}\tau}, F_\mu^* = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu^*}{\mathrm{d}\tau}$，则 $\bar{\omega}_\mu \mathrm{d}P_\mu^* = F_\mu^* \mathrm{d}X_\mu$，所以式(5.2.12)可写作

$$\mathrm{d}H_0 = \mathrm{d}L_2 = F_\mu^* \mathrm{d}X_\mu + P_\mu^* \mathrm{d}\bar{\omega}_\mu \tag{5.2.13}$$

如取 $L_2 = L_2(X_\mu, \bar{\omega}_\mu)$，进行全微分，有

$$\mathrm{d}L_2 = \frac{\partial L_2}{\partial X_\mu}\mathrm{d}X_\mu + \frac{\partial L_2}{\partial \bar{\omega}_\mu}\mathrm{d}\bar{\omega}_\mu \tag{5.2.14}$$

比较式(5.2.13)和(5.2.14)，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_0}{\partial X_\mu} = \dfrac{\partial L_2}{\partial X_\mu} = F_\mu^* = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu^*}{\mathrm{d}\tau} = \mathring{P}_\mu^* \\ \dfrac{\partial H_0}{\partial P_\mu} = \dfrac{\partial L_2}{\partial P_\mu} = \dfrac{\mathrm{d}X_\mu^*}{\mathrm{d}\tau} = \mathring{X}_\mu^* \end{cases} \tag{5.2.15}$$

式(5.2.15)称为四维双曲正则方程。由式(5.2.15)和(5.2.6)，给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{X}_\mu}\right) - \frac{\partial L_2}{\partial X_\mu} = 0 \tag{5.2.16}$$

式(5.2.16)为第二类四维双曲型 Lagrangian 方程。

将式(5.2.3)中的 L_2 对 P_μ 取偏导数，有

$$\frac{\partial L_2}{\partial P_\mu} = \frac{\partial L_2}{\partial p_0} + \mathrm{j}\frac{\partial L_2}{\partial p} = \bar{\omega}_\mu^* \tag{5.2.17}$$

式(5.2.3)也可写作

$$L_2 = c\,(P_\mu^* P_\mu)^{\frac{1}{2}} = \bar{\omega}_\mu^* P_\mu = P_\mu \frac{\partial L_2}{\partial P_\mu} \tag{5.2.18}$$

对式(5.2.18)进行全微分，有

$$\mathrm{d}L_2 = \bar{\omega}_\mu^* \mathrm{d}P_\mu + P_\mu \mathrm{d}\bar{\omega}_\mu^* = F_\mu \mathrm{d}X_\mu^* + P_\mu \mathrm{d}\bar{\omega}_\mu^* \tag{5.2.19}$$

取 $L_2 = L_2(X_\mu^*, \bar{\omega}_\mu^*)$ 的全微分，得

$$\mathrm{d}L_2 = \frac{\partial L_2}{\partial X_\mu^*}\mathrm{d}X_\mu^* + \frac{\partial L_2}{\partial \bar{\omega}_\mu^*}\mathrm{d}\bar{\omega}_\mu^* \tag{5.2.20}$$

比较式(5.2.19)和(5.2.20)，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_0}{\partial X_\mu^*} = \dfrac{\partial L_2}{\partial X_\mu^*} = F_\mu \\ \dfrac{\partial H_0}{\partial P_\mu^*} = \dfrac{\partial L_2}{\partial P_\mu^*} = \bar{\omega}_\mu \end{cases} \tag{5.2.21}$$

式(5. 2. 21)也为四维双曲正则方程,它与式(5. 2. 6)具有相互共轭关系。对应的 Lagrangian 方程可写作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{X}_\mu^*}\right)-\frac{\partial L_2}{\partial X_\mu^*}=0 \tag{5. 2. 22}$$

式(5. 2. 15)和(5. 2. 21)的第一式分别可写作

$$\begin{cases} F_\mu^* = \dfrac{\partial L_2}{\partial X_\mu} = \dfrac{\partial L_2}{\partial (ct)} + \mathrm{j}\dfrac{\partial L_2}{\partial \vec{r}} = F_0 - \mathrm{j}\vec{F} \\ F_\mu = \dfrac{\partial L_2}{\partial X_\mu^*} = \dfrac{\partial L_2}{\partial (ct)} - \mathrm{j}\dfrac{\partial L_2}{\partial \vec{r}} = F_0 + \mathrm{j}\vec{F} \end{cases} \tag{5. 2. 23}$$

由式(5. 2. 23)取四维双曲梯度算符

$$\begin{cases} \Box = \dfrac{\partial}{\partial X_\mu} = \dfrac{\partial}{\partial ct} + \mathrm{j}\,\vec{\nabla} \\ \Box^* = \dfrac{\partial}{\partial X_\mu^*} = \dfrac{\partial}{\partial ct} - \mathrm{j}\,\vec{\nabla} \end{cases} \tag{5. 2. 24}$$

对式(5. 2. 24)作内积

$$\Box^* \cdot \Box = \frac{\partial}{\partial X^\mu}\frac{\partial}{\partial X_\mu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} - \nabla^2 \tag{5. 2. 25}$$

式(5. 2. 25)为 Laplace 算符。由式(5. 2. 15)中第一式得

$$\Box L_2 = F_\mu^*,\quad \Box^* L_2 = F_\mu \tag{5. 2. 26}$$

由式(4. 8. 12),对式(5. 2. 26)作内积得式(4. 8. 13):$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right)^2 + (mA)^2$,为相对论中能量动量变换关系式。

5. 3 质点组中 Poisson 括号与 Liouville 定理

对式(5. 1. 1)取变分

$$\delta S = b_1\int \delta(\mathrm{d}s) = b_1\int \mathrm{d}(\delta s) \tag{5. 3. 1}$$

则

$$\delta S = b_1 \delta s \tag{5. 3. 2}$$

在惯性系中取 $\delta\bar{\omega}_\mu = 0$,对式(4. 1. 15)取变分,得

$$\delta X'_\mu = \frac{\bar{\omega}_\mu}{c}\cdot \delta X_\mu \tag{5. 3. 3}$$

由式(5. 1. 2)、(5. 3. 3)和(5. 3. 2),得

$$\delta S = b_1\,(\delta X'^*_\mu \cdot \delta X'_\mu)^{\frac{1}{2}} = (m_0^2 \bar{\omega}_\mu^* \,\delta X_\mu^* \cdot \bar{\omega}_\mu \delta X_\mu)^{\frac{1}{2}} \tag{5. 3. 4}$$

令 Q 为主函数,取

$$\delta Q = P_\mu \delta X_\mu = \frac{\partial Q}{\partial X_\mu}\delta X_\mu \tag{5.3.5}$$

亦即

$$P_\mu = \frac{\partial Q}{\partial X_\mu} = \Box Q \tag{5.3.6}$$

式(5.3.4)也可写作

$$\delta S = (\delta Q^* \delta Q)^{\frac{1}{2}} \tag{5.3.7}$$

或

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)^2 = m_0^2 c^2 \tag{5.3.8}$$

为双曲型 Hamilton-Jacobi 方程。

双曲复空间中取系统由 N 个质点组成，在保守力的作用下其运动状态由 f 个广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_f$，及与其共轭的 f 个广义动量 $p_1, p_2, \cdots, p_f$，共 $2f$ 个变量为直角坐标构成一个 $2f$ 维相空间称谓 Γ 空间。双曲型 Hamilton 正则方程式(5.1.13)可写作

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\sum\limits_{i=1}^{f} \dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \sum\limits_{i=1}^{f} \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \tag{5.3.9}$$

取相空间单位体积的代表点密度为 $\rho(q_1, \cdots, q_f, p_1, \cdots, p_f, t)$，在相空间中取体积元 $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}q_1 \cdots \mathrm{d}q_f, \mathrm{d}p_1 \cdots \mathrm{d}p_f$，则 $\mathrm{d}\Omega$ 内的代表点数为 $\rho(q_1, \cdots, q_f, p_1, \cdots, p_f, t)\mathrm{d}\Omega$。设 N 是系统的总代表点数，为常量，有

$$\int \rho(q_1, \cdots, p_f)\mathrm{d}\Omega = N \tag{5.3.10}$$

考虑代表点密度 $\rho = \rho(q_1, \cdots, q_f, p_1, \cdots, p_f, t)$，并注意到式(5.3.9)，则

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \rho}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \tag{5.3.11}$$

一般情况，如函数 $\varphi = \varphi(q_1, \cdots, q_f, p_1, \cdots, p_f, t)$，将 φ 对 t 微商，得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \{\varphi, H\} \tag{5.3.12}$$

式(5.3.12)中

$$\{\varphi, H\} = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \tag{5.3.13}$$

式(5.3.13)为双曲复空间的 Poisson 括号。

两惯性系 S 和 S' 相互间以常速 v 运动。惯性系 S 的体积元 $\mathrm{d}\Omega$ 中代表点数

$\rho \mathrm{d}\Omega$ 应等于惯性系 S' 的体积元 $\mathrm{d}\Omega'$ 中代表点数 $\rho' \mathrm{d}\Omega'$。如取 S' 相对于代表点为静止坐标系，由相对论效应，有关系 $\mathrm{d}\Omega = \alpha \mathrm{d}\Omega'$，即

$$\rho \mathrm{d}\Omega = \rho' \mathrm{d}\Omega' = \rho\alpha \mathrm{d}\Omega' \tag{5.3.14}$$

或

$$\alpha\rho = \rho' = \text{不变量} \tag{5.3.15}$$

取 $\rho' = \rho(q_1, \cdots, q_f, p_1, \cdots, p_f)$，可以导出双曲型 Liouville 定理

$$\frac{\mathrm{d}\rho'}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial \rho'}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \rho'}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = 0 \tag{5.3.16}$$

或

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \{\rho', H\} = 0 \tag{5.3.17}$$

5.4 双曲连续方程

在双曲复空间的连续体中，取某惯性系 S 上时空点 $X_\mu(ct, \mathrm{j}\vec{r})$ 在 δV 体积内，包含质量 δm，$\rho(\vec{r}, t)$ 称为连续体在时空点 $X_\mu(ct, \mathrm{j}\vec{r})$ 处的密度。取 $\vec{u} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ 为三维空间 $X(x, y, z)$ 的运动速度，由 $\dfrac{m_0}{\alpha} = m$，则 δV 内所含静止质量为 $\delta m_0 = \alpha \delta m$，或

$$\rho_0 = \rho\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{5.4.1}$$

式(5.4.1)中，ρ_0 称为 S 系上静止质量密度。取惯性系 S' 对 $X(x, y, z)$ 点相对静止，用 $\rho' = \rho_0'$ 表示在 S' 上测得的质量密度。因 S 系上 δV 内所含静止质量和 S' 系上相应体积 $\delta V'$ 内所含静止质量相等，有关系：

$$\rho_0 \delta V = \rho' \delta V' \tag{5.4.2}$$

取两惯性系 S 和 S' 相对运动速度为 $u = v$，则

$$\delta V = \delta V' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \alpha \delta V' \tag{5.4.3}$$

将式(5.4.1)至(5.4.3)联立，得

$$\alpha\rho_0 = \alpha^2 \rho = \rho_0' = \rho' = \text{不变量} \tag{5.4.4}$$

其实式(5.1.3)中 $L_1 = -\alpha m_0 c^2 = -\alpha E_0$，如将 $E_0' = \alpha E_0$，则式(5.4.4)中的 ρ_0 和 ρ' 可分别看做惯性系 S 和 S' 中的静能密度。

静止质量的守恒性可由连续性方程表示，取

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta m_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho_0 \delta V) = 0$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}t}\delta V+\rho_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta V)=0 \tag{5.4.5}$$

其中，δV 对时间 $\mathrm{d}t$ 的变化来源于连续体内物质运动速度 u 的变化，即

$$\mathrm{d}(\delta V)=\left(\delta x+\frac{\partial u_x}{\partial x}\delta x\mathrm{d}t\right)\left(\delta y+\frac{\partial u_y}{\partial y}\delta y\mathrm{d}t\right)\left(\delta z+\frac{\partial u_z}{\partial z}\delta z\mathrm{d}t\right)-\delta x\delta y\delta z$$

$$\approx\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z\mathrm{d}t=\nabla\cdot\vec{u}\,\delta V\mathrm{d}t \tag{5.4.6}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta V)=\delta V\,\nabla\cdot\vec{u} \tag{5.4.7}$$

将式(5.4.7)代入式(5.4.5)，得

$$\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}t}+\rho_0\,\nabla\cdot\vec{u}=0 \tag{5.4.8}$$

取 $\rho_0=\rho_0(x,y,z,t)$，有

$$\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\frac{\partial\rho_0}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\rho_0}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+(\nabla\rho_0)\cdot\vec{u} \tag{5.4.9}$$

代入式(5.4.8)，有

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\nabla(\rho_0\vec{u})=0 \tag{5.4.10}$$

由式(5.4.4)和(5.1.2)，取

$$\begin{cases}\mathrm{j}\rho_0\vec{u}=\mathrm{j}\dfrac{\rho'\vec{u}}{\alpha}=\mathrm{j}\rho'\vec{\bar{\omega}}\\ c\rho_0=\dfrac{c\rho'}{\alpha}=\rho'\bar{\omega}_0\end{cases} \tag{5.4.11}$$

式(5.4.10)可写作

$$\frac{\partial}{\partial X_\mu}(\rho'\bar{\omega}_\mu)=0 \tag{5.4.12}$$

为四维双曲型连续方程。

5.5　连续运动方程与能量张量

惯性系 S 中连续体体积元 δV 内物质的动量为 $g\delta V$，其中 $g=\rho u$ 为动量密度。在不考虑应力的情况下，体积元物体受力为 $f\delta V$，f 为力密度。运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g\delta V)=f\delta V \tag{5.5.1}$$

参照式(5.4.6)和(5.4.9)，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g_i\delta V)=\frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}t}\delta V+g_i\frac{\mathrm{d}(\delta V)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial g_i}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla g_i\right)\delta V+g_i\delta V\,\nabla\cdot\vec{u}$$
$$=\left[\frac{\partial g_i}{\partial t}+\frac{\partial(g_iu_j)}{\partial x_j}\right]\delta V$$

可得

$$\frac{\partial g_i}{\partial t}+\frac{\partial(g_iu_j)}{\partial x_j}=f_i \tag{5.5.2}$$

为惯性系 S 中的运动方程。代入 $g=\rho u$，并注意到式(5.4.4)，令

$$\theta_{ij}=\rho u_iu_j=\frac{\rho'}{\alpha^2}u_iu_j=\rho'\tilde{\omega}_i\tilde{\omega}_j \tag{5.5.3}$$

如取

$$\theta_{00}=\rho'\tilde{\omega}_0\tilde{\omega}_0=\rho'\frac{c^2}{\alpha^2}=\rho c^2 \tag{5.5.4}$$

$$\theta_{i0}=\theta_{0i}=\rho'\tilde{\omega}_0\tilde{\omega}_i=\mathrm{j}\rho'\frac{cu_i}{\alpha^2}=\mathrm{j}c\rho u_i \tag{5.5.5}$$

则式(5.5.3)扩展为四维张量：

$$\theta_{\mu\nu}=\rho'\tilde{\omega}_\mu\tilde{\omega}_\nu \tag{5.5.6}$$

对应矩阵形式为

$$\theta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}\rho u_x^2 & \rho u_xu_y & \rho u_xu_z & \mathrm{j}c\rho u_x\\ \rho u_xu_y & \rho u_y^2 & \rho u_yu_z & \mathrm{j}c\rho u_y\\ \rho u_xu_z & \rho u_yu_z & \rho u_z^2 & \mathrm{j}c\rho u_z\\ \mathrm{j}c\rho u_x & \mathrm{j}c\rho u_y & \mathrm{j}c\rho u_z & \rho c^2\end{pmatrix} \tag{5.5.7}$$

式(5.5.2)可写作

$$\frac{\partial\theta_{i\nu}}{\partial X_\nu}=f_i \tag{5.5.8}$$

式(5.5.8)扩展到四维时空，可写作

$$\frac{\partial\theta_{\mu\nu}}{\partial X_\nu}=f_\mu \tag{5.5.9}$$

由式(4.8.8)和(5.4.3)，有

$$F_\mu\left(\frac{\vec{f}\cdot\vec{u}}{\alpha c},\mathrm{j}\,\frac{\vec{f}}{\alpha}\right)\delta V=F_\mu\left(\frac{\vec{f}\cdot\vec{u}}{c},\mathrm{j}\vec{f}\right)\delta V' \tag{5.5.10}$$

其中 $\delta V'$ 为不变量，则式(5.5.10)可写作

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla(\rho\vec{u})=\frac{\vec{f}\cdot\vec{u}}{c^2} \tag{5.5.11}$$

式(5.5.11)为连续性方程，但式(5.5.11)与(5.4.10)并不相同。式(5.4.10)为静质量守恒关系式，但式(5.5.11)质量并不守恒，由于外力 $\vec{f}$ 所做的功总是联系着质量的变化，所以式(5.5.11)右边不为零。

第六章　Minkowski 时空性质分析

20 世纪初创立量子理论以后，量子力学的物理诠释掺入了一些主观因素，使数学和物理开始分道扬镳，人们怀疑物理对数学的依存关系，怀疑两者的内在联系。近几十年，随着量子理论的发展和深入，数学家和物理学家意识到，现代几何学与规范理论存在着内在关联，人们提出数学和理论物理重新统一以及如何打破两者界限问题。从目前来看，这个愿望的实现还有很长路要走，因为数学上，现代几何的公理化体系还没有建立；物理上，尽管人们提出了诸如奇点量子化以及超弦理论，但相对论和量子理论的抵触至今没有消除。我们希望，通过双曲型单复变函数以及相应的几何代数，建立起一类能与非欧几何相联系的公理体系和泛函分析的基础框架。现代物理学的各个分支像机体的各块骨骼，在这个数学框架中这些分支可以逻辑性地组合在一起并显现出现代物理的整体轮廓，从而表现出数学和物理之间的同根关系和内在联系。

从本章开始连续用五章的篇幅，从 Minkowski 复空间的奇异性出发，为非欧理论的几何、代数及泛函分析等各数学分支的相互融合作铺垫，对狭义相对论和量子力学的若干物理和哲学问题作出合理的解释，力求物理规律和谐互补，哲学解释辩证统一。当然，这也会对传统的理论作出较大的修改，甚至是根本性的改变，希望这种改变能引起业内读者的关注。在广域 Hilbert 相空间中建立量子力学的理论框架具有鲜明的非欧几何特征，对量子力学赋予几何结构，物理事件的演化与时空点的运动轨迹相关联，使微观客体的量子事件在广域 Hilbert 相空间具有一种几何性质和分析性质相关联的因果解释，这也是一个世纪以来现代物理学所追求的目标，希望广域 Hilbert 相空间与量子力学的融合能为这种目标和愿望带来一线曙光。

6.1　客体运动规律与时空性质关联

Minkowski 四维复空间 $H(ct, j\vec{r})$ 中时间分量和空间分量相互关联，使描述客体的运动规律要考虑时间和空间的双重变化。简单来说，一个静止客体，在三维 Euclidean 空间与一个几何点相对应，但同样一个静止客体在 Minkowski 空间中却与一条线(世界线)相对应。这是因为，三维 Euclidean 空间与时间是独立的，时间的流逝在空间中并不体现。但 Minkowski 复空间中时间和空间是统一的，尽管静止客体在空间坐标对应一个点，但随着时间的流逝在四维时空中却留下一条平

行于时间轴 ct 的直线轨迹 $\overline{X_1X_2}$，如图 6.1。

传统观念认为，Minkowski 空间不能描述低速运动客体，只能描述高速运动的客体，其实不然。既然在 Minkowski 时空中能用直线描述静止客体，为什么不能描述低速运动的客体呢？微观客体的运动轨迹与时间轴 ct 的关系可以用辐角 φ 刻画。由式(3.1.4)，当 $c|\Delta t|>|\Delta\vec{r}|$，$0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{4}$ 或 $-\frac{\pi}{4}<\varphi\leqslant 0$ 时，两物理事件 $X_1(ct_1,\mathrm{j}r_1)$ 和 $X_2(ct_2,\mathrm{j}r_2)$ 以亚光速取得因果联系，时空间隔大于零。当 $\Delta r=0$，$\Delta t\neq 0$，$\varphi=0$ 时，$X_1(ct_1,\mathrm{j}r_1)$ 和 $X_2(ct_2,\mathrm{j}r_2)$ 的连线平行于时间轴，表示实物客体在 Δt 时间间隔内静止于同一空间点，在 Minkowski 空间中是一条平行于 ct 轴的直线。当实物客体在三维空间作匀速直线运动时，$|\Delta r|<c|\Delta t|$，或 $\frac{|\Delta r|}{c|\Delta t|}<1$，辐角 $|\varphi|<\frac{\pi}{4}$ 为常量，在双曲时空是一条具有一定方向的直线。作匀速运动的客体沿空间坐标正向运动时 $\varphi>0$，向空间坐标反向运动时 $\varphi<0$。当实物客体以低速运动时 $|\Delta r|\ll c|\Delta t|$，辐角是个小量 $\varphi\approx 0$，时空坐标变换对应 Galilei 变换，在类时区对应一条有微小倾角的直线，如图 6.1；实物客体作高速匀速运动时，时空坐标变换为 Lorentz 变换，在类时区对应一条有一定倾角的直线；实物客体以光速运动时 $\Delta r=c\Delta t$，或 $\frac{|\Delta r|}{c|\Delta t|}=1$，$|\varphi|=\frac{\pi}{4}$，描述光信号的传播行为。

在三维坐标空间中，客体作变速直线运动时，四维时空轨迹应该是一条曲线，有关系 $\frac{|\Delta r|}{c|\Delta t|}<1$，辐角 φ 是一个变量。当客体向空间坐标正向加速运动时，$\frac{|\Delta r|}{c|\Delta t|}<1$ 并逐渐变大，曲线切线的辐角 $\varphi>0$，也相应增大，如图 6.2；减速运动时，$\frac{|\Delta r|}{c|\Delta t|}<1$ 并逐渐缩小，曲线切线的辐角 φ 相应减小。客体向空间坐标反向运动时，时空曲线具有相反的性质。

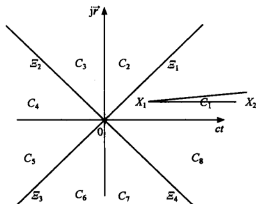


图 6.1 静止和低速运动客体的世界线图

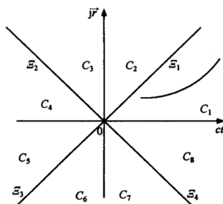


图 6.2 变速客体世界线图

四维 Minkowski 动量空间的类时区中，微观客体的能量动量关系可以用 $H\left(\frac{E}{c},\mathrm{j}\vec{p}\right)$ 中一个点表示。类光区对应 $\left|\frac{E}{c}\right| = |\vec{p}|$，为光和电磁场的能量动量区域；类时区中满足 $\left|\frac{E}{c}\right| > |\vec{p}|$，对应亚光速运动的粒子。当微观客体静止时具有能量 $E_0 = m_0c^2$，速度和动量分别满足 $v=0, p=0$，相应时空点 $H\left(\frac{E_0}{c},0\right)$ 在实轴 $\frac{E}{c}$ 上。微观客体作低速运动时，满足

$$E = E_0 + E_k = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 \tag{6.1.1}$$

式(6.1.1)中 $c \gg v, E_0 \gg E_k$，在 Minkowski 能量动量复空间对应的几何点 $H\left(\frac{E}{c},\mathrm{j}\vec{p}\right)$ 位于能量轴 $\frac{E}{c}$ 附近。因此，低速运动的微观客体在 Minkowski 能量动量复空间 $H\left(\frac{E}{c},\mathrm{j}\vec{p}\right)$ 中可以找到相应的时空对应点。

对宏观低速客体，一般不考虑物体的静止质量，能量满足 $E = E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$。在 $H\left(\frac{E}{c},\mathrm{j}\vec{p}\right)$ 中，$\frac{E}{c} = \frac{1}{2c}mv^2 \ll p = mv$，因为 $\frac{E}{c} < p$ 位于类空区，时空点没有物理意义，所以宏观低速客体只能与三维 Euclidean 空间相对应。需要注意的是，Euclidean 空间中光速 $c \to \infty$，对微观客体无论是低速运动还是高速运动都找不到相应的空间对应点，因为微观客体的静能 $E_0 = m_0c^2 \to \infty$。在量子力学中只要考虑实物粒子的静能，其几何关联就不可能与 Euclidean 空间相对应，即无论是有静止质量的实物粒子还是光量子，它们的运动规律在 Euclidean 空间都不可能给出相应的几何解释。当然，这也涉及以 Euclidean 几何为原空间抽象出的 Hilbert 空间，涉及量子力学数学基础框架的性质问题。也就是说，在 Euclidean 几何为原空间抽象出的 Hilbert 空间中讨论量子力学的物理问题，可能存在数学基础的缺陷和错位问题。

6.2　Minkowski 复空间的经典近似

在 Minkowski 空间中可以描述静止乃至低速运动物体的轨迹，是否能够表述经典的微观客体物理规律呢？这涉及经典量子力学的几何基础问题。狭义相对论中所谓对应原理是，Lorentz 变换在经典近似时 ($v \ll c$) 可过渡到 Galilei 变换，相对论力学过渡到 Newton 力学，一般不加证明地也认为 Minkowski 空间过渡到 Euclidean 空间。在实数域，低速运动的宏观物体运用 Newton 力学在 Euclidean

空间描述其运动规律，用 Galilei 变换和 Cartestan 坐标表示 Euclidean 空间的坐标变换关系是无可非议的。然而在复空间进行经典近似时，由 Lorentz 变换过渡到 Galilei 变换，Minkowski 空间是否也能过渡到 Euclidean 空间是一个值得探讨的问题，这涉及微观理论的时空关联。应该说，经典量子力学中微观低速粒子对应的时空性质是一个尚未解决的问题。

第一章中分析了椭圆复数和双曲复数的交是抛物复数，即 Galilei 变换可能对应 Euclidean 复空间，也可能对应 Minkowski 复空间。具有相对论效应的高速粒子在经典近似时，虽然坐标变换由 Lorentz 变换过渡到 Galilei 变换，但所对应的时空间却仍然可能是 Minkowski 复空间，当然，也可能是 Euclidean 复空间。应该注意到，双曲复数对应的 Minkowski 复空间和椭圆复数对应的 Euclidean 复空间存在很大差异，Minkowski 复空间具有各向异性特点，而 Euclidean 复空间却各向同性。Minkowski 复空间区分了实物粒子与光量子的对应区域，利用各向异性可以表述实物粒子与光量子的耦合。对于低速运动的微观物体，除了本身的运动规律之外还要考虑粒子和光或场的相互作用，这种双重性质的考虑就应该与具有各向异性的 Minkowski 空间相对应。所以，Galilei 变换所对应的空间，既有实空间与复空间的区别，也有各向同性与各向异性的差异。针对不同的物理领域，找出时空间与坐标变换的对应关系，是建立现代物理学中微观理论的重要问题，也是找到经典量子力学几何对应的关键。

四维 Minkowski 复空间中取两个物理事件 $X_1(ct_1, \mathrm{j}\vec{r}_1)$ 和 $X_2(ct_2, \mathrm{j}\vec{r}_2)$ 作亚光速运动，在四维速度空间分别对应时空点 $\bar{\omega}_1\left(\frac{c}{\alpha}, \mathrm{j}\frac{v_1}{\alpha}\right)$ 和 $\bar{\omega}_2\left(\frac{c}{\alpha}, \mathrm{j}\frac{v_2}{\alpha}\right)$。当 $v_1 \ll c$，$v_2 \ll c$ 时，这两个物理事件所对应的实物粒子均为低速运动，在 Cartestan 坐标中满足 Galilei 变换。如果这两个物理事件是宏观物体，它们之间的相互作用以碰撞等亚光速的运动行为来进行，运动规律可以用实 Euclidean 空间的几何点来表示。这时 Minkowski 空间可过渡到 Euclidean 空间，相对论力学过渡到 Newton 力学；两个物理事件如果是微观物体，这时对应的时空间就不应是 Euclidean 空间，而应该为 Minkowski 空间，其原因主要有三个：原因一，Minkowski 空间的方向奇异性在经典近似时仍然得到保留。当低速运动的微观客体发生的两个物理事件 $X_1(ct_1, \mathrm{j}\vec{r}_1)$ 和 $X_2(ct_2, \mathrm{j}\vec{r}_2)$ 用光信号取得因果联系时，在类时区可用类光间隔描述相互作用，两者的时空连线仍然平行或垂直类光区 Ξ，有关系式 $X_2 - X_1 \in \Xi$。这时相对论力学就不能简单地过渡到 Newton 力学，因实物粒子与光量子的耦合，超越了 Newton 力学的应用范畴。原因二，Minkowski 空间的复数性质与微观客体存在着深层次的内在联系，这点可以在量子力学中得到验证。而不管是实的还是复的 Euclidean 空间，由于缺少光量子的对应区域，均不能描述低速微观客体与光信号联系的几何行为，这也是量子力学不能确定几何空间的根本原因。原因三，

微观物体具有的静能 m_0c^2 在 Euclidean 空间是没有物理意义的，也是没有几何对应的，只有在 Minkowski 空间才能找到物体静能的时空对应点。

例 6.1 Minkowski 空间的类时区取 $X_1 = N_1 + \mathrm{j}\delta_1$，$X_2 = N_2 + \mathrm{j}\delta_2$，有关系 $N_1 \gg \delta_1$，$N_2 \gg \delta_2$，但如果 $N_2 - N_1 = \delta_2 - \delta_1 = \Delta$，则 $X_2 - X_1 = \Delta + \mathrm{j}\Delta \in \Xi$。如：令大数 $N_1 = 1000$，$N_2 = 1001$，取小数 $\delta_1 = 1$，$\delta_2 = 2$，有 $X_2 - X_1 = 1 + \mathrm{j} \in \Xi_1$。$X_1$ 和 X_2 均可说明经典近似时类时区的时空点与类光区的时空点存在几何关联。

经典近似时 Minkowski 复空间与 Galilei 变换相对应，有必要认真分析微观客体运动规律与几何性质的内在联系。首先，由 Lorentz 变换过渡到 Galilei 变换描述实物粒子本身运动规律时，四维时空可分离成三维空间坐标和一维独立的时间坐标。当考虑微观、低速实物粒子的量子跃迁，相互间以光信号取得因果联系时(吸收或放出光量子)，应将它们与四维 Minkowski 复空间类时区中的类光间隔相对应，这时虽然微观客体本身运动规律满足 Galilei 变换，但光量子满足 Lorentz 变换。微观客体与光量子耦合表现为波粒二象性，用光信号联系的实物粒子可用分立结构的非质点相格来描述，不同相格之间的量子跃迁伴随着实物粒子与光量子耦合。式(3.1.9)中 $|\Delta r| = |c\Delta t|$ 反映了这种相互作用是以光速传播的，即具有非质点相格的微观、低速客体与相邻的微观客体通过传递光信号取得了因果联系。这一方面说明非质点相格之间并不是孤立的，而是通过类光间隔相互间取得了几何关联；另一方面，实物粒子本身能量不守恒，微观客体在通过吸收或放出光量子时发生了质能转变。四维能量动量空间的动量分量和能量分量相等时，就表示了质能转变的等量关系，这也是四维空间中微观客体与场耦合时表现出的能量守恒、动量守恒与经典力学中物体的能量守恒和动量守恒的区别所在。

用 Minkowski 复空间描述相互间以光信号取得因果联系的微观、低速实物粒子，使 Minkowski 空间与 Galilei 变换取得了形式上的关联，为经典量子力学的几何诠释提供了理论依据，这涉及量子力学的数学基础和数学框架问题。传统量子力学的数学基础是以 Euclidean 空间为原空间抽象出的 Hilbert 空间，这种 Hilbert 空间不可能对光量子和实物粒子的耦合赋予几何诠释。而用 Minkowski 复空间的分立结构来刻画经典量子力学，可能对量子力学和狭义相对论提供统一的几何诠释，这需要重新审视量子力学的数学基础或 Hilbert 空间。其实，Einstein 和 Bohr 这两位物理大师争论的焦点也在这里。Einstein 虽然接受了量子力学系统的内在逻辑的完整性，但他怀疑量子力学的数学基础和哲学解释，而 Bohr 颇似站在 Euclidean 几何的公理上，坚拒建立非 Euclidean 几何的企图。我们认为，Einstein 和 Bohr 的矛盾是可以协调的。一方面，Minkowski 空间与 Galilei 变换相对应，应该覆盖经典量子力学乃至三维 Euclidean 空间的全部内容。也就是说，利用复数的共性，利用两类 Hilbert 空间的吻合区域，可以对传统量子力学的内容作出一致的描述。另一方面，在 Minkowski 空间给出经典量子力学的几何诠释，解

决了量子力学与相对论相抵触的矛盾，可能对解决 Einstein 提出的量子力学完备性条件以及实在与几率诠释的内在关联都是有意义的。当然，这需要重新建立一种与非 Euclidean 几何相对应的公理体系和广域的 Hilbert 空间，第二十一章对广域泛函分析作了较系统的讨论。

6.3 Minkowski 复空间的分立结构

量子力学建立以后，为了使量子力学得到一种几何解释，一度曾有人提出时空可能有分立结构。但什么样的时空可以分立，怎样分立，分立与连续有何关联，都是一些没有解决的问题。在传统的物理理论中，经典力学所对应的 Euclidean 空间和狭义相对论对应的 Minkowski 空间一般认为是连续空间，而量子力学所对应 Hilbert 相空间一般认为是分立空间。但分立结构和连续结构之间存在相互抵触，几何结构与分析结构之间缺少沟通和联系。连续空间突出了时空的几何结构，宏观客体在三(四)维时空中可作为质点处理；而 Hilbert 空间是以 Euclidean 空间为原空间的多维相空间，它是由完备内积空间抽象出来的泛函分析结构。在 Hilbert 相空间中，微观客体的量子特征与非质点相格相联系，所以不能像连续空间那样将物体抽象为质点。从传统理论的角度讲，Hilbert 空间已失去了原空间的几何结构，只具有分析结构。但分析结构真的不具有原空间的几何性质吗？是否存在量子力学与 Hilbert 原空间几何结构不匹配、相抵触，应是一个值得关注的问题。狭义相对论和量子力学两种理论互相抵触的关键在于它们没有一套统一的，可以相互融合的几何结构和分析结构。或者说，Hilbert 空间以 Euclidean 几何为原空间作为量子力学的数学基础，存在着数学秩序乃至逻辑关联上的缺陷和瑕疵。狭义相对论和量子力学虽然分别对应两套自洽的物理理论，但找出分立与连续的抵触，建立两者的几何性质与分析性质的逻辑关联是解决问题的关键。

分立结构和连续结构相互抵触主要有三个原因。一是传统 Hilbert 空间所对应的原空间为 Euclidean 复空间或椭圆复空间，1.3 节中分析了 Euclidean 复空间与 Minkowski 复空间的类时区域相对应，数学上可以给出它们的同构关系。由于 Euclidean 复空间的类光区域仅为坐标原点，光量子没有几何对应区域，所以不能讨论微观客体的量子跃迁以及类时区与类光区的几何关联。传统 Hilbert 空间中实物粒子和光子的区域界定是模糊的，它们的数学关联也是一个尚未解决的问题。二是传统狭义相对论讨论两个物理事件用光信号取得因果联系时，并没有与时空性质联系起来，即没有系统地讨论 Minkowski 空间中两点的度量问题，当然这涉及 Minkowski 空间的距离公理，具有复杂的理论背景。由于没有建立类时区与类光区的几何关联，就不可能给出 Minkowski 空间的分立结构，这是传统狭义相对论在连续的几何空间中能够描述高速运动质点而不能刻画有静止质量粒子与光量

子耦合的原因。三是传统的狭义相对论和泛函分析中的 Hilbert 空间理论都没有将复数性质与时空的几何性质联系起来，这涉及数学运算规则的局限性问题。Hilbert 空间是由内积的距离公理抽象出来的，但椭圆复数的内积与狭义相对论的时空间隔不变量是不相容的。虽然量子力学中粒子态函数的几率诠释与复数的性质存在逻辑关联，但它不能将原空间的几何性质通过内积的复数性质引入量子力学，这是传统 Hilbert 空间理论的缺陷之处。

在 Minkowski 复空间的类时区 C_1 中取时空点 $X_\mu(ct_\mu,\mathrm{j}r_\mu)$ 和 $X_\nu(ct_\nu,\mathrm{j}r_\nu)$，由上文分析可分别表示以亚光速运动的不同时空点所发生的物理事件。如果它们用光信号取得因果联系，则时空连线平行或垂直零因子区或类光区，满足关系式

$$X_\nu - X_\mu = d\theta_0 \quad (d = \pm 1, \cdots) \tag{6.3.1}$$

两物理事件的时空间隔满足关系式 $|\Delta x| = |c\Delta t|$，说明它们只能通过传递光信号取得因果联系。由式(6.3.1)可以将 Minkowski 复空间的类时区进行定向格式化，使四维时空间和四维能量动量空间分别形成分立结构。将式(6.3.1)中 θ_0 命名为单位类光元，系数 $d = \pm 1, \pm 2, \cdots$ 取分立值，在类时区 C_1 中以 $\pm\theta_0$ 为单位，分别作出类光区 Ξ_1（或 Ξ_2）的平行线族（或垂直线族）和垂直线族（或平行线族）。将整个类时区 C_1 分割成一系列定向相格，如图 6.3。每个相格的线度表示为（参见第二十一章定义 21.6 的虚距离）

$$|X_\mu - X_{\mu-1}| = |\pm\theta_0| = d_0 \tag{6.3.2}$$

当将这种定向相格由类时空间推广到整个四维坐标空间 $H(ct,\mathrm{j}\vec{r})$ 和四维动量空间 $H\left(\frac{E}{c},\mathrm{j}\vec{p}\right)$ 时，在八维 Minkowski 复空间或八维 $\mu(q_1,\cdots,q_4,p_1,\cdots,p_4)$ 空间中形成了与类光区相平行或相垂直的超平面族。这些超平面族将整个类时区分割成一系列 $8n$ 维定向相格，并对整个 Minkowski 复空间的位型空间和动量空间施行了定向格式化。如果以这种定向格式化的 Minkowski 复空间为原空间并赋予其泛函分析结构，可能为量子力学提供一种与非 Euclidean 几何相关联的数学框架（参照第二十一章的定义 21.23，由完备的内积空间抽象出三类广域 Hilbert 相空间）。这种数学框架具有统一的几何结构、分析结构以及代数结构，从数学和物理两方面建立起它们之间的逻辑关联，可为量子力学和狭义相对论的一元化表述提供了理论依据。

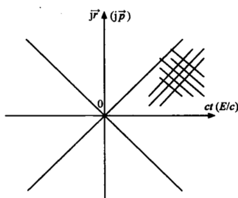


图 6.3 Minkowski 复空间的定向格式化

在传统的狭义相对论中，Minkowski 连续空间所研究的实物物体可作为时空

中一个质点或一个时空点处理，仅涉及时空的局域性和连续性。在量子力学中，粒子量子跃迁吸收或放出光量子涉及时空中两个时空点的关联问题，涉及时空的整体性和光量子或场的全域性。光量子和场的整体性，要求所对应的波长和频率与时空的分立结构有关，所以如何将粒子和场有机地结合起来，找出分立与连续之间的联系是我们应该关注的问题。Minkowski 复空间的方向奇异性为广域 Hilbert 相空间的分立结构赋予了几何结构，使具有连续性的几何结构与具有分立性的分析结构之间建立起沟通和联系的平台。Minkowski 复空间中实物粒子和光量子分别有各自的对应区域，时空方向的奇异性将类光区和类时区以及实物粒子和光量子联系起来，使得在抽象的广域 Hilbert 相空间中用非质点相格描述实物粒子和光量子的耦合具有了统一的几何背景和泛函分析背景。同一时空点通过不同方向的连线可以描述不同的时空性质，物理上就可能区分为物体所具有的不同的运动特性和相互作用形式。

将 Plank 量子假设与 Minkowski 空间的分立结构相结合，可以描述微观客体的量子特征。定义 21.23 第二类广域 Hilbert 相空间，用分立相格刻画物理事件之间用光信号取得的因果联系以及实物粒子与光量子耦合的相互作用。Minkowski 复空间中类时区两个物理事件的类光间隔满足 $\Delta x = c\Delta t$，说明微观客体之间的因果联系是通过光信号的传递来实现的。将微观客体量子跃迁与广域 Hilbert 空间的非质点定向相格相对应，使具有粒子特性的微观客体以跃迁的方式吸收或放出光量子，也与相邻非质点相格的微观粒子相互交换这种光信号。整个分立空间的非质点相格对应类时区域的类光间隔，所有具有非质点性质的实物粒子都是通过传递光信号亦即与场的相互作用取得了因果联系。

在 Minkowski 空间同一类时区域，类时间隔满足关系式 $|\Delta x| < |c\Delta t|$。类时区域不能与类光区域取得几何关联，物理上只能表示以亚光速取得因果联系的两个物理事件，它们对应实物粒子间的相互作用，例如粒子间的碰撞。不能描述粒子和场的耦合，排除了类时事件用光信号联系的可能性，粒子的特征长度不能用相干波长描述，就失去了时空分立的意义。在这种情况下，实物粒子可抽象为质点，这就是传统狭义相对论所对应的连续空间，它包含了有静止质量粒子本身所具有的运动特征以及实物粒子之间以亚光速形式所进行的因果联系。定义 21.23 中第一类广域 Hilbert 相空间，利用类时区的类时间隔可描述实物粒子本身的运动行为。

Minkowski 复空间的分立和连续具有一种相辅相成的辩证关系，定义 21.23 中三类广域 Hilbert 相空间分别对应实物粒子和场所具有的不同的运动特征和相互作用形式。Minkowski 复空间的方向奇异性使四维几何表现为时空的不光滑性，当类时区与类光区取得了几何上的关联，时空就具有了分立结构，物理上对应实物粒子和光量子的相互作用；而类时区的连续性质，物理上对应实物粒子间的相互作用形式和实物粒子本身的运动特征。一般情况下微观客体可能同时参与这两

种相互作用，就需要分立和连续两种结构相互叠加和融合，使之成为一个辩证统一体才可能对微观客体的运动规律进行完备性描述。广域 Hilbert 相空间的非欧几何背景，使描述微观客体的非质点相格兼顾分析结构和几何结构两重性质。在赋予几何结构下的量子解释应该具有因果表述，这需要突破传统理论基础框架的束缚，突破量子解释的传统观念。

6.4　四维时空的物态关系

我们这个宇宙世界是由物质组成的，物质有两种存在形式。一种是具有静止质量和一定形体的实物客体，一种是弥散于空间中的场，物质的两种形式都是独立于人的主观意识而客观存在。在平直时空中实物粒子具有局域性，而具有全域性的场主要是电磁场和引力场。从哲学角度，物质的两种形态具有辩证的统一关系和内在的逻辑关联，它们可以相互耦合和转化，耦合和转化过程中质能保持守恒。实物客体与场的这种联系似乎不完全取决于实物粒子本身的运动状态，无论是与 Lorentz 变换相对应的高速粒子，还是与 Galilei 变换相对应的低速粒子，甚至静止的微观客体，都可以通过吸收或放出光量子使实物粒子与场进行耦合，并在耦合中质量与能量产生转换。量子力学实质上就是描述实物粒子与场相互作用的基础理论，实物粒子的能级分立结构和量子跃迁与吸收和放出光量子有关。

表征物质的两种物态形式在 Minkowski 复空间可以找到几何对应区域，一种是与实物粒子对应的类时区域，一种是与光量子对应的类光区域。物质两种物态的转化规律是否可以通过类时区与类光区的几何关联来进行描述，是解决量子力学几何对应的一个突破口。为了解决这个问题，需要对 Minkowski 复空间的几何性质重新认识，换一个角度讲，就是抛开类时区仅能描述实物客体运动状态，而从物质的两种物态形式所对应区域的相互联系来进行对比分析。即不同区域的划分，对物质的不同物态给出了几何区别，而区域间的几何关联描述了不同物态间相互转换的逻辑联系。这时，表现实物粒子本身的运动行为降为次要矛盾，粒子与场不同物态之间的耦合上升为主要矛盾。

为了将物质两种不同物态的几何区域进行对比，Minkowski 时空间 $H(ct,\mathrm{j}x)$ 可以改写成 $H(ct,\mathrm{j}vt)$。其中，$x=vt$ 表示实物客体在类时区中的位置和线度，取 $x_c=c\Delta t$ 表示场或光量子在类光区中的位置和线度。实物客体和光量子两种不同的物质形态从几何性质上可以描述它们的区别和联系。类时区与类光区的区别，可看做以 v 运动的实物客体和以光速 c 运动的光量子之间的差别，类时区的定向格式化表现了实物客体和光量子的联系和转化关系。在类时区取复数 $X=ct+\mathrm{j}vt$ 表示 $H(ct,\mathrm{j}x)$ 中的时空点，说明有静止质量的实物客体运动速度小于光量子的运动速度 $v<c$，或在相等的时间间隔内光量子的运行距离大于实物客体运动的距

离。v 和 x 是变量，不同的 v 和 x 在类时区对应不同的时空点。但 c 为常量，对应类光区，所以复数的模方可以写为

$$|R|^2 = c^2t^2 - v^2t^2 \tag{6.4.1}$$

式(6.4.1)中模平方的物理意义可解释为，相等时间间隔内匀速运动的实物客体与光量子运行的距离平方的差值为不变量。也可解释为具有一定速度的实物客体与光量子两者速度平方的差值在坐标变换中保持为不变量。

四维动量空间 $H\left(\frac{E}{c}, \mathrm{j}p\right)$ 可改写为 $H\left(\frac{E}{c}, \mathrm{j}mv\right)$ 或 $H(mc, \mathrm{j}mv)$，四维动量空间中的一个点代表实物客体的一个物理事件。其中 $mv = p$ 为客体的动量，m 为实物粒子的质量，$E = mc^2$ 为实物粒子的能量。当实物客体对应的两个物理事件以光信号取得联系时，它们的时空连线(世界线)平行或垂直类光区，满足关系式 $|\Delta p| = \left|\frac{\Delta E}{c}\right|$。取 $m_c c = \Delta p = p_c$，$m_c c^2 = \Delta E = E_c$，m_c、p_c 以及 E_c 分别为光量子的质量、动量和能量。实物客体通过量子跃迁或与光量子的耦合使其物质性或物态形式发生了改变，实物客体与光量子之间产生了质能转变。在类时区内沿平行或垂直类光区作直线，将类时区进行了分立化，使类时区两个实物粒子的位置差值与类光区中光量子的几何线度联系起来，满足关系式：

$$\Delta x = c\Delta t = nx_{c0} \tag{6.4.2}$$

式(6.4.2)中 Δx 为实物粒子跃迁前后的位置差，如取 x_{c0} 为产生光量子的线度，则 $n = 1, 2, \cdots$ 为整数，说明光量子具有分立性。同理两实物客体的动量差值与光量子的动量满足关系式

$$\Delta p = c\Delta m = \frac{\Delta E}{c} = p_c \tag{6.4.3}$$

式(6.4.2)和(6.4.3)使物质两种存在形式和相互作用关系在 Minkowski 复空间中具有了一种几何描述。所以在平直的 Minkowski 动量空间可以描述物质不同物态之间的能量和质量之间的转化关系，这也使平直时空具有了物质性。

类时区的分立结构可以表征实物粒子的几何线度和光量子相干波长的几何关联，实物粒子吸收或放出光量子亦即粒子间相互交换光信号，使粒子不再是孤立客体而是与场相互作用的关联体。与实物粒子相伴的是一个与场相关联的真空背景，这个背景将类时区与类光区的几何关联转换成实物粒子与光量子的因果联系和物质变换。实物客体如不考虑光量子的参与，其质量的改变在传统的量子理论中是无法进行因果解释的。实物粒子之间可以通过相互交换光信号取得因果联系，在交换光信号过程中各实物粒子的质量、动量以及能量要发生改变。四维平直的 Minkowski 复空间具有物态变换的时空性质，可能是揭示数学理论和物理规律存在深层次逻辑关联的钥匙。

6.5　物态变换的哲学诠释

Minkowski 复空间描述物质的自然规律具有三重性质：一是实物客体的运动性质，二是场的变化性质，三是实物粒子和场的转换性质，三者统一起来构成两种物态的运动形式和转换规律。运动和转换是同一个事物的两个不同方面，它们之间既有区别，又有联系，也存在一个从量变到质变的演化过程。实物粒子与光量子的耦合存在物态转化，在这个过程中，实物粒子的质量、动量及能量发生了改变，实物粒子的运动状态也发生改变。所以，物质两种形态之间存在相辅相成的关系，在具体的过程中需要考虑两种规律的综合作用。

实物粒子与场的运动和转换是一种客观规律，独立于人的主观意识而客观存在。实物粒子与场一起组成了自然界的客观物质，它们之间的因果联系既要考虑客观性，也要考虑整体性，如果单方面考虑实物粒子或场是有其局限性和缺陷性的。当表示实物客体的两个物理事件以光信号相互联系时，它们的时空连线(世界线)平行或垂直类光区，对应关系式 $c|\Delta t| = |\Delta x|$，说明光信号以光速在两时空点间运行，并与两个物理事件取得了因果联系。例如取 $X_1 = 5+2\mathrm{j}, X_2 = 6+3\mathrm{j}$，$\Delta X = X_2 - X_1 = 1+\mathrm{j}$；间隔不变量 $\Delta X^* \Delta X = 1-1 = 0, R_1^2 = X_1^* X_1 = 25-4 = 21, R_2^2 = X_2^* X_2 = 36-9 = 27$。可解释为，实物客体吸收或放出光量子前后分别对应两个不同的物理事件，实物客体与光量子耦合前后的时空位置和运行速度都发生了改变，时空间隔不变量也发生了改变。这种突变与吸收或放出的光量子有关，所以仅考虑实物客体所对应两个物理事件而不考虑光量子的参与是无法进行因果解释的。

在动量空间 $H(p_c, \mathrm{j}p)$ 也是如此，当实物客体对应的两个物理事件以光信号形式相互联系时，它们的时空连线(世界线)也平行或垂直类光区。光量子对应类光区，其动量空间的时空间隔或静能等于零；粒子与光量子取得因果联系前后的两个物理事件其静能发生了改变，即实物客体的物质性发生了改变，实物客体与光量子之间产生了质能转变。实物客体的变化如不考虑光量子的参与，其质量的改变在传统的理论中是无法进行因果解释的。实物粒子与场的关联应该看成客观事物所表现的辩证统一关系，单方面考虑实物粒子或场都不能给出一个因果解释，这也是量子力学不能给出一个客观的概率解释的原因。其实，早期 Einstein 对量子力学产生怀疑时，就提出“鬼波”和“上帝掷色子”的问题，这里就包含了场或光量子的度量亦即微观客体因果解释。可惜的是光量子的度量至今没有解决，传统量子力学沿用经典力学的思维方法，研究实物粒子的运动行为抛开了光量子的参与，仅从统计性角度解释发现粒子的概率是有局限性的。

从几何角度来说，经典力学对应 Euclidean 空间的传统观念始终影响我们对

微观客体的理解。用 Galilei 变换描述粒子的运动行为，态函数表示发现粒子的概率，不确定关系表示对粒子的测量等，都受到传统意义上三维坐标空间影响。由于这个三维空间带有 Euclidean 空间的几何痕迹，将微观粒子与场的背景引入这个空间并得到几何解释是不可能的。Euclidean 空间具有方向同性的特点，整个几何空间只能描述实物客体这个单元物质形态的运动规律。无论是宏观客体对应的连续空间，还是微观客体对应的分立空间以及由 Euclidean 空间的公理体系抽象出的 Hilbert 空间，由于不能给出电磁场或光量子的对应区域，不可能用几何性质描述实物客体与场或光量子的相互作用，所以利用传统的 Hilbert 空间表述光量子的性质以及光量子与实物粒子的耦合从数学角度讲是存在缺陷的。

传统狭义相对论中，将 Minkowski 空间看做高速运动客体所对应的时空间，虽然将实物客体和光量子的对应区域进行了区分，但两种物质形态的相互转变关系并没有通过时空性质描述出来，也没有通过时空方向的奇异性表征客体本身的内在性质。特别是，对光量子所对应的类光区不能描述其局域性质，不能对光量子进行度量，实物粒子质量和能量的变化就不能给出一个因果性的描述，所以想要在传统的 Minkowski 空间中描述微观客体的转变规律也是不可能的。对微观客体的运动规律给出一个完备的因果解释，需要将实物粒子与场的背景联系起来。要抛弃 Euclidean 空间和 Minkowski 空间的传统观念，对实物粒子和场所具有的不同区域分别定义不同的距离或度量，实物粒子与场的耦合才能通过不同区域间的几何关联得到一个合理的因果解释。

Minkowski 复空间的几何性质和物质形态变换的逻辑关联应与双曲单复变函数的性质有关。复数可以通过实部和虚部描述既有联系又有区别的两类事物，将双曲复数的虚部对应实物客体，实部对应场，$H(p_c,\mathrm{j}p)$ 表示物质两种物态之间的联系。利用双曲单复变函数的运算规则，描述物质不同形态的运动规律和逻辑关联，说明物质与双曲复数之间存在着一种依存关系。复数性质反映物质自然规律，客体自然规律表现复数性质，复数和物质之间也就存在一个辩证统一关系。如果复数具有一个本体空间，复数性质应与时空性质具有内在的对应关系，通过复数性质描述本体空间的几何性质，反之通过时空性质赋予复数的运算规则，复数和本体空间也形成了辩证统一关系。双曲复变函数、Minkowski 复空间以及物质的自然规律三者构成了一个辩证统一体，它们之间应该具有相互依存的逻辑关联。

在量子力学中描述微观客体以及态函数的概率诠释与复数性质有关，说明复数与微观客体之间存在内在的逻辑关联。微观理论特别是对亚核粒子的描述对复数具有依赖性，是否能归结到几何空间的时空性质应该取决于复数是否具有相应的本体空间。Euclidean 空间不具有这种本体空间的几何性质，而 Minkowski 空间与 Hilbert 相空间所对应完备的内积空间又不吻合，可能是量子理论找不到相应几何空间的原因。复数性质、时空结构以及物态形式的辩证关系和内在联系，使

我们应该重新审视数学和物理间的界限和依存关系，从系统理论的完备性考虑建立一套统一的基础理论。这套理论应该包括 Minkowski 空间的时空理论、非欧几何的公理体系、复变函数以及相应的广域代数、复泛函分析、多拓扑和群表示等。利用这套完备的数学理论可以将狭义相对论、经典量子力学、相对论量子力学、场论及广义相对论和谐地融合在一起，这符合辩证法中的辩证统一原理。

第七章　量子力学基本原理的几何诠释

量子力学中，微观客体如电子在吸收或放出光子时表现了实物粒子与场的相互作用和内在的逻辑关联，刻画了两种物质形态在耦合和转化过程中的辩证统一关系。而微观客体的波粒二象性、不确定关系以及能级理论等量子力学基本原理应是物质两种形态因果联系的表现形式。但是，在传统的量子力学中并没有将两者辩证地统一起来，而往往将实物粒子和场割裂开来，这种割裂和分离体现在量子力学的基本原理中，这也是不能将量子力学进行因果描述的重要原因。在Minkowski空间中讨论狭义相对论的物理问题是个不争的事实，是否可将量子理论特别是经典量子力学引入Minkowski空间是建立狭义相对论和经典量子力学统一数学框架的基本条件，也是在Minkowski复空间中进行狭义相对论和量子力学一元化表述的基本思路。

7.1　量子特征与时空格式化的对应关系

量子力学中，光和实物粒子（如电子）相互耦合表现了光电效应、量子干涉、能级跃迁、不确定关系等物理特性，这些特性是组成物质的基本粒子和场相互作用的自然规律。Minkowski复空间亦即抽象出的广域Hilbert相空间，如果通过几何和分析性质描述这些自然规律就可能在量子力学和广域Hilbert空间之间建立一种内在联系，这种联系可以把广域Hilbert空间的数学规律与量子力学中的物理规律有机地结合起来。为量子力学赋予新的数学背景给我们提出了两点启发：一方面量子力学的物理现象有了一个几何对应空间，量子解释可能赋予新的数学、物理以及哲学含义；另一方面，通过几何性质对物理规律给出因果解释，提升了数学秩序，拓宽了量子力学与其他物理分支相互联系的渠道。

在二维复平面取时空点 $X_1(ct_1,\mathrm{j}x_1)$、$X_2(ct_2,\mathrm{j}x_2)$ 为微观客体所对应的物理事件。Minkowski复空间类时区中，如果 $X_1(ct_1,\mathrm{j}x_1)$ 和 $X_2(ct_2,\mathrm{j}x_2)$ 的连线平行或垂直类光区，由式(6.3.1)有关系：

$$X_2 - X_1 = \Delta X = c\Delta t + \mathrm{j}\Delta x = d\theta_0 \tag{7.1.1}$$

显然，$X_1(ct_1,\mathrm{j}x_1)$，$X_2(ct_2,\mathrm{j}x_2)$ 为类时区 C 中的时空点，应具有粒子的特征；取 θ_0 为类光区的单位四元数，应具有光量子的特征。对式(7.1.1)取内积，有

$$\Delta X^* \Delta X = d^2\theta_0^*\theta_0 = 0 \tag{7.1.2}$$

取 $d = n\lambda$ 为虚距空间 (H,d) 中的虚距离或线度因子。当 $n = \pm 1, \pm 2, \cdots$，将 $d_0 =$

λ 作为一个单位尺度，对 Minkowski 复空间类时区进行格式化，形成了一种时空的分立结构，定向分立格的完备内积空间可抽象出广域 Hilbert 相空间(参见第二十一章定义 21.23)。取 $\Delta X_0 = \lambda \pm \mathrm{j}\lambda$ 为类光区中非质点相格对应的四元数，在虚距空间 (H,d) 中时间间隔分量和空间间隔分量相等。在位型时空中，取 λ 为类光区光量子的相干波长，ΔX_0 的空间分量表示实物粒子进行量子跃迁时吸收或放出一个光量子的相干长度，ΔX_0 与 λ 的关联，使有静质量粒子间的相干线度与光量子的相干波长在 Minkowski 空间中找到了一种几何关联。可解释为，实物客体在吸收或放出光量子时取得因果联系的最小时间间隔为 Δt，而一个光量子在两个实物客体之间运行的最小距离 $\Delta x = \lambda = c\Delta t$。

在二维能量动量复平面 $H\left(\frac{E}{c},\mathrm{j}p_x\right)$，微观客体的量子态可用 Plank 常数来刻画，将 Plank 常数引入 Minkowski 复空间的分立结构中，能够对量子假设给出一种几何解释。取关系式

$$\Delta P = \frac{\Delta E}{c} + \mathrm{j}\Delta p_x = d'\vartheta_0 = n'\frac{h}{\lambda}\vartheta_0 \tag{7.1.3}$$

其中，ϑ_0 为动量空间的单位类光元，h 为 Plank 常数，$n' = \pm 1, \pm 2, \cdots$。对式(7.1.3)取内积，有

$$\Delta P^* \Delta P = d'^2 \vartheta_0^* \vartheta_0 = 0 \tag{7.1.4}$$

式(7.1.4)为四维动量空间类时区中类光间隔对应的坐标变换不变量，ϑ_0 在类光区中对应复数的模等于零。

四维 Minkowski 位型空间的类时区取时空点或两物理事件 $X_1(ct_1,\mathrm{j}\vec{r}_1)$ 和 $X_2(ct_2,\mathrm{j}\vec{r}_2)$，当两物理事件用光信号取得因果联系时，其连线平行或垂直类光区。如果两物理事件在四维 Minkowski 能量动量空间的类时区对应时空点 $P_1\left(\frac{E_1}{c},\mathrm{j}\vec{p}_1\right)$ 和 $P_2\left(\frac{E_2}{c},\mathrm{j}\vec{p}_2\right)$，其连线也平行或垂直类光区 Ξ。沿平行或垂直类光区作一系列分立相格，则位型空间和能量动量空间构成八维 Minkowski 相空间。在分立的相空间中，将式(7.1.2)和(7.1.4)联立，得

$$(\Delta X^* \Delta X)(\Delta P^* \Delta P) = (\Delta X^* \Delta P)(\Delta P^* \Delta X) = 0 \tag{7.1.5}$$

四元数 ΔX 和 ΔP 中实部和虚部均相等，式(7.1.5)可以简写成

$$\Delta X^* \Delta P = \Delta P^* \Delta X = 0 \tag{7.1.6}$$

式(7.1.6)可看做八维 Minkowski 相空间的间隔不变量，包含了坐标的零间隔和动量的零间隔。八维虚距空间的虚距离满足

$$dd' = nn'h = kh, \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{7.1.7}$$

Minkowski 复空间的方向奇异性和分立结构在数学上使类时区和类光区取得了几何关联，物理上对应有静质量粒子和光量子的耦合。将 Plank 假设引入广

域 Hilbert 相空间，用 Plank 常数来刻画定向相格的线度并用以表示微观客体的量子态，这为光电效应、波粒二象性、能级跃迁、不确定关系等量子力学基本原理提供了一种几何解释。

7.2 Compton 效应的几何解释

Compton 散射是 Einstein 光量子论的直接验证，如果将 Compton 效应在 Minkowski 空间通过几何形式描述出来，对量子力学的几何关联具有重要的物理意义。在 Compton 散射中，入射光子与晶体中的电子相互作用，由式(7.1.3)，取

$$\frac{\Delta E}{c} = |\Delta\vec{p}| = |\vec{p}_c| = \frac{E_c}{c} \tag{7.2.1}$$

式(7.2.1)可看做实物粒子与光量子耦合时所满足的能量和动量关系式。其中，$\Delta\vec{p}$ 和 ΔE 分别为电子耦合前后的动量差和能量差，$\vec{p}_c$ 和 E_c 分别为光子的动量和能量。式(7.2.1)可改写成

$$\begin{cases}|\Delta\vec{p}| = |\vec{p}_2 - \vec{p}_1| = |\vec{p}_c| = m_c c \\ \Delta E = E_2 - E_1 = E_c = m_c c^2\end{cases} \tag{7.2.2}$$

其中，m_c 为光子的质量。式(7.2.2)说明，电子与光量子的相互作用分别满足能量守恒和动量守恒。式(7.2.2)这种守恒关系与四维 Minkowski 空间方向奇异性有关，是类时区 C 与类光区 Ξ 几何联系的重要标志，这与 Newton 绝对空间中能量守恒和动量守恒有本质区别。

用类时区分立相格表示电子的量子态，电子通过量子跃迁吸收或放出光量子的前后在类光区对应不同的分立相格。散射过程分两步进行，首先取静止电子，静能为 $E_1 = m_0c^2$，动量为 $p_1 = 0$；散射前光子能量为 $E_{c0} = h\nu_0$，动量为 $p_{c0} = \dfrac{h}{\lambda_0}$。电子吸收整个光子进行量子跃迁，能量变为 $E_2 = m'c^2$，动量为 $p_2 = m'v'$。由式(7.2.2)，分别满足动量和能量守恒关系

$$\begin{cases}\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_{c0} \\ E_2 = E_1 + E_{c0}\end{cases} \tag{7.2.3}$$

如果跃迁后的电子不稳定，取 $E_2 = m'c^2$ 和 $p_2 = m'v'$ 为中间态，通过放出新的光子并跃迁到新的量子态，电子的能量改变成 $E_3 = mc^2$，动量为 $p_3 = mv$；同时放出光子的能量为 $E_c = h\nu$，动量为 $p_c = \dfrac{h}{\lambda}$。由式(7.2.2)，该跃迁过程也分别满足能量守恒和动量守恒，有关系：

$$\begin{cases}\vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_c \\ E_2 = E_3 + E_c\end{cases} \tag{7.2.4}$$

将式(7.2.3)和(7.2.4)联立，有

$$\begin{cases}\vec{p}_1+\vec{p}_{c0}=\vec{p}_3+\vec{p}_c\\ E_1+E_{c0}=E_3+E_c\end{cases} \tag{7.2.5}$$

对式(7.2.5)移项，则处于终态电子的动量和能量分别满足

$$\begin{cases}\vec{p}_3=\vec{p}_{c0}-\vec{p}_c\\ E_3=E_1+E_{c0}-E_c=m_0c^2+h\nu_0-h\nu\end{cases} \tag{7.2.6}$$

终态电子满足相对论能量动量关系：

$$E_3^2=m^2c^4=p_3^2c^2+m_0^2c^4 \tag{7.2.7}$$

将式(7.2.6)代入式(7.2.7)，得

$$(m_0c^2+h\nu_0-h\nu)^2-(\vec{p}_{c0}-\vec{p}_c)^2c^2=m_0^2c^4 \tag{7.2.8}$$

散射前后光子的动量满足

$$\vec{p}_{c0}\cdot\vec{p}_c=p_{c0}p_c\cos\varphi=\frac{h^2\nu_0\nu}{c^2}\cos\theta \tag{7.2.9}$$

其中，θ 为光子散射前后动量间的夹角。将式(7.2.9)代入式(7.2.8)的展开式，有

$$\nu=\frac{\nu_0}{1+\dfrac{h\nu_0}{m_0c^2}(1-\cos\theta)} \tag{7.2.10}$$

或

$$\frac{1}{\nu}=\frac{1}{\nu_0}\left[1+\frac{h\nu_0}{m_0c^2}(1-\cos\theta)\right] \tag{7.2.11}$$

利用 $\lambda_0=\dfrac{c}{\nu_0}$，$\lambda=\dfrac{c}{\nu}$，式(7.2.11)可改写为

$$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)=\lambda_c(1-\cos\theta) \tag{7.2.12}$$

其中，$\lambda_c=\dfrac{h}{m_0c}$，为电子的 Compton 波长。式(7.2.12)为 Compton 效应所对应的散射关系式。

在 Minkowski 空间推导 Compton 效应具有明显几何特征，与传统解释相比具有如下特点：

(1) Compton 散射中，电子吸收和放出两个不同光子是通过两个不同的能量跃迁分别进行的，具有量子效应。量子效应体现在电子与光子散射中，具有能量的量子化和动量的量子化，两个能量跃迁可看做 Compton 散射的中间过程。

(2) 电子与光子的散射与 Minkowski 空间结构有关，使具有相对论效应的 Compton 散射实验被赋予了一种几何解释。几何性描述使散射过程中电子与光子耦合表现了量子个体的因果效应，为量子力学的几何关联以及个体决定论的因果解释奠定了实验基础和数学基础。

(3) 电子与光子耦合分别满足能量守恒和动量守恒与 Minkowski 空间的方向奇异性有关，与类时区与类光区的几何关联有关，这有别于经典物理的力学规律。

(4) Compton 散射与 Minkowski 空间分立结构的几何联系不仅验证了 Einstein 的光量子论，也刻画了电子与光两种物态形式的相互转化关系。电子的量子跃迁，吸收或放出光量子，同时表现了电子的波动性和光子的粒子性，是实物粒子和场作为辩证统一体共同满足波粒二象性的直接验证。

7.3 对 de Broglie 关系的质疑

Einstein-de Broglie 关系是量子力学的基本原理，它分别赋予了光量子和有静止质量实物粒子波粒二象性的微观特征。由于 de Broglie 关系描述微观实物客体本身也具有波粒二象性，可能是量子力学对微观客体不能进行因果解释的重要原因。理顺光量子和实物粒子的微观特征和内在关联，消除微观理论的人为偏见，可能会对量子力学基本原理的认识带来重大改变。

Einstein 利用 Plank 能量子假设对光进行不连续性描述，确定了光具有波粒二象性，给出了公式

$$E_c = m_c c^2 = h\nu, \quad p_c = m_c c = \frac{h}{\lambda} \tag{7.3.1}$$

其中，E_c、p_c 和 m_c 分别为光量子的能量、动量和质量，ν、λ 分别为光的频率和波长。de Broglie 从对称性考虑，假设静止质量不为零的实物粒子也具有波动性，其波长和频率可写为

$$E = h\nu_s, \quad \lambda_s = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{u}{\nu_s} \tag{7.3.2}$$

其中，u、v、λ_s、ν_s 和 m 分别为实物粒子的相速度、群速度、波长、频率和质量。式(7.3.1)和(7.3.2)分别表示光量子和实物粒子(如电子)具有类同的波粒二象性形式。

de Broglie 描述实物粒子本身所具有的波粒二象性是量子力学对微观客体不能进行因果解释的根源。量子解释告诉我们，一个孤立的电子，既是波又是粒子，或既不是波也不是粒子，波不是经典的波，是几率波。对微观客体的这种几率描述从概念上是模糊的，这种含糊的观点也受到许多人的怀疑，其中最典型是 Einstein，他把 Schrödinger 方程的态函数称为鬼波，但正是 Einstein 首先同意 de Broglie 的观点，将实物粒子表达成波粒二象性形式。实物粒子和光量子具有波粒二象性的等同关系存在着许多疑点，实物粒子在不同运动状态下描述粒子波动性的物理量出现了一些关键性矛盾。在狭义相对论中取实物粒子能量动量关系满足

$$E^2 = p^2c^2 + E_0^2 \tag{7.3.3}$$

其中，$E = mc^2$，$E_0 = m_0c^2$，$p = mv$，代入式(7.3.2)Einstein-de Broglie 关系，有

$$p = mv = \frac{h}{\lambda_s},\quad E = mc^2 = h\nu_s,\quad \nu_s = \frac{u}{\lambda_s} \tag{7.3.4}$$

由式(7.3.4)的前两式，得 $m = \frac{h}{v\lambda_s} = \frac{h\nu_s}{c^2}$，代入第三式有

$$uv = c^2 \tag{7.3.5}$$

de Broglie 取 u 为粒子的相速度，v 为群速度。式(7.3.5)说明当粒子的相速度和群速度达到光速时，有 $u = v = c$，对应着光量子。对于以亚光速运动的实物粒子其群速度 $v < c$，相速度 $u > c$，显然三者满足关系 $u > c > v$。de Broglie 将相速度解释为一种与动点运动相缔合假想的波，这种假想的超光速波应该不具有实际的物理意义。

当考虑实物粒子为低速粒子，满足关系 $m = m_0$，在无外场时取自由电子如果也满足波粒二象性，其动量和能量可写为

$$p = mv = \frac{h}{\lambda_s},\quad E = \frac{1}{2}mv^2 = h\nu_s,\quad \nu_s = \frac{u}{\lambda_s} \tag{7.3.6}$$

式(7.3.6)中第一式和第二式联立，有

$$m = \frac{h}{v\lambda_s} = \frac{2h\nu_s}{v^2} \tag{7.3.7}$$

式(7.3.6)的第三式代入式(7.3.7)，会出现 $v = 2u$ 即 $u < v$ 的情况，说明在经典近似时实物粒子的相速度小于群速度。由于 $v << c$，所以有 $u << c$，这与高速粒子的相速度大于光速也大于群速的解释是相矛盾的。

综合来看，光量子以光速传播，相速度和群速度相等也等于光速 $u = v = c$ 是合理的。但高速粒子的相速度大于光速，大于光量子的相速度无法得到合理的物理解释。低速运动粒子的相速度小于群速度均远小于光速，问题是，高速实物粒子的相速度由超光速过渡到经典粒子的相速度不可能给出一个明确的界限之分。在高速粒子的运动速度降低过程中，什么情况下相速度由超光速变成光速，再改变成亚光速乃至低于群速度，这些都不能给出一个明确的速度演化过程和合理的物理解释。出现矛盾的原因在哪里呢？答案应该在 de Broglie 关系之中，显然将电子与光子的波粒二象性看做具有等同关系是值得商榷的。

7.4　对 Einstein-de Broglie 关系的修正

如果光子与电子本身不具有对等关系，它们之间的耦合关系如何表示呢？电子进行量子跃迁吸收或放出光量子，光量子的能量和动量应该与电子的能量和动量的改变量有关，这一点在 Compton 散射中由式(7.2.2)至(7.2.12)进行了推导。以 Compton 散射为实验基础可将 Einstein-de Broglie 关系进行修正。注意到光量

子应满足波动条件 $v = \frac{c}{\lambda}$，取

$$\begin{cases} \Delta E = E_2 - E_1 = m_c c^2 = h\nu \\ \Delta p = p_2 - p_1 = p_c = m_c c = \dfrac{h}{\lambda} \end{cases} \tag{7.4.1}$$

式(7.4.1)可简写成

$$\begin{cases} \Delta E = h\nu \\ \Delta p = \dfrac{h}{\lambda} \end{cases} \tag{7.4.2}$$

式(7.4.2)称为修正后的 Einstein-de Broglie 关系，其中 ΔE、Δp 分别为电子与光子耦合时的能量增量和动量增量，具有粒子的特征；$h\nu$、$\frac{h}{\lambda}$ 分别为吸收或放出光子的能量和动量，具有光或电磁场的特征。式(7.4.2)是电子和光量子共同遵守的关系式，两者的相互作用形成了具有波粒二象性的辩证统一体。

式(7.4.1)和(7.4.2)与 Compton 散射式(7.2.2)是相同的，在 Minkowski 四维动量空间对应的四维动量间隔等于零，也对应着类时区与类光区的几何关联。实物粒子与光量子耦合满足能量守恒和动量守恒，由式(7.1.4)对应拟距离 $\rho = 0$。而虚距离由式(7.2.1)满足关系：

$$\frac{\Delta E}{c} = \Delta p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{7.4.3}$$

式(7.4.3)正是修正后的 Einstein-de Broglie 关系式(7.4.2)，为四维 Minkowski 复空间所对应的度量空间中的虚距离，可写为 $d_0 = \Delta p = \frac{h}{\lambda}$。

式(7.4.2)和(7.4.3)通过 Compton 效应得到了物理解释。在式(7.2.6)和(7.2.9)中 Compton 效应只将散射光的能量和动量写成波粒二象性形式，而电子进行量子跃迁，其能量和动量的差值与吸收或放出的光子共同遵守能量守恒和动量守恒，说明一个孤立电子本身只具有粒子性，不具有波动性也不具有波粒二象性。只有当电子吸收或放出光子或与光信号取得联系时，由耦合的光子表现为波动性满足相速度与群速度相等并等于光速 $u = v = c$。即在光电耦合过程中，电子所表现的波动性和光子所表现的粒子性是相互关联的，耦合使两者结合成辩证统一体，它们相辅相成，缺一不可。所以，de Broglie 物质波的概念应该修改，离开电子与光子的耦合，单独谈论实物粒子的波粒二象性是没有意义的。修正后的 Einstein-de Broglie 关系否定了孤立电子的波动性，排除了实物粒子本身所对应波动方程式(7.3.4)和(7.3.6)。对实物粒子来讲，不存在所谓超光速的相速度 u、物质波长 λ_s 以及物质波的频率 ν_s，也排除了由于实物粒子运动状态的不同所引起相速度与群速度变化引起的矛盾。其实 de Broglie 关系是通过电子双缝衍射实验来解

释电子具有波动性，但电子衍射图样是多电子的集体行为，而 de Broglie 关系是电子的个体行为，在本章后续部分和第八章将对电子双缝衍射实验进行四维解释，通过电子与光子的几何联系进一步修正物质波的概念。

微观世界中实物客体特别是电子与光量子的耦合无处不在，真空中的电磁场作为运动电子的背景，使电子与光量子每时每刻都在相互作用。电子通过吸收或放出光量子共同表现为波粒二象性，是微观客体质量和能量相互转变的理论依据，也是两种物质形态相互耦合的具体表现。电子通过与光量子的耦合使波粒二象性具有了因果性解释，在量子物理中具有很重要的物理意义和哲学意义。传统观念是把微观粒子的波粒二象性看做粒子独立的内禀性质，这很难给出一个令人信服的因果解释。因为无法对粒子波动性产生的机制作出理论上的论述，使量子解释掺杂了人为主观因素，这也是量子力学哲学解释的疑惑所在。电子和光量子通过耦合和转变建立起这种因果关联与量子力学的传统观念具有很大区别，如果微观粒子的波粒二象性是通过与光量子耦合而得到的，就不是粒子的独立行为，而是实物粒子与场相互作用的因果行为，它可以通过 Minkowski 复空间的方向奇异性描述出来。所以，Einstein-de Broglie 关系不再是量子力学的基本假设，而应是 Minkowski 复空间类时区和类光区相互耦合的必然推论。这种粒子和场的耦合有别于传统的经典力学、相对论力学以及电磁场论，为微观理论所独有。修正后的 Einstein-de Broglie 关系在 Minkowski 复空间能够找到一种几何对应，得到 Compton 效应的实验验证，应该满足 Einstein 所追求的因果解释。

7.5　微观客体能量、动量的几何关联

在能量动量空间中，式(7.4.1)和(7.4.2)的能量分量满足

$$\Delta E = E_2 - E_1 = h\nu = \hbar\bar{\omega} \tag{7.5.1}$$

式(7.5.1)为微观客体的能级跃迁公式，$\nu = \frac{c}{\lambda}$ 和 $\bar{\omega} = 2\pi\nu$ 分别为吸收或放出光量子的频率和圆频率。E_1、E_2 为实物粒子在跃迁前后所具有的两个不同的能级，或 ΔE 表示实物粒子与光量子耦合时所对应的能量改变量。即能量是量子化的，这种量子化与 Minkowski 空间的分立结构有一种几何对应关系。式(7.5.1)将位于初态能级 E_1 的实物粒子通过吸收或放出光量子与末态能级 E_2 的实物粒子在 Minkowski 空间取得了因果联系。所以，可以从微观客体能级跃迁的角度刻画两实物粒子与光量子耦合的关系，并通过 Minkowski 空间的方向奇异性得到了几何诠释。

用式(7.5.1)可以解释 Einstein 的光电效应。设电子在金属中的能量为 E_1，当电子吸收光子后成为具有一定动能的自由电子，取能量为 E_2。达到 E_2 的电子需

要在 E_1 的基础上添加一部分用于克服金属表面势垒束缚而做的逸出功 W 和具有的动能 E_m。则 $E_2 = E_1 + W + E_m$ 代入式(7.5.1)，吸收光量子的能量为

$$h\nu = E_2 - E_1 = W + E_m \tag{7.5.2}$$

式(7.5.2)为 Einstein 光电效应方程。

式(7.5.1)也可以应用于氢原子，解释氢原子的 Rydberg 公式。氢原子所具有的能级特点为 $E_n = \frac{E_1}{n^2}$，$(n = 1,2,\cdots)$，$E_1 = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}$ 为基态能量。利用式(7.5.1) $h\nu = E_n - E_m$，$(n > m)$，有

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{E_n - E_m}{hc} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) = R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{7.5.3}$$

式(7.5.3)为 Rydberg 公式，可解释量子力学中的能级分立结构，也是 Einstein-de Broglie 关系(7.4.2)的实验验证。式(7.5.3)左边具有波的特征，右边的两谱项分别具有粒子特征。谱项之差具有分立结构的特性，引入 Minkowski 动量空间可用以表示类光区和类时区的几何联系，$h\nu \approx d$ 对应虚距空间 (H,d) 的虚距离。式(7.5.3)给出的能级谱项并不是线性的，这是因为在经典近似时粒子的动能为 $E = \frac{p^2}{2m}$，能量联系着动量的二次项使经典粒子产生了非线性特点。另外，经典近似时并没有考虑静能或静止质量的贡献，这使四维时空的对称性出现破缺。

式(7.4.1)和(7.4.2)的动量分量满足

$$\Delta p_x = p_{2x} - p_{1x} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\tilde{\omega}}{c} \tag{7.5.4}$$

式(7.5.4)中，λ 为光量子的波长，Δp_x 为相邻两个微观客体最小的动量间隔，即动量是量子化的。取光量子的动量为

$$p_c = mc = \frac{mc^2}{c} = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{7.5.5}$$

式(7.5.4)与(7.5.5)联立，有

$$p_c = m_c c = \Delta p_x = p_{2x} - p_{1x} = m_{2v}v_2 - m_{1v}v_1 \tag{7.5.6}$$

式(7.5.6)可解释电子吸收或放出光量子前后对应两个物理事件的动量差等于光量子的动量。显然，Minkowski 四维动量空间将电子的动量和光量子的动量联系起来，式(7.5.6)是它们在二维时空的几何表达式。我们试图对式(7.5.6)作出这样的解释，电子吸收或放出光量子，其动量发生了改变，动量差与光量子动量的联系说明电子的波粒二象性与光量子具有一种辩证统一关系，即有静质量实物粒子的波动性与光量子的粒子性是具有内在关联的矛盾统一体。

Einstein-de Broglie 关系式(7.4.2)的能量和动量在四维时空是有几何对应的，是由四维能量动量间隔等于零而决定的。电子的能量和动量分别作为四维动量复函数的实部和虚部，结合在一起才能表现整体的运动行为和变化性质。电子

与光子的能量交换必然引起动量的改变，能量守恒对应着动量守恒，分立的能量也对应分立的动量，它们相互关联构成了一个四维统一体。在经典量子力学中往往将电离后的电子动量看做是连续的，这主要是因为 Schrödinger 方程只考虑了电子的动能，没有考虑电子的静能，也没有考虑相对论效应和几何关联。电子在真空的四维背景中运动，与电磁场相互作用，吸收或放出光量子，电子的能量和动量均发生了突变。但动量改变量 $\Delta p = \frac{\Delta E}{c}$，从量值上远小于 ΔE，所以在一定条件下将粒子的动量看做是连续的并不影响问题的讨论。

能量和动量守恒与电子本身的运动状态无关，无论是高速运动还是低速运动的电子在吸收或放出光子时能量和动量均发生了改变，其改变量 $\Delta p = \frac{\Delta E}{c}$ 与耦合的光子动量 $p_c = \frac{E_c}{c}$ 相等。电子动量改变量为 $\Delta p = p - p_0 = p_c = m_c c = \frac{h}{\lambda}$，当 $p \gg p_0$ 时，如不考虑电子的初始动量，满足 $\Delta p = p - p_0 \approx p$，与传统的 Einstein-de Broglie 关系相对应。在 Davisson-Germer 实验和 G. P. Thomson 实验中都为类似情况。因此可以将 de Broglie 关系式(7.3.2)看做是修改后 Einstein-de Broglie 关系式(7.4.2)的一种特例，但所表现的波动性是实物粒子与光量子耦合的结果，而不能解释为实物粒子本身的特性。

7.6　量子干涉的几何背景

式(7.1.1)是 Minkowski 复空间类时区与类光区的关联式，在位型空间中，式(7.1.1)的分量形式可写成

$$c(t_2 - t_1) = (x_2 - x_1) = d \tag{7.6.1}$$

其中 d 为虚距离。式(7.6.1)可分别写作

$$c\Delta t = c(t_2 - t_1) = d \tag{7.6.2}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = d \tag{7.6.3}$$

式(7.6.2)和(7.6.3)具有不同的物理解释。式(7.6.2)可看做类光区 Ξ 对应的关系式，ct_1 和 ct_2 分别为类光区中光信号所对应的两物理事件的光程(如光的双缝干涉)，$c\Delta t = d$ 为光程差。如将式(7.6.2)看做光的干涉方程，取 d 为分立值，当 $d = 2n\frac{\lambda}{2}$，$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为干涉的明条纹，$d = (2n-1)\frac{\lambda}{2}$，$(n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为暗条纹。式(7.6.3)可看做类时区中实物粒子跃迁前后空间的位置间隔。d 取分立值，说明了实物粒子跃迁具有分立性质，并与耦合光量子的干涉条件具有内在关联。如果说式(7.1.1)刻画了类时区与类光区的几何关联，则式(7.6.2)是式(7.1.1)的时间分量，可看做光量子在位型空间中的干涉条件。式(7.6.3)为式

(7.1.1)的空间分量，x_2、x_1 分别对应类时区 C 中两实物粒子的空间位置，具有粒子特征。$\Delta x = d$ 为空间位置差值或空间距离，说明实物粒子在与光量子耦合中也具有了波动性。将式(7.6.2)和(7.6.3)联合起来对应式(7.6.1)，从几何上是类时区与类光区相互关联的表达式，物理上描述了实物粒子与光量子耦合的关系。这时实物粒子不再是孤立的客体，而是与光量子所对应的真空形成一个具有相互关联的统一体。在这个辩证统一体中，粒子通过吸收或放出光量子与场乃至真空进行质量和能量的转换，或通过真空所传递的光信号使实物粒子之间进行因果联系。其实，在粒子与场的耦合中出现的质量改变或质量间隙就是实物粒子与真空发生质能转换的产物，在后续章节中陆续讨论这个问题。实物粒子在这种真空的背景下，通过与光量子相互作用和转变关系而具有了波动性，这是修正后 Einstein-de Broglie 关系式(7.4.2)赋予的几何解释。

利用式(7.6.1)可以解释电子的双缝干涉实验。电子可以从双缝的任一缝中通过，通过双缝前后的电子在运行过程中频繁地与光发生耦合。取 (x_1, ct_1) 和 (x_2, ct_2) 为某电子吸收或放出光量子前后的两物理事件，并与四维时空中两几何点相对应。两个事件通过实物粒子与光信号的相互作用表现了波粒二象性，d 取分立值，刻画了电子与光耦合的相干线度，整个空间对应不同的分立取值，使电子通过交换光量子而产生干涉现象，表现了实物粒子的波动性。对光量子来讲，当 $d = 2n\dfrac{\lambda}{2}$，$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，为双缝干涉明纹方程条件，有

$$c\Delta t = ct_2 - ct_1 = l\sin\theta = n\lambda_c, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{7.6.4}$$

$d = (2n-1)\dfrac{\lambda}{2}$，$(n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时为暗条纹，方程为

$$c\Delta t = ct_2 - ct_1 = l\sin\theta = (2n-1)\frac{\lambda}{2}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{7.6.5}$$

其中，$c\Delta t = ct_2 - ct_1$ 为光程差，l 为双缝间距，θ 为干涉条纹的方位角。

当电子通过双缝时，考虑到电子本身具有一定的运动动量，参照式(7.6.4)和(7.6.5)可写成电子与光子耦合的双缝干涉方程，明纹公式为

$$\Delta x = c\Delta t = l\sin\theta = n\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{7.6.6}$$

暗纹公式为

$$\Delta x = c\Delta t = l\sin\theta = (2n-1)\frac{\lambda}{2}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{7.6.7}$$

M. Born 对 de Broglie 波提出了统计诠释，认为实物粒子的波是一种概率波，电子的干涉或衍射条纹表示电子在屏幕上各处出现的概率不同。明纹处电子出现的概率较大，电子分布较密集；暗纹处电子出现的概率小，电子分布稀疏。式(7.6.6)和(7.6.7)为电子和光子耦合通过双缝时所对应的明、暗纹公式。用 Δp 表示电子吸收或放出光量子时的动量改变量，p 表示电子本身运动所具有动量，Δp 与 p 的叠

加使电子在屏幕上各处出现的概率不同，表现了明纹处电子出现的概率大于暗纹处的概率，从而呈现了多电子的干涉或衍射条纹。即通过某狭缝的电子由于吸收或放出光量子共同满足式(7.6.1)，才形成了多电子的干涉条纹。

电子的干涉实验说明对微观粒子不能看成一个独立的客体，微观粒子的物质性和运动规律与真空背景有关，微观粒子通过吸收或放出光量子发生质量和能量的转换并与场乃至真空背景形成了一个辩证统一体。微观粒子的波动性是通过与光量子的耦合中表现出来的，同时光在与微观粒子耦合时表现为粒子性。讨论电子的运动行为抛开电子与光量子的耦合是不客观的，电子在真空的背景下表现的波动性是物质两种不同物态之间相互耦合的客观规律。在电子的杨氏双缝实验中，即使电子是一个一个地通过双缝(电子本身只能通过某个单缝)，它们在屏幕上形成的干涉条纹既不是电子本身在双缝处的相干叠加，也不能仅仅看做是电子的单方面行为和性质，而是电子在运行过程中通过放出或吸收的光量子形成相干光，再与电子耦合调剂了电子的动量分布，即电子与真空中虚光子耦合形成了干涉条纹。

在量子力学中对微观客体的描述不同于传统物理对宏观客体的描述。宏观客体质量和能量分别守恒，对宏观客体的运动行为在距离空间可进行因果描述。微观客体通过吸收或放出光量子其质量和能量发生了转换，微观客体的物质性也发生改变。这时抛开耦合的光量子单独描述实物客体是不能给出因果解释的，也是不完备的。量子力学的因果解释必须将实物粒子与光量子或场综合考虑，通过Minkowski 空间抽象出的拟距离和虚距离可以共同给出一个统一的因果表述。

7.7　不确定关系的因果表述

1. 不确定关系的传统解释

不确定关系式是量子力学的基本原理，是微观理论基本思想的重要支柱，它与微观客体的波粒二象性存在内在关联。不确定关系的一维形式为

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant h \tag{7.7.1}$$

$$\Delta t \Delta E \geqslant h \tag{7.7.2}$$

式(7.7.1)中 Δx 和 Δp_x 分别是微观客体在 x 轴方向位置和动量的差值，式(7.7.2)中 Δt 和 ΔE 分别为时间和能量的差值。对于不确定关系式(7.7.1)的传统解释为，微观粒子的位置和动量不能同时具有完全确定的值，它是物质波粒二象性的反映。这个解释包括两层含义，其中，“位置和动量不能同时确定”是 Heisenberg 的观点。在量子力学建立初期，Heisenberg 在《测不准关系的由来》一文中介绍了不确定关系的思想渊源，论述道：“测不准原理指的是关于量子论处理的各种

的同时数值可能有当前知识的不确定程度；它并不限制，例如，单独一个位置量或者单独一个速度测量的准确性。因此，假设一个自由电子的速度精确地知道了，而其位置则完全不知道。那么，这个原理就说明，随后做出的每个位置观察都要改变这个电子的动量，改变多少不得而知、不能确定，使试验做出后我们关于电子运动的知识受到测不准关系限制”。其次，物质的波粒二象性为 Boer 的主要思想。在此思想中，粒子不再具有分别被很好定义且能被同时观测的位置和速度，而代之以位置和速度的结合物的量子态，这种结合物是粒子和波形成的互补关系。Boer 的互补关系还包含了测量对测量对象的影响因素，使不确定关系添加了受到仪器的不可控制和测量对客体的干扰。

对于时间和能量的不确定关系式(7.7.2)，其内涵解释的争论更甚一些。因为时间作为一个外部参量没有守恒量相对应，使式(7.7.2)与(7.7.1)具有不相同的地位。Heisenberg 最初通过 Stern-Gerlach 实验描述原子穿过偏转场所需的时间 Δt 越长，能量的不确定性 ΔE 越小。Boer 认为时间和能量在原子层次具有不可兼容性，而两者的结合又满足互补性，并与测量环境有关。Lahldy 和 Peierls 认为，时间和能量的不确定关系是把两个不同时刻的可以精确测量的能量值之间的差值，同这两个时刻之间的时间间隔联系起来。Mandelstam 和 Tamm 将时间看做力学量变化的物理量，意识到在能量的弥散同力学变量的时间变化之间存在相互关联，而时间和能量的不确定关系是对此相关联的定量表述。

综上所述，不确定关系的传统解释具有的共同特点，是将微观粒子作为一个孤立客体，其位置、动量、时间及能量都带有经典物理的色彩，没有相应的数学解释和几何对应，希望不确定关系在引入 Minkowski 复空间中给出一个全面而合理的解释。

2. 不确定关系与因果性质

不确定关系是微观理论所特有的物理规律，应该表征微观物体的客观属性。微观客体具有的两种物态形式是一个辩证统一体，不确定关系从量子力学基本原理的角度，物理诠释的对象应包含有静止质量的实物粒子和光量子。注意到式(7.4.1)，可由式(7.7.2)写为

$$\Delta t \Delta E = c\Delta t \frac{\Delta E}{c} = c\Delta t p_c = c\Delta t m_c c = c\Delta t \frac{h}{\lambda_c} \tag{7.7.3}$$

将式(7.7.3)与(7.7.2)联立，有关系：

$$c\Delta t = x_c \geqslant \lambda_c \tag{7.7.4}$$

$c\Delta t = x_c$ 为光子运行的空间距离，在一个周期中，$c\Delta t = \lambda_c$，表示光子运行了一个波长。因此式(7.7.2)可看成是光子所满足的不确定关系。一般情况，取分立公式

$$c\Delta t = k\lambda_c, \quad k = 1,2,\cdots \tag{7.7.5}$$

如果将式(7.7.1)看做自由电子所对应的不确定关系,可将式(7.7.1)和(7.7.2)联合解释为电子与光子耦合的一个因果过程。不确定关系式(7.7.1)解释为,当电子在吸收或放出一个完整的光子的前后,电子的动量改变了 $\Delta p_x = \frac{h}{\lambda_c}$,光量子作为一个整体在空间运行的最小线度应为一个完整波长 $\Delta x = \lambda_c$;不确定关系式(7.7.2)可解释为,被吸收或放出光子的空间间隔为一个完整的波长 $c\Delta t = \lambda_c$ 时,光子的动量等于电子的动量改变量,有关系:$p_c = m_c c = \Delta p_x = \frac{\Delta E}{c}$,电子与光子耦合共同完成了一个质能转变的因果过程 $\Delta mc^2 = m_c c^2$。一般情况下,空间间隔 Δx 可看做用光信号联系的实物粒子所对应的两个物理事件,电子和光子共同遵守的不确定关系可写为

$$\Delta x \Delta p_x = \Delta t \Delta E \geqslant h \tag{7.7.6}$$

注意到式(7.7.4),有关系:

$$\Delta t \geqslant \frac{\lambda_c}{c} = \frac{1}{\nu_c} \tag{7.7.7}$$

式(7.7.7)说明,时间间隔是量子化的,时间参量 Δt 的最小单位可以作为一个时间周期,用以描述光量子运行一个空间周期时的时间间隔,与真空或光量子的性质有关。在微观理论中,要考虑实物粒子与光耦合的因果效应和弛豫过程,同时性和同时测量就没有物理意义。

3. *不确定关系的四维解释*

不确定关系应该在四维空间进行因果解释。Minkowski 复空间中,一般情况取四维坐标空间 $H(ct, \mathrm{j}\vec{r})$ 和四维动量空间 $H\left(\frac{E}{c}, \mathrm{j}\vec{p}\right)$ 构成八维 μ 空间或相空间。作为特例取二维坐标空间 $H(ct, \mathrm{j}x)$ 和动量空间 $H\left(\frac{E}{c}, \mathrm{j}p_x\right)$ 构成四维超复平面 $H(X, P_x)$。式(7.1.2)和(7.1.4)分别是坐标空间和动量空间中两个类光事件的时空间隔和动量间隔,式(7.1.1)和(7.1.3)分别对应着位置空间和动量空间的零拟距离。复函数的内积算法满足关系式

$$X^* Y = \langle X, Y \rangle = \sum_{i,k=1}^{4} x_i^* y_k \tag{7.7.8}$$

其中 $\langle X$ 和 $Y\rangle$ 分别对应 Dirac 算符的左矢和右矢。式(7.7.8)的算法与式(7.1.6)相同,有内积关系:

$$\Delta P^* \Delta X = \Delta X^* \Delta P \approx \vartheta^* \theta = \theta^* \vartheta = 0 \tag{7.7.9}$$

式(7.7.9)为八维 Minkowski 空间类时区域的类光间隔,它包含了位型空间的时空间隔不变量和动量能量空间的动量间隔不变量。参照式(7.1.3)和(7.1.5),展

开式(7.7.9)有分量形式

$$(c\Delta t-\mathrm{j}\Delta x)\left(\frac{\Delta E}{c}+\mathrm{j}\Delta p_x\right)=(\Delta t\Delta E-\Delta x\Delta p_x)+\mathrm{j}\left(c\Delta t\Delta p_x-\Delta x\frac{\Delta E}{c}\right)=0 \tag{7.7.10}$$

注意到式(7.7.3),对式(7.7.10)可分写成

$$\Delta x\Delta p_x=\Delta t\Delta E=c\Delta t\Delta p_x=\frac{\Delta x\Delta E}{c}=kh \tag{7.7.11}$$

如取 $k=1,2,\cdots$, 则式(7.7.11)与(7.7.1)和(7.7.2)相对应,满足

$$\begin{cases}\Delta x\Delta p_x\geqslant h\\ \Delta t\Delta E\geqslant h\end{cases}$$

显然式(7.7.1)和(7.7.2)与双曲 Minkowski 空间的方向奇异性有关,式(7.7.9)中隐含了四维时空和四维动量的间隔不变量。

不确定关系在 Minkowski 复空间中导出说明它具有一个几何背景,物理性质可以通过几何背景的数学描述得以诠释。由于 Minkowski 复空间与双曲复变函数存在内在的逻辑关联,双曲复数的实部和虚部表示物质两种物态形式的辩证关系,可以预测不确定关系与复数性质乃至物质的两种物态都有因果关联。不确定关系不仅能描述孤立的微观实物粒子,也应该描述场或光量子以及实物客体与场的相互作用。类时区两物理事件的类光间隔描述了实物客体与场的耦合关系或实物粒子之间以光速取得的因果联系,满足式(7.7.11)的等量关系是对不确定关系给出了一个具有因果性质的物理解释。因此,不确定关系以广域 Hilbert 空间的分立结构为数学基础,可能会给量子论基本假设的微观解释带来新意。

八维双曲复空间 $H(ct,\mathrm{j}\vec{r})$ 和 $H\left(\frac{E}{c},\mathrm{j}\vec{p}\right)$ 中物理事件的类光间隔满足式(7.7.9),可以看做不确定关系的四维形式,称为四维确定关系式。即不确定关系式(7.7.1)和(7.7.2)只是四维关系式(7.7.9)的分量形式,是四维形式的影子。四维确定关系式对应着时空间隔等于零,就是距离空间的拟距离为零,表示物质的两种物态之间存在一种等量转换关系。这种等量关系通过式(7.7.11)的虚距离来定量表示,刻画了用光信号联系的两物理事件存在因果联系。两物理事件可以表示同一实物粒子吸收或放出光量子前后的时空间隔,也可表示用光信号联系的两个不同实物粒子的时空状态。$\Delta x=c\Delta t$,说明两事件时空位置的改变是用光信号来描述的,光量子的整体性要求虚距离为分立值。

式(7.7.2)可以写成

$$\Delta t\Delta E=(c\Delta t)(m_c c)=x_c p_c\geqslant h \tag{7.7.12}$$

为光量子对应的不确定关系式。当两物理事件用光信号取得联系时,式(7.7.1)和式(7.7.2)可改写为

$$\begin{cases}\Delta x\Delta p \geqslant h \\ x_c p_c \geqslant h\end{cases} \tag{7.7.13}$$

式(7.7.13)分别为实物粒子和光量子的不确定关系式，当微观粒子与光信号取得因果联系时，满足四维形式式(7.7.9)。对照不确定关系的传统解释，作几点说明：

(1) 不确定关系的四维形式为一种因果关系，是实物粒子和光量子相互耦合的因果表示。不确定关系的两种形式具有对等关系，表示实物粒子之间可以通过光信号进行联系并可进行客观测量。

(2) 光速为极限速度，考虑光传播的弛豫时间，则“同时性”和“同时测量”的概念没有意义，不会给出因果解释。

(3) 不确定关系是客观存在的规律，测量可能影响粒子和场的耦合结果，但人为的主观意识不能影响测量结果的客观性。

第八章　态函数的几何表述

ψ函数，又称波函数、态函数或几率幅，在量子力学中具有非常重要的地位。态函数（本书使用的名称）是粒子运动微分方程的重要组成部分，量子力学中许多重要物理内容都需要态函数的参与和诠释。1970年Dirac在一次讲话中说道："我相信，几率幅这个概念也许是量子理论的最基本的概念。"Feynman一贯主张几率幅是量子力学里最重要的基本概念。1961年他在概括量子力学的原理时强调："首先我们讨论量子力学的观念，这主要指几率幅的概念，其他的东西，多半是这一概念的结论。"态函数的解释也是众多科学家争论的焦点，它包括因果性与统计性，个体性与集体性的区别和联系。1936年Einstein就明确声言："ψ函数所描述的无论如何不能是单个系统的状态；它所涉及的是许多个体系，从统计力学的意义来说，就是'系综'。"对态函数的正确理解可能不仅仅局限在物理诠释上，更本质的东西是它的数学基础。将态函数与Minkowski复空间联系起来，利用四维间隔不变量导出态函数的虚指数形式可能对态函数量子诠释的理解具有革命性的改变。

8.1　Hilbert空间中微观客体的因果表述

Hilbert相空间是量子力学的数学基础，研究Hilbert相空间的分析性质和原空间的几何性质可能对态函数的几率诠释赋予一种新的因果表述。因为Minkowski空间具有方向奇异性，抽象出的包括类光区在内的广域Hilbert相空间与传统的Euclidean几何为原空间抽象出的Hilbert空间具有本质区别（参见第二十一章定义21.23中第二类广域Hilbert空间）。通过Minkowski空间的定向格式化，类时区与类光区取得了几何关联，无限维定向相格构成了广域Hilbert相空间，它包括四维时空坐标和四维动量坐标，通过格空间给出具有$8n$维分立结构。类时区中的粒子进行量子跃迁时与类光区的光量子取得因果联系，即实物粒子与光量子的耦合乃至实物粒子与电磁场的相互作用都可以通过Minkowski几何的时空性质以及广域Hilbert相空间的分立结构进行描述。

将广域Hilbert相空间作为量子力学的数学基础，可以对微观客体对应的态函数几率密度给出具有因果性质的量子诠释。在Minkowski复空间的类时区利用平行或垂直类光区的世界线将实物粒子的量子跃迁与光量子联系起来，即实物粒子与光量子耦合过程中，实物粒子在吸收或放出光量子前后可用广域Hilbert相空间中不同的非质点相格来表示。反之，类光区的光量子可以通过类时区中两

个实物粒子沿特定方位的非质点相格的联系进行几何描述。在量子力学中，如果将相空间中每一个非质点相格与粒子的本征态相对应，则类时区与类光区相联系的不同非质点相格可分别表示粒子跃迁前后的时空状态，量子跃迁对应粒子本征态的变换就具有了一个几何背景，而通过几何空间表述粒子态函数的几率诠释也就具有了量子个体的因果性质。实物粒子不同的量子态与光量子取得联系，使描述实物粒子的运动不再是孤立行为，所对应的运动方程也不再是孤立粒子的运动方程。也就是说，以态函数为重要组成部分的 Schrödinger 方程和 Dirac 方程等都隐含了实物粒子与类光粒子（光量子、中微子等）的耦合性质，隐含了 Minkowski 空间的几何背景。实物粒子在与类光粒子耦合过程中，能量、动量、质量以及坐标位置等物理量都要发生突变，这种突变建立了实物粒子与光量子相互转变的等量关系。微观客体本征函数的突变和分立性质可用广域 Hilbert 相空间中不同的非质点相格来描述，即广域 Hilbert 相空间为量子力学中微观客体的不同本征态、本征函数和本征能量等分立结构提供了一个完备的数学基础。

广域 Hilbert 相空间的完备性突出了传统 Hilbert 相空间对量子描述的不完备性质。态函数几率诠释在传统的量子力学中为什么不能体现因果性质呢？因为传统的 Hilbert 相空间是由 Euclidean 几何抽象出来的，它的分析性质应该与 Euclidean 空间的几何性质保持内在的逻辑联系。由于 Euclidean 空间缺少类光区，光量子没有对应区域就不可能给出光量子以及光量子与实物粒子耦合的几何联系。不能利用几何关系描述这种分立结构中实物粒子与光量子相互转变的等量关系，表示微观客体的非质点相格之间相互孤立，描述微观客体运动行为的物理规律就不能得到合理的解释和表述。因此，数学工具的局限性屏蔽了实物粒子与光量子取得因果联系的物理过程和客观规律。描述微观理论的几何关系和分析性质出现瑕疵，就不能说它所对应的数学理论是完备的，当然以这种理论为基础的量子力学的完备性也应受到质疑。因此，量子力学的数学基础不完备是粒子态函数没有给出因果解释的根本原因。

8.2　四维间隔不变量和不确定关系

传统态函数存在瑕疵是由于数学工具和物理思辩的局限性造成的。量子力学的基本原理可以与 Minkowski 复空间的时空奇异性联系起来，这种数学和物理理论的辩证关联可以赋予量子力学具有因果性质的微观诠释。考虑传统习惯，本章在分析两类复数共性和个性的基础上，在 Minkowski 空间继续沿用椭圆复数 $\mathrm{i}(\mathrm{i}^2=1,\mathrm{i}^*=-\mathrm{i})$ 来描述态函数。在二维 Minkowski 空间类时区的时空平面取两时空点或两物理事件 $X_1(ct_1,\mathrm{i}x_1)$ 和 $X_2(ct_2,\mathrm{i}x_2)$，当两个物理事件用光信号取得因果联系时，其连线平行或垂直类光区。由关系式(7.1.1)，可对应写为

$$\Delta X(c\Delta t, \mathrm{i}\Delta x) = X_2 - X_1 = d\theta_0 \tag{8.2.1}$$

时空间隔不变量取乘法缩并形式

$$\Delta X \Delta X = (X_2 - X_1)(X_2 - X_1) = d^2\theta_0\theta_0 = 0 \tag{8.2.2}$$

同理，在二维 Minkowski 动量空间类时区中，取 $P_1\left(\frac{E_1}{c}, \mathrm{i}p_{1x}\right)$ 和 $P_2\left(\frac{E_2}{c}, \mathrm{i}p_{2x}\right)$ 的连线平行或垂直类光区，有关系：

$$\Delta P\left(\frac{\Delta E}{c}, i\Delta p_x\right) = P_2 - P_1 = d'\vartheta_0 \tag{8.2.3}$$

将式(8.2.3)取乘积缩并，有

$$\Delta P \Delta P = \left(\frac{\Delta E}{c}\right)^2 - (\Delta p)^2 = d'^2\vartheta_0\vartheta_0 = 0 \tag{8.2.4}$$

在分立相空间的类时区中将式(8.2.2)和(8.2.4)联立，得

$$(\Delta X \Delta X)(\Delta P \Delta P) = (\Delta X \Delta P)(\Delta P \Delta X) = 0 \tag{8.2.5}$$

由于式(8.2.1)和(8.2.3)中复数 ΔX 和 ΔP 的实部和虚部均相等，可以取

$$\Delta X \Delta P = \Delta P \Delta X = dd'\theta_0\vartheta_0 = 0 \tag{8.2.6}$$

式(8.2.6)看做八维 Minkowski 相空间的间隔不变量，其中包含了四维坐标的零间隔和四维动量的零间隔。取乘积缩并的算法展成分量形式：

$$XY = \langle X, Y \rangle = \sum_{n=1}^{4} x_n y_n \tag{8.2.7}$$

则式(8.2.6)可以写成乘积缩并形式：

$$\Delta X(c\Delta t, \mathrm{i}\Delta x)\Delta P\left(\frac{\Delta E}{c}, \mathrm{i}\Delta p\right) = \Delta t \Delta E - \Delta x \Delta p = 0 \tag{8.2.8}$$

式(8.2.8)可看做式(7.7.1)和(7.7.2)相减的结果，这建立了两个不确定关系的等量联系，说明量子力学中三维不确定关系在四维时空可能具有确定的几何诠释。将式(8.2.8)写成分立形式：

$$\Delta t \Delta E = \Delta x \Delta p = nh, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{8.2.9}$$

注意到式(7.7.1)和(7.7.2)电子和光子共同遵守的不确定关系，式(8.2.9)满足

$$\Delta x \Delta p = \Delta t \Delta E \geqslant h \tag{8.2.10}$$

式(8.2.8)、(8.2.9)和(8.2.10)在三维空间具有量子客体的分立特征，四维时空中对应时空间隔不变量。即四维空间的零间隔包含了微观实物粒子与光量子耦合的等量转化关系，包含了坐标动量的不确定关系和时间能量不确定关系。反之，正是由于式(8.2.9)和(8.2.10)这种不确定关系和分立结构才使得微观客体所对应的各个非质点相格在 Minkowski 相空间中取得因果联系，可以刻画实物粒子与光量子耦合的因果性质和几何性质。

式(8.2.9)和(8.2.10)为量子物理提供了重要的理论信息，一方面在 Minkowski 八维相空间中，时空间隔不变量和能量动量间隔不变量对应 $\Delta X \Delta P = 0$

时，表现了 Minkowski 空间类时区与类光区相互关联的时空特征，也是微观客体与光量子取得联系的重要标志。其次，在广域 Hilbert 相空间中，每一个微观客体相对于一个时空相格，这种时空相格的三维空间分量为 $\Delta\vec{r}=\Delta x\vec{e}_1+\Delta y\vec{e}_2+\Delta z\vec{e}_3$，三维动量分量为 $\Delta\vec{p}=\Delta p_x\vec{e}_1+\Delta p_y\vec{e}_2+\Delta p_z\vec{e}_3$；它们的一维时间分量为 $c\Delta t$ 和一维能量分量为 $\frac{\Delta E}{c}$。式(7.7.1)和(7.7.2)两个不确定关系纳入四维时空的确定关系式(8.2.8)和(8.2.10)，建立了与非欧几何相联系的因果性质，拓宽了量子解释的理论范畴。微观客体与光量子的相互作用是自然规律，是力学和电磁学相结合的物理过程，不管是否测量，怎样测量，实物粒子与光量子的耦合是客观的，是第一性的，不以人的意志为转移。

8.3　间隔不变量与本征函数的几何关联

式(8.2.8)中取 $\Delta x=x-x'$，$\Delta t=t-t'$，由式(7.4.1)和(7.4.2)分别有 $\Delta p=\frac{h}{\lambda}$ 和 $\Delta E=h\nu=\hbar\bar{\omega}$，取 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ 为波数，注意到式(8.2.9)，有关系：

$$(\Delta x\Delta p-\Delta t\Delta E)=\hbar(k\Delta x-\bar{\omega}\Delta t)=\hbar(kx-t\bar{\omega})-\hbar(kx'-\bar{\omega}t') \tag{8.3.1}$$

对式(8.2.8)乘因子 $\frac{\mathrm{i}}{\hbar}$，有

$$\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\Delta X\Delta P=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\Delta t\Delta E-\Delta x\Delta p)=\mathrm{i}(\bar{\omega}\Delta t-k\Delta x)=0 \tag{8.3.2}$$

对式(8.3.2)取指数运算，注意到式(8.3.1)，有关系：

$$\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\Delta X\Delta P}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\bar{\omega}t)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx'-\bar{\omega}t')}=1 \tag{8.3.3}$$

令

$$\begin{cases}\varphi(x,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\bar{\omega}t)}\\ \varphi'^{*}(x',t')=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx'-\bar{\omega}t')}\end{cases} \tag{8.3.4}$$

由式(8.3.3)和(8.3.4)，可以写为

$$\varphi_m'^{*}(x',t')\varphi_n(x,t)=\delta_{mn} \tag{8.3.5}$$

式(8.3.5)中 δ_{mn} 为 Dirac　δ 函数。式(8.2.8)是八维 Minkowski 空间类时区域中的类光间隔不变量，式(8.3.5)由式(8.2.8)导出，应该具有相应的数学严密性。将一个微观客体的本征态对应于一个时空相格，命名式(8.3.3)和(8.3.4)为微观粒子的本征态函数，而式(8.3.5)为它们的封闭性条件。本征函数的虚指数中包含了 Minkowski 空间类时区域中类光间隔的不变量，本征函数几率诠释的正交归一表示了实物粒子与光量子耦合的因果关联。

由式(8.2.9)和(8.3.1)，取

$$\Delta x\Delta p=\Delta t\Delta E=\hbar k\Delta x=\hbar\tilde{\omega}\Delta t=n\hbar,\quad n=1,2,\cdots \tag{8.3.6}$$

或

$$\begin{aligned}kx&=kx'+n\\kct&=kct'+n\end{aligned} \tag{8.3.7}$$

由于 e^{in} 和 e^{-in} 的乘积可在虚指数的相位因子中归一，所以式(8.3.4)和(8.3.5)中 x 和 x' 可以相互转换。将式(8.3.7)代入式(8.3.3)消去时间因子，则定态本征函数满足关系：

$$\varphi_n(x)^*\varphi_n(x)=1 \tag{8.3.8}$$

式(8.3.8)可看做是本征态函数几率诠释的归一化，它是式(8.3.5)的特例，可以将式(8.3.5)和(8.3.8)用 Diarc　δ 函数表示：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m^*(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\delta_{mn} \tag{8.3.9}$$

式(8.3.9)是与 Minkowski 空间的时空性质有关的因果关系式，它表示广域 Hilbert 相空间中的非质点相格与微观客体分立的本征函数和本征状态相对应。当本征状态之间可以用光信号取得联系时，时空间隔和能量动量间隔等于零，对应本征函数的内积是归一的。当本征状态之间没有因果联系时本征函数之间是正交的，内积等于零。

式(8.2.8)和(8.3.1)也可以展开成

$$\begin{aligned}&(\Delta x\Delta p-\Delta t\Delta E)=(x-x')(p-p')-(t-t')(E-E')\\&=(xp-xp')-(x'p-x'p')-(tE-tE')-(t'E'-t'E)=0\end{aligned}$$

或

$$(xp-tE)-(x'p-t'E)=(xp'-tE')-(x'p'-t'E') \tag{8.3.10}$$

由式(8.3.10)等式左边将式(8.3.4)改写成

$$\begin{cases}\varphi(x,t)=A\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(xp-Et)}=A\varphi(x)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et}\\\varphi^*(x',t')=A'^*\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(x'p-Et')}=A'^*\varphi^*(x')\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et'}\end{cases} \tag{8.3.11}$$

如式(8.3.10)右边作为式(8.3.11)的指数，其中

$$A=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(xp'-tE')},A'^*=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(x'p'-t'E')} \tag{8.3.12}$$

在态函数的几率诠释中也满足归一化条件。

式(8.3.10)也可改写成

$$(xp-tE)-(xp'-tE')=(x'p-t'E)-(x'p'-t'E') \tag{8.3.13}$$

式(8.3.13)左边的指数形式可写成

$$\begin{cases}\varphi(p,E)=B\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(xp-Et)}=B\varphi(p)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et}\\\varphi^*(p',E')=B'^*\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(xp'-E't)}=B'\varphi^*(p')\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E't}\end{cases} \tag{8.3.14}$$

其中，B、B' 为式(8.3.14)中态函数的相位因子，是式(8.3.13)右边的指数形式，类同于式(8.3.12)。有关系：

$$B = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(x'p-t'E)},B'^{*} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(x'p'-t'E')} \tag{8.3.15}$$

一般情况下，以 Minkowski 空间为原空间，可抽象出 $8n$ 维广域 Hilbert 相空间，构成整个四维时空坐标空间和四维动量空间的分立结构。每一个八维相格对应一个微观粒子的量子态，第 i 个量子态的本征函数用 φ_i 表示，所有粒子的本征函数形成广域 Hilbert 相空间的一个无限维基矢 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\cdots$，构成一个完全集。将态函数 $\psi(x,t)$ 看做是本征态完全集 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\cdots$ 的线性组合：

$$\psi(x,t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x,t) \tag{8.3.16}$$

满足归一化条件

$$\int\psi^{*}(x,t)\psi(x,t)\mathrm{d}x = 1 \tag{8.3.17}$$

式(8.3.17)虽然与传统量子力学中的微观客体的几率态函数具有相同的形式，但其内涵却有本质上的差异。它们之中包含了 Minkowski 复空间的时空间隔不变量和能量动量间隔不变量，也包含了微观客体与光量子的耦合，这赋予了微观客体具有丰富而合理的微观诠释，为经典量子力学纳入 Minkowski 空间这种非欧几何以及揭示量子力学与相对论的相互关联打开了一个突破口。

8.4　态函数的个体决定性和整体统计性

在量子力学中，Born 对态函数的几率诠释具有权威性，他把 $|\psi|^2$ 称为几率密度，对态函数给出了具有统计意义的解释。Born 认为，量子力学所对应的微观客体力学体系，主要依据两个量子效应：(1) 不确定关系；(2) 态函数的几率干涉。经典力学的传统形式应该用一个统计的方法来代替，对任何坐标 x、速度 v、时刻 t 都存在着一个几率密度 $\rho(x,v,t)$，这使我们不能从初始状态计算出准会发生什么，粒子碰撞的结果是怎样。这意味着，解释只能是统计性的，于是 Born 提出必须放弃个体的决定论的观点。对于 Born 的解释，有它正确的一面，也有局限性的一面，关键是传统的量子力学的数学基础存在缺陷，使其不能正确地描述微观客体与光量子的耦合。在量子力学中引入广域 Hilbert 相空间，实物粒子与光量子的相互作用可以通过时空的几何化和泛函分析进行数学表述。Minkowski 空间类时区与类光区的时空关联对实物粒子和光量子耦合给出具有因果性质的几何描述，可能会对态函数的几率诠释给出一种新的因果解释。Born 依据的两个量子效应“不确定关系”和“态函数的几率干涉”，在广域 Hilbert 相空间实质上都对应着一种个体决定论的解释。

广域 Hilbert 相空间中微观客体所对应的非质点相格不再相互孤立，它们通过 Minkowski 空间的方向奇异性得到了因果联系。微观客体的量子跃迁伴随着吸收或放出光量子，这与 Minkowski 类时空间的类光间隔相对应，与本征态函数的几率诠释相对应。当某个微观客体由一个本征态跃迁到另一个本征态时放出或吸收一个光量子，对应的坐标时空间隔和动量能量间隔均为零，由式(8.2.2)和(8.2.4)复数的实部和虚部相等。如果用 Δx 表示两本征态的空间间隔，Δt 表示量子跃迁时吸收或放出光量子的时间间隔，则 $\Delta x = c\Delta t$ 为光量子与实物粒子耦合进行量子跃迁时粒子本征态发生改变的因果关系式。对 $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$，如取 $\Delta x \sim 10^{-10}\mathrm{m}$ 相当于原子线度，则 $\Delta t \sim 10^{-18}\mathrm{s}$，微观客体的量子跃迁是瞬间完成的，这种瞬间的弛豫效果在光电效应中具有合理的解释。短时间内的量子跃迁涉及 Minkowski 复空间两个不同的时空相格，使微观客体的分立性和因果性通过几何性质刻画出来。但粒子这种分立性和因果性恰恰利用了不确定关系(8.2.8)和(8.2.9)，这否认了 Born 的观点，认为不确定关系是造成不能准确计算微观客体运动行为的原因。因为三维不确定关系作为四维的分量形式具有局限性，在 $8n$ 维广域 Hilbert 相空间中，式(7.7.1)和(7.7.2)的四维联合效果使式(8.2.8)具有了一种确定关系，能够给出一个因果解释。

动量能量间隔等于零，满足 $\Delta p = \frac{\Delta E}{c} = p_c$，实物粒子跃迁前后动量的改变量 Δp 等于放出或吸收光量子的动量 p_c，满足动量守恒定理。这样由式(8.3.9)给出的正交归一条件就可赋予一种因果解释。$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m^*(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = 1$，说明本征态 m 和 n 之间通过粒子的跃迁与吸收或放出的光量子发生了因果联系，具有个体决定性；而 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m^*(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = 0$，表示本征态 m 和 n 之间不具有因果联系，是相互正交的，因此，式(8.3.9)可以是单个粒子本征态函数具有因果性质的封闭性表示。需要说明的是，式(8.3.9)虽然可以表示单个微观客体的运动规律，但与传统理论不同的是，微观客体本身不是孤立的，在与光量子亦即场的耦合中决定了粒子跃迁的因果性质和时空位置，决定了粒子与光量子的分立性和客观性，也决定了粒子本征态函数的几率诠释。

其次讨论态函数几率诠释的统计性，Born 对态函数统计意义的解释应该体现在态函数完全集的几率诠释中。式(8.3.16)所对应的态函数 $\psi(x,t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x,t)$ 为本征态函数完全集 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$ 的线性组合。所有微观客体处于本征态的概率分别为 $|c_1|^2, |c_2|^2, \cdots, |c_n|^2, \cdots$。粒子在整个空间出现的概率应该满足归

一化条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m^*(x,t)\psi_n(x,t)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}c_m^*c_n\varphi_m^*\varphi_n\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}c_m^*c_n\delta_{mn}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}|c|^2\mathrm{d}x=1$$

(8.4.1)

在时刻 t、(x,y,z) 点附近，体积元 $\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 内找到粒子的概率为

$$\mathrm{d}W(x,y,z,t)=|\psi(x,y,z,t)|^2\mathrm{d}\tau \tag{8.4.2}$$

如果任意一个态函数 $\psi(\vec{r},t)$ 都可看做是各种不同动量的本征态函数的叠加，取

$$\psi(\vec{r},t)=\iiint_{\infty}c(\vec{p},t)\varphi_p(\vec{r})\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z \tag{8.4.3}$$

式中，取归一化的动量本征态函数

$$\varphi_p(\vec{r})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}} \tag{8.4.4}$$

式(8.4.3)可写作

$$\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\iiint_{\infty}c(\vec{p},t)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z \tag{8.4.5}$$

利用 Fourier 变换可给出

$$c(\vec{p},t)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\iiint_{\infty}\psi(\vec{r},t)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{8.4.6}$$

对式(8.4.5)而言，$|\psi(\vec{r},t)|^2$ 是粒子 t 时刻在 r 处的概率密度，而 $|c(\vec{p},t)|^2$ 是粒子 t 时刻具有动量 p 的概率密度。

从一般态函数或本征态函数完全集的角度，态函数的概率 $|\psi(\vec{r},t)|^2$ 具有统计意义。这种态函数完全集的统计规律是建立在本征态函数因果规律之上的，它描述了本征态之间的量子跃迁的可能分布，具有辩证统一的逻辑关系。粒子处于哪个本征态，或哪个本征态可能发现粒子的概率应该满足一定的统计规律，但粒子从一个本征态到另一个本征态的跃迁却遵守着一定的因果规律，具有因果性的 $|\varphi_n(\vec{r},t)|^2$ 包含在具有概率性的 $|\psi(\vec{r},t)|^2$ 中，因此，量子理论应该是具有包含因果性质的统计规律。

8.5　电子双缝衍射的因果性和统计性

为了给出电子双缝衍射的物理诠释，从两方面分析它可能具有的内涵，最后综合考虑态函数的因果性和统计性。首先从分析光的波动方程入手，比较光的叠加和电子衍射的可能联系。在光的双缝干涉中取通过双缝的两列相干光的波动方程为

$$\begin{cases} A_1 = A_{10}\cos(\bar{\omega}t_1 - kx_1) \\ A_2 = A_{20}\cos(\bar{\omega}t_2 - kx_2) \end{cases} \tag{8.5.1}$$

式(8.5.1)的相干叠加为

$$A^2 = A_{10}^2 + A_{20}^2 + 2A_{10}A_{20}\cos(\bar{\omega}\Delta t - k\Delta x) \tag{8.5.2}$$

可以设想有一微观粒子(如电子)在通过双缝时与式(8.5.1)和(8.5.2)的相干光有联系。这个电子通过双缝时与相干光耦合满足关系:

$$\begin{cases} B_1 = B_{10}\sin(\bar{\omega}t_1 - kx_1) \\ B_2 = B_{20}\sin(\bar{\omega}t_2 - kx_2) \end{cases} \tag{8.5.3}$$

对应相干叠加为

$$B^2 = B_{10}^2 + B_{20}^2 + 2B_{10}B_{20}\sin(\bar{\omega}\Delta t - k\Delta x) \tag{8.5.4}$$

由式(8.5.2)和(8.5.4),有

$$\cos(\bar{\omega}\Delta t - k\Delta x) = \frac{A^2 - A_{10}^2 - A_{20}^2}{2A_{10}A_{20}}, \quad \sin(\bar{\omega}\Delta t - k\Delta x) = \frac{B^2 - B_{10}^2 - B_{20}^2}{2B_{10}B_{20}} \tag{8.5.5}$$

对于式(8.5.2)和(8.5.4)的联系,除了要求相位差 $\bar{\omega}\Delta t - k\Delta x$ 相等,还引入复数将它们联系起来,并令振幅分别相等 $A(A_{10}, A_{20}) = B(B_{10}, B_{20})$,取

$$\cos(\bar{\omega}\Delta t - k\Delta x) + \mathrm{i}\sin(\bar{\omega}\Delta t - k\Delta x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\omega}\Delta t - k\Delta x)} \tag{8.5.6}$$

对式(8.5.6)取复共轭,并进行内积运算,有

$$\cos^2(\bar{\omega}\Delta t - k\Delta x) + \sin^2(\bar{\omega}\Delta t - k\Delta x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\bar{\omega}\Delta t - k\Delta x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\omega}\Delta t - k\Delta x)} = 1 \tag{8.5.7}$$

取 $\Delta t = t_2 - t_1, \Delta x = x_2 - x_1$,则式(8.5.7)对 (x_1, t_1) 和 (x_2, t_2) 均可以写成

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\bar{\omega}t - kx)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\omega}t - kx)} = 1 \tag{8.5.8}$$

令

$$\varphi^* = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\bar{\omega}t - kx)}, \quad \varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\omega}t - kx)}$$

式(8.5.8)写为

$$\varphi^*\varphi = 1 \tag{8.5.9}$$

式(8.5.7)中 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\omega}\Delta t - k\Delta x)}$ 可看做光与电子相互关联的干涉条件,即干涉条件是以指数的形式存在于式(8.5.7)中。将式(8.5.7)的干涉项与式(8.5.2)和(8.5.4)的干涉项进行对比,相干光的叠加为取和形式,光作为单元函数,其干涉项为实数形式;而式(8.5.6)和(8.5.7)为相干光与电子耦合时的干涉条件,表现为复数形式。干涉项为指数函数形式体现了两种物态相互关联的叠加效果,所以式(8.5.7)具有二元性质,而光或电子分别具有单元性质。式(8.5.9)具有量子力学中微观客体态函数几率诠释的表现形式,类同于微观客体的态函数。

从四维空间角度在 Minkowski 空间取分立的非质点相格,每一个态函数 $\varphi(x,t)$ 对应一个相格,也表示一个实物粒子的本征态。取 (x_1, t_1) 和 (x_2, t_2) 表示进行量子跃迁前、后实物粒子所对应的非质点相格,两相格的四维时空间隔等于

零，使实物粒子不同本征态的坐标间距与光量子运行的距离建立一种对等关系。当这种对等联系满足光程差为二分之一波长整数倍时，表现了微观客体与光量子耦合产生的波粒二象性以及实物粒子所表现的干涉和衍射现象。这些特性可归结为实物粒子与光信号的因果联系，而描述它们的态函数也应具有这种因果诠释的物理性质。

由式(8.2.10)和(8.3.6)将不确定关系改写成

$$\Delta x\Delta p = \Delta t\Delta E = (c\Delta t)\left(\frac{\Delta E}{c}\right) = x_c p_c = n\frac{h}{2},\quad n = 1,2,\cdots \tag{8.5.10}$$

其中，x_c 为光波传播的距离，p_c 为光的动量。由波粒二象性 $\Delta p = \dfrac{h}{\lambda} = k\hbar$ 和 $\Delta E = h\nu = \hbar\bar{\omega}$，注意到 $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$，圆频率 $\bar{\omega} = 2\pi\nu$，则

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \frac{n\lambda}{2},\quad n = 1,2,\cdots \\ t_2 - t_1 &= \frac{n}{2\nu},\quad n = 1,2,\cdots \end{aligned} \tag{8.5.11}$$

在电子的双缝衍射中，式(8.5.11)为电子与光子耦合的双缝衍射方程。将式(8.3.1)改写成

$$\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\Delta x\Delta p - \Delta t\Delta E) = \mathrm{i}(kx_2 - \bar{\omega}t_2) - \mathrm{i}(kx_1 - \bar{\omega}t_1) = 0 \tag{8.5.12}$$

式(8.5.11)写成

$$kx_1 = kx_2 - \frac{1}{2}nk\lambda,\quad \bar{\omega}t_1 = \bar{\omega}t_2 - \frac{1}{2}nk\lambda \tag{8.5.13}$$

将式(8.5.12)与(8.5.13)联立并取指数形式，有

$$\varphi'^*(x_1,t_1)\varphi(x_2,t_2) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx_1-\bar{\omega}t_1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_2-\bar{\omega}t_2)} = a^* a\varphi^*(x_1,t_1)\varphi(x_1,t_1) = 1 \tag{8.5.14}$$

其中，

$$\varphi(x_1,t_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1-\bar{\omega}t_1)} = a^* a\varphi(x_2,t_2) = \varphi(x_2,t_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_2-\bar{\omega}t_2)} \tag{8.5.15}$$

而

$$a = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}nk\lambda},\quad a^* = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}nk\lambda} \tag{8.5.16}$$

满足归一化条件：

$$a^* a = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}nk\lambda}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}nk\lambda} = 1 \tag{8.5.17}$$

式(8.5.16)中 $a = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}nk\lambda}$ 可看做态函数的空间相位因子，$a^* = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}nk\lambda}$ 为时间相位因子，统称时空相位因子，简称相位因子。由式(8.5.11)和(8.5.13)，可以看出式(8.5.16)是电子与光子耦合时干涉和衍射的条件。即 $a = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}nk\lambda}$ 和 $a^* = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}nk\lambda}$ 作为电子双缝的衍射条件在态函数中是以相位因子的形式出现的。

由式(8.5.15)给出的 $\varphi(x_1,t_1)=a^* a\varphi(x_2,t_2)$，是本征态 (x_1,t_1) 和 (x_2,t_2) 之间态函数关联式。即电子在运行过程中与光量子耦合，对应一系列本征态和本征函数 $\varphi(x_1,t_1),\varphi(x_2,t_2),\cdots,\varphi(x_n,t_n),\cdots$。式(8.5.14)为本征态函数几率诠释的归一化条件，它包含了相位因子的归一化式(8.5.17)，满足式(8.5.13)条件。用光信号联系的各时空点 $(x_1,t_2),(x_2,t_2),\cdots$，均能满足归一化条件：

$$\varphi^*(x_1,t_1)\varphi(x_1,t_1)=\varphi^*(x_2,t_2)\varphi(x_2,t_2)=\cdots=1 \qquad (8.5.18)$$

利用实物粒子和光量子的相干叠加，能够对量子干涉和衍射通过态叠加原理找到一种具有因果性的统计解释。在电子双缝干涉实验中，首先通过双缝的相干光在空间各点叠加形成强弱不同的强度分布，如式(8.5.2)。运动的电子可从双缝中任一缝中通过，由于电子吸收或放出叠加后的相干光形成一系列分立的本征态。电子的量子跃迁受到了叠加后相干光的调剂，使电子跃迁前后的位置差与相干光的光程差建立了一种等量关系，如式(8.5.6)。在受到叠加后的相干光影响下电子的位置分布在屏上各处出现的概率不同，多电子亮斑的累积形成明暗相间的干涉或衍射图样。因此，电子可以一个一个射出，在电子间不产生相互作用，通过双缝的相干光叠加后的振动位矢和强度决定了电子的运动方位和空间分布。与相干光耦合的电子所对应的本征态函数满足式(8.5.11)的分立条件，在广域 Hilbert 相空间不同的分立相格表现了电子分布的概率差异，从而在屏上出现了电子干涉图样。

电子与叠加后相干光之间的干涉可用态函数相位因子的二元性质来描述。式(8.5.16)中，$a^*=e^{-\frac{1}{2}in\pi\lambda}$ 对应相干光的干涉条件，当 $n=1,3,\cdots$，通过双缝的光程差分别为半波长的奇数倍，$ct_2-ct_1=\frac{1}{2}\lambda,\frac{3}{2}\lambda,\cdots$，干涉极小为暗纹；当 $n=2,4,\cdots$，相干光的光程差分别为半波长的偶数倍，$ct_2-ct_1=\lambda,2\lambda,\cdots$，干涉极大为明纹。同理，$a=e^{\frac{1}{2}in\pi\lambda}$ 表示电子跃迁时两个量子态的位置差，当 $n=1,3,\cdots$，电子的量子态对应的位置差为半波长的奇数倍，$x_2-x_1=\frac{1}{2}\lambda,\frac{3}{2}\lambda,\cdots$，干涉极小，电子在该点出现的概率就小；当 $n=2,4,\cdots$，干涉极大，量子态的位置差为半波长的偶数倍，$x_2-x_1=\lambda,2\lambda,\cdots$，电子在该点出现的概率就大。因此，$a^*=e^{-\frac{1}{2}in\pi\lambda}$ 和 $a=e^{\frac{1}{2}in\pi\lambda}$ 满足运动粒子和光量子共同遵守的相干条件，即波长或频率相同，有固定位相差，传播方向相同。

在量子干涉中，式(8.5.16)的相位因子起到了关键的干涉作用，可看做态函数中的隐变量，它可能正是 Bohm 所寻找的量子势。式(8.5.14)的归一化将光和实物粒子耦合形成的干涉联系起来，使光的传播和粒子的运动形成了量子化和波动性。时空点 $(x_1,t_1),(x_2,t_2),\cdots$，作为实物粒子的本征态可抽象为广域 Hilbert 相空间的一个个相格，$\varphi(x_1,t_1),\varphi(x_2,t_2),\cdots$ 为各本征态所对应的本征函数。整个

Hilbert 相空间由无限多个相格构成，相格之间可以通过交换光量子或传递光信号取得因果联系。式(8.5.18)是用光信号联系的本征态所对应的态函数几率诠释，为各时空点发现粒子的几率，满足归一化条件；而不能用光信号联系的本征态之间应满足正交条件，Diarc　δ 函数式(8.3.5)刻画了本征函数的这种正交归一性质。量子干涉或“态函数的几率干涉”是 Born 给出几率波不能进行个体描述的依据，但在广域 Hilbert 相空间中本征态之间的相干条件却具有了因果解释。

在上一节分析了一般态函数的整体统计分布，可用于解释多电子的双缝衍射图样。引入 $\psi(x,t)$ 表示在时空点 (x,t) 的态函数，$|\psi(x,t)|^2$ 表示时空点 (x,t) 附近单位时空中发现粒子的概率密度，满足

$$\psi(x,t) = c_1\varphi_1(x,t) + c_2\varphi_2(x,t) + \cdots = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x,t) \qquad (8.5.19)$$

其中，$\varphi_1(x,t),\varphi_2(x,t),\cdots,\varphi_n(x,t),\cdots$，构成本征函数的一个完全集，则

$$\psi^*(x,t)\psi(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |c_i\varphi(x,t)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 = 1 \qquad (8.5.20)$$

由于式(8.5.19)是由本征函数的完全集构成的线性组合，本征函数满足式(8.3.7)的正交归一条件，干涉性质由相位因子刻画，所以式(8.5.20)中不存在所谓具有干涉性质的交叉项，只有 $|c_1|^2,|c_2|^2,\cdots,|c_n|^2,\cdots$，表示粒子分别处于本征函数 $\varphi_1(x,t),\varphi_2(x,t),\cdots,\varphi_n(x,t),\cdots$ 的概率。这时 $\psi(x,t)$ 具有了统计意义，它可以表示一个粒子通过其他时空点 $(x',t'),(x'',t''),\cdots$，到达点 (x,t) 跃迁时，发现粒子的概率，也可以表示多个粒子在点 (x,t) 出现的概率。整个时空分布是态叠加原理从个体到整体、本征态到一般态的线性组合，整个电子衍射图样就具有了从因果性到统计性的辩证关联。

8.6　态函数的物理诠释

传统量子力学强调态函数 $\varphi(x,t)$ 本身不具有物理含义，对它不可能有一种直观的理解。Schrödinger 在引进 $\varphi(x,t)$ 后坚持认为，$\varphi(x,t)$ 代表一种像电磁波那样的，在三维空间中传播的真实的物理波动，一个个粒子不过是这种波动的凝聚，即波包的体现。但被绝大多数物理学家接受的是 Born 的几率诠释，即将 $\varphi(x,t)$ 看做几率幅，从而把它的模方 $|\varphi(x,t)|^2$ 认做是粒子被发现的几率密度。对态函数或几率幅 $\varphi(x,t)$ 的争论至今没有停止过，它是否为单个系统或者由多个成员组成的系综，以及它是否存在隐变量，一直是人们讨论的焦点。

从前文分析可见，本征态函数是对应光与实物粒子的二元函数，将式(8.5.2)和(8.5.4)用复数的指数形式联系起来就可组成本征态函数 $\varphi(x,t)$，它应该具有

描述光与微观客体耦合时在时空中传播的功能，这为找到 $\varphi(x,t)$ 的物理意义奠定了理论基础。本征函数的几率诠释 $\varphi^*(x,t)\varphi(x,t) = |\varphi(x,t)|^2 = 1$，对应 Minkowski 时空间隔和动量间隔等于零的情况。这确定了时空相格 (x,t) 发现的实物粒子是通过其他时空相格进行量子跃迁的结果，也确定了态函数 $\varphi(x,t)$ 与 Minkowski 空间几何度量的关联。态函数 $\varphi(x,t)$ 与时空点的几何关联体现了单个客体的现实性，不同时空点的几何关联体现了客体演化或转变的因果性。这种现实性和因果性奠定了微观客体真实存在和个体决定性的理论基础，为刻画态函数 $\varphi(x,t)$ 的物理意义提供了数学依据。

一个电子可分别处于本征态 $\varphi(x_1,t_1),\varphi(x_2,t_2),\cdots,\varphi(x_n,t_n)$，由式(8.5.15)，如果本征态之间可以通过光信号取得联系，满足关系 $\varphi(x_1,t_1) = a^* a\varphi(x_2,t_2) = \cdots$。它们之间是通过粒子的量子势 $a = e^{\frac{1}{2}i\omega k\lambda}$ 和相干光的量子势 $a^* = e^{-\frac{1}{2}i\omega k\lambda}$ 将空间各个态函数联系起来。由于 $\varphi(x_1,t_1) = a^* a\varphi(x_2,t_2)$ 包含了实物粒子与相干光耦合的极大或极小条件，所以式(8.5.15)，即 $\varphi(x_1,t_1) = a^* a\varphi(x_2,t_2)$ 可看做是粒子与相干光耦合的衍射方程。干涉或衍射项隐含在态函数的相位因子中，也就是说，态函数式(8.5.15)本身隐含了微观客体与光或电磁场耦合具有干涉或衍射的物理意义，并通过电子的运动在空间各点建立起本征态函数之间的等量关系。这类同于 Schrödinger 对态函数的解释，但各点的凝聚或波包是通过量子势来体现的，在相空间中电子的可观察量为量子势 $a = e^{\frac{1}{2}i\omega k\lambda}$，相干光的可观察量为量子势 $a^* = e^{-\frac{1}{2}i\omega k\lambda}$。式(8.5.17)作为归一化的相位因子隐含于态函数中，表示了实物粒子与光量子相互演化和转变关系。对多个电子，各电子的本征态之间没有因果联系，由式(8.5.19)和(8.5.20)，发现粒子在位置 $\varphi(x_1,t_1),\varphi(x_2,t_2),\cdots,\varphi(x_n,t_n)$ 的概率密度分别为 $|c_1|^2,|c_2|^2,\cdots,|c_n|^2$，态函数 $\psi(x,t)$ 具有了几率波的含义，整个概率分布构成了多电子的衍射图样。

本征态函数式(8.5.15)涉及不同相格的几何联系，包含了量子跃迁的因果性和不确定性。用光信号联系的各时空点 $(x,t),(x',t'),\cdots$，对应粒子的一系列本征态。从时序上看，如果 $t<t'$，则 (x,t) 为因，(x',t') 为果。当 $E_x > E'_x$ 时，实物粒子放出一个光量子，前后对应的本征态函数分别为 $\varphi(x,t)$ 和 $\varphi(x',t')$。(x,t) 或 (x',t') 为发现实物粒子放出一个光量子前后的概率分别为 $|\varphi(x,t)|^2 = 1$ 或 $|\varphi(x',t')|^2 = 1$。如果 $t''<t$，则 (x'',t'') 为因，(x,t) 为果。当 $E''_x < E_x$ 时，实物粒子吸收一个光量子，前后对应的本征态函数分别为 $\varphi(x'',t'')$ 和 $\varphi(x,t)$。(x'',t'') 或 (x,t) 为发现的实物粒子吸收一个光量子前后的概率，分别为 $|\varphi(x'',t'')|^2 = 1$ 和 $|\varphi(x,t)|^2 = 1$。因此，可以说 $|\varphi(x,t)|^2 = 1$ 是在 (x,t) 处发现粒子的概率，但说不清本征态函数 $\varphi(x,t)$ 是放出光量子的因，还是吸收光量子的果，这说明 (x,t) 处的本征态函数具有一种不确定性。只有给定时空点 $(x,t),(x',t'),\cdots$，所对应

的几率诠释，粒子在各时空点的因果性才能确定。

本征态函数 $\varphi(x,t)$ 的不确定性与它的复数性有关。复函数之间是不能比较大小的，只有当复数取内积，复数的模方为实数，发现粒子的因果性才能确定。但本征态函数的复数性质并不影响其物理意义的确定，它应该描述实物粒子与光量子耦合的时空关联，这可以通过一个简单的例子来类比。将粒子比做在站点等车的人，光比做公共汽车，各个站点比做粒子的本征态。观察站点某个人，不知道他从哪来，到哪去，具有不确定性。只有他乘上某个汽车，在某个站点下车，才完成了两个站点之间的因果过程。人乘车建立了人与车的联系，站点是人与车共同的定态。但人乘哪个车是不确定的，不能根据这种不确定性就否定了人与站台以及人与车相互关联的价值。相同的道理，也不能否定本征态函数的物理意义。观察站点的人，只有乘车到达其他站点才有意义，车与人、场和实物粒子构成一个辩证统一体。只考虑人或粒子是单元行为，只考虑车或场也是单元行为，只有将粒子和场结合起来才能正确地描述本征态函数这个二元复函数的物理意义。本征态函数本身具有实物粒子与光量子耦合的含义，并不包括粒子的运动行为，粒子的运动状态需要利用相应的运动微分方程描述。运动方程可以由态函数进行微分而得到，需要态函数的参与，所以运动方程也应该具有粒子与场耦合的性质，这就是微观客体与宏观客体的微分方程的不同之处。

粒子本征态的复数性质，决定了它只能对应发生某个量子跃迁前（或后）的时空位置 $\varphi(x,t)$，也就是物理事件的因（或果）。态函数的几率密度 $|\varphi(x,t)|^2=1$ 确定了在该点发现了粒子，只有当 $\varphi(x',t')$ 或 $\varphi(x'',t'')$ 确定后，才能决定 $\varphi(x',t')$ 和 $\varphi(x'',t'')$ 是谁与 $\varphi(x,t)$ 发生了量子跃迁，联系着两个本征态之间的因果关系才能确定。上文出现在态函数 $\varphi(x_1,t_1)=a^*a\varphi(x_2,t_2)$ 中的相位因子 $a=e^{\frac{1}{2}i\pi k\lambda}$ 和 $a^*=e^{-\frac{1}{2}i\pi k\lambda}$，一个相对于粒子，另一个相对于光量子。式(8.5.17)中相位因子归一化，使各本征态 $\varphi(x_1,t_1),\varphi(x_2,t_2),\cdots$，通过量子跃迁取得了因果联系。所以，态函数 $\varphi(x,t)$ 中的相位因子是刻画量子跃迁的重要物理量和必要条件。它隐含了实物粒子与光量子相互耦合的波粒二象性，将表示空间动量的不确定关系和时间能量不确定关系对等起来，描述实物粒子的各相格之间干涉相消和干涉相长的几何联系。

一般态函数式(8.5.19)是本征态函数的线性组合。它可能是一个粒子的多次因或果的累积，也可能是多个粒子一次因或果的累计。而态函数的几率诠释式(8.5.20)应包含所有因果累计效果在点 (x,t) 的体现。这类同于先前的例子，一个站点可以有多个人和多个车通过，也可以一个人多次通过，各个因果过程的累积就是一个统计过程。作为单位时空体积内发现粒子的概率密度，粒子的叠加和累积效果也应具有统计意义。这种统计规律与 Born 的统计诠释是类同的，所不同的

是，它包含了微观个体行为的现实性和因果性，而 Born 却否认这种个体行为的存在。本征态函数 $\varphi(x,t)$ 通过实物粒子的量子跃迁传递着光信号或电磁波，与 Schrödinger 的物质波相吻合。但与 Schrödinger 物质波不同的是，粒子的波动性不是孤立的，而是粒子与光量子耦合的产物。Born 的几率解释与 Schrödinger 物质波的解释不能协调的关键是将实物粒子与光量子分割开来，只有将实物粒子与光量子相结合，对波粒二象性和不确定关系给出一个统一的解释就能够描述微观个体的因果性和多体的统计性。电磁波与粒子的关联是物理客体与时空性质的关联，也是 Schrödinger 物质波与 Born 几率波的几何关联。

8.7 对态叠加原理的质疑

微观客体的波粒二象性首先是通过电子的干涉和衍射实验得到验证的。在实验中，电子几乎是一个一个地通过仪器，表明电子的干涉或衍射图样是电子的个体属性，而不是电子间相互作用的集体表现。但衍射图样显示，一个电子到达干涉屏上只是一个小亮斑，只有积累了大量的电子亮斑才能表现出某种衍射图样。这说明衍射图样应该是大量微观客体的一种集体行为。电子的干涉和衍射要考虑个体与集体的辩证关系，单独考虑 de Broglie 波的解释是行不通的，因为 de Broglie 物质波只能对单个量子客体的行为进行描述。衍射图样也不能摆脱单个电子的运动行为，因为屏上一个亮斑体现了电子的粒子性，集体行为的干涉或衍射图样是由全体的个体行为参与而表现的，这似乎与个体行为的波动性有关。如何理解个体与集体的辩证关系到目前为止还没有一个具有说服力的因果解释。

Born 把 ψ 函数描写的波动称为“几率波”。Born 认为在一个个别事件里因果性地确定结果的量并不存在，而应使用几率描述的统计决定论。Born 提出了态函数的统计解释，即态函数在空间的中某一点的强度 $\psi^* \psi = |\psi|^2$ 和在该点找到的概率成正比例。按 Born 的统计解释，在电子衍射实验中，通过双缝的电子可能沿着各种方向运动，电子运动的确切位置是无法确定的，只能确定在衍射屏上电子处于某位置的概率。如果屏上的衍射条纹包含了电子沿各个方向运动所处的位置或所有可能出现的状态，则任一态函数 ψ 可用这些本征态函数完全集的线性叠加来表示。如果电子处于位置 i 的本征态函数为 $\varphi_i(x)$，几率幅为 c_i，在 i 处发现电子的概率为 $|c_i|^2$。电子处于态 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$ 时，相应的概率分别是 $|c_1|^2, |c_2|^2, \cdots, |c_n|^2, \cdots$。当干涉图样的明条纹处，发现电子的概率大，相应地，在位置 i 附近，发现的电子数的亮斑就多；相反，干涉图样的暗条纹处，发现电子的概率小，电子数的亮斑就少。在整个屏的干涉图样中，发现电子的概率归一，应表现所有发现电子的概率分布之和。

传统量子力学在利用态叠加原理解释电子的单缝或双缝衍射实验中，通过与

光的干涉或衍射相类比，将电子在屏上一点 P 出现的概率密度写为

$$|\psi|^2 = |c_1\psi_1 + c_2\psi_2|^2 = |c_1\psi_1|^2 + |c_2\psi_2|^2 + c_1^* c_2\psi_1^*\psi_2 + c_1c_2^*\psi_1\psi_2^* \tag{8.7.1}$$

式(8.7.1)称为态叠加原理。在电子双缝实验中主要考虑电子通过双缝时产生的相干条件。右边第一项表示电子位于态 ψ_1 且穿过缝 1 出现在点 P 的概率密度；第二项是电子位于态 ψ_2 且穿过缝 2 出现在点 P 的概率密度；第三、第四项是 ψ_1 和 ψ_2 的干涉项。一般认为，干涉项是产生电子干涉图样的原因。对式(8.7.1)按传统的解释，如果 ψ_1 和 ψ_2 是体系的可能态，那么它们的线性叠加 $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ 也是这个体系的一个可能状态。即电子处于态 ψ 时，可处于态 ψ_1，也可能处于态 ψ_2。

显然式(8.7.1)干涉项的形式是参照了光干涉公式(8.5.2)的形式，但电子干涉的解释与光的干涉解释具有本质区别。光的干涉在瞬间完成，具有因果解释，它涉及两缝之间穿过的光强相位差和光程差的联系，特别是当穿过两缝光强相等、相位相反时，在暗纹叠加的光强为零。而对电子而言，干涉图样可在相当长时间内完成，是多粒子的集体行为，但又与电子间的相互作用无关。从统计的角度，对单个电子而言，穿过缝 1 在 P 的态 ψ_1 与穿过缝 2 在 P 的态 ψ_2 干涉的机理是什么？一个电子作为一个整体，一旦从某个缝穿过时，它与另一个缝的什么物质相联系并得到了干涉项，这些都是悬而未决的问题。特别是，干涉项能否定量地解释电子的相位差和波行差，从而确定穿过某个缝的电子在屏上出现的亮斑会出现在什么位置是存在很大疑问的。按 Born 的统计解释，不能对电子运动做出个体决定论，但利用相干光干涉公式类同的形式给出了电子干涉项的物理意义是什么，它与 de Broglie 关系具有怎样的内在关联，以及式(8.7.1)中第三、第四项是否为干涉项，它与电子干涉图样是否有关，甚至是否存在都是值得怀疑的。这些问题的解决牵连着量子力学基础的诠释。

上文分析了电子在双缝衍射中产生的衍射图样是电子在运动过程中进行量子跃迁时与通过双缝后的相干光耦合的结果。电子在运动过程中频繁地与电磁波相互作用或通过量子跃迁吸收和放出光量子，真空中与电子耦合的电磁波(包括可见光或不可见光)瞬时通过双缝后在空间形成相干叠加。一个运动电子无论从哪个缝中通过都具有分立而确定的运动轨迹，通过双缝后的电子与缝后的相干光耦合，其动量和位置受到相干光的调剂，表现了各处出现概率密度不同的衍射图样。由于电子是受到相干光的调剂，所以电子的衍射图样类同于相干光的衍射图样。电子的衍射项式(8.5.16)隐含于本征态函数的相位因子之中，这与量子力学的态叠加原理式(8.7.1)具有本质区别。由于电子与光耦合涉及二元函数，指数形式的态函数与具有衍射性质的相位因子是乘积关系。而态叠加原理式(8.7.1)表示的干涉项类同于一元函数，如光的干涉，态函数几率诠释与干涉项之间是相加关系。显然，这存在复数与实数、二元函数与单元函数相区别的重要标志，式(8.5.2)和

(8.5.17)的差别也体现在这里。态叠加原理式(8.7.1)将干涉项单独列出,延续了相干光干涉式(8.5.2)的形式,不符合微观客体相干条件和衍射特点,也不能像描述相干光干涉那样定量地描述电子衍射的细节问题。式(8.5.17)具有的二元性质和态函数对复数的依赖性,应该是微观客体与光量子进行耦合的相干条件,而态函数的指数形式刻画二元实函数的关联方式,体现了量子干涉所具有的物理意义。

8.8　量子统计与经典统计的区别与联系

描述微观客体的态函数以及态函数的几率诠释,刻画了实物客体与光量子的耦合或相互作用关系,但并不涉及实物客体本身的运动形态。粒子运动规律的整体性应该包括粒子本身的运动形态以及粒子与粒子、粒子与场的相互作用。粒子的运动状态需要有相应的运动方程来描述,在几何空间对应相应的时空轨迹。微观粒子本身可用抽象的 $\mu(q,p)$ 空间中一个 $2r$ 维相格描述,相格的体积为 $h_0^r = dq_1\cdots dq_r dp_1\cdots dp_r$。对 N 个粒子,有 N 个相格,对应 $2rN$ 维相空间。如果为经典粒子遵从 Maxwell-Boltzmann 统计规律。对量子粒子遵从 Bose 或 Fermi 分布,满足量子统计规律。传统情况下,无论是经典统计还是量子统计均可将 $2rN$ 维相空间与 Euclidean 几何抽象出的 Hilbert 相空间相对应,其特点为不同粒子的不同相格之间相互独立,空间坐标与时间坐标之间也相互独立。将粒子与三维相格 $h_0^3(x,y,z,p_x,p_y,p_z)$ 相对应,粒子可在时间流失中运动或与其他相格进行相互作用。个体粒子的运动以及粒子间相互作用遵守着力学规律,但整体的 N 个粒子遵守统计规律,这是经典物理的统计模型。

如何将态函数的几率诠释与粒子的统计规律联系起来呢?首先应当将它们统一到同一个时空中,这样就有可能分清它们之间的区别和联系。将 $2rN$ 维相空间与 Minkowski 复空间结合起来,所抽象出的广域 Hilbert 相空间具有 Minkowski 原空间的几何性质。一个微观实物粒子具有八维相格 $h_0^4\left(x,y,z,ct,p_x,p_y,p_z,\frac{E}{c}\right)$,实物粒子与光量子或场的相互作用可用本征态函数描述,粒子本身的运动形态对应相应的运动方程。例如,低速运动的粒子遵守 Galilei 变换,对应的运动方程为 Schrödinger 方程;高速运动的粒子遵守 Lorenz 变换,对应于 Dirac 方程或 Klain-Gaonen 方程。这就需要在 Minkowski 空间中,能够分别描述静止、低速运动以及高速运动粒子的运动形态。所建立的运动微分方程,一方面应具有描述低速或高速运动粒子运动特点的功能;另一方面可通过分立解表示微观粒子的量子跃迁和与场的相互关联。

微观粒子的 Bose 或 Fermi 分布遵从量子统计规律。描述粒子的微观理论统一到以 Minkowski 为原空间的广域 Hilbert 相空间,可以将量子统计给出与经典

统计类同的解释,使个体的因果性与集体的统计性构成一个有机结合体。描述微观客体的 Schrödinger 方程或 Dirac 方程应具有两方面的功能:一方面分立解或本征值可描述粒子通过量子跃迁与场耦合的因果关系;另一方面,运动微分方程应体现粒子本身的运动状态。运动方程两方面的综合效果体现了微观个体的因果行为,而多粒子的分布体现了集体统计行为。个体决定性与集体统计性的联系与经典统计规律具有类同性质。例如在电子的双缝衍射中,衍射图样中一个光斑是一个电子参与两方面因果行为的综合结果。一方面,通过双缝叠加后的相干光与电子耦合使电子发生量子跃迁,电子受相干光的调剂遵守光学规律;另一方面,电子个体遵守力学规律决定其本身的运动状态。多个电子在这两方面的因果条件的影响下,形成了整个电子干涉衍射图样的统计分布。

量子统计规律和经典统计规律的主要区别是个体因果性和几何关联性不同。经典客体本身的运动行为和物体间的碰撞遵守力学规律,物体间相互独立,可抽象为质点。描述物体的 $\mu(q,p)$ 空间可以是 Euclidean 空间,也可以是 Minkowski 空间,它们均表现为连续空间。量子客体本身的运动行为遵守力学规律,通过粒子的量子跃迁产生光量子遵守光学和电磁场规律。这两种规律对微观客体来讲是辩证统一体,它们相辅相成决定了微观客体的形态和性质。通过 Minkowski 复空间的特定方位将类光区和类时区结合起来才能刻画微观粒子和场的这种二元性质。所以,经典统计规律对应的粒子具有单元性质,可以用实数刻画单个粒子的因果性质;量子统计规律对应的粒子和场具有二元性质,需要用复数形式刻画粒子和场耦合的因果性质,这是量子统计规律和经典统计规律的本质区别。

8.9　双曲态函数的表述形式

Minkowski 空间与双曲复数相对应,由四维时空间隔不变量和能量动量间隔不变量抽象出的态函数应该具有双曲复数的形式。但是考虑到使用习惯的需要以及态函数主要表现了两种复数的共性,因此本章利用传统复数形式表示态函数和其运算规律不失量子诠释的物理性质和数学性质。但利用双曲复数可能更能表现态函数几率诠释的厄米共轭关系,对后续章节讨论粒子运动方程的厄米性质和几何空间的关联性具有重要意义。

在二维双曲 Minkowski 复平面的类时区中,取两时空点或物理事件 $X_1(ct_1,\mathrm{j}x_1)$ 和 $X_2(ct_2,\mathrm{j}x_2)$,分别作内积,有

$$\begin{cases} X_1^* X_1 = c^2t_1^2 - x_1^2 = R_1^2 \\ X_2^* X_2 = c^2t_2^2 - x_2^2 = R_2^2 \end{cases} \tag{8.9.1}$$

其中,R_1、R_2 分别为两个物理事件 $X_1(ct_1,\mathrm{j}x_1)$ 和 $X_2(ct_2,\mathrm{j}x_2)$ 的模方或时空间隔,是坐标变换不变量。当两个物理事件用光信号取得因果联系时,$X_1(ct_1,\mathrm{j}x_1)$ 和

$X_2(ct_2, \mathrm{j}x_2)$ 的连线平行或垂直类光区，满足关系式(7.1.1)。对 $\Delta X = X_2 - X_1$ 取内积，对应式(5.2.4)，即

$$\Delta X^* \Delta X = (X_2 - X_1)^* (X_2 - X_1) = d^2 \theta_0^* \theta_0 = 0 \qquad (8.9.2)$$

将式(7.1.2)按多项式(7.7.8)的算法展开，并与式(8.9.1)联立，有

$$X_1^* X_1 + X_2^* X_2 = X_2^* X_1 + X_1^* X_2 = R_1^2 + R_2^2 \qquad (8.9.3)$$

Minkowski 动量空间的类时区中，$P_1\left(\frac{E_1}{c}, \mathrm{j}p_1\right)$ 和 $P_2\left(\frac{E_2}{c}, \mathrm{j}p_2\right)$ 的连线是平行或垂直类光区。取

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{\Delta E}{c} + \mathrm{j}\Delta \vec{p} = d' \vartheta_0 \qquad (8.9.4)$$

式(8.9.4)与(7.1.2)具有类同形式。对式(8.9.4)取内积，有

$$\Delta P^* \Delta P = \left(\frac{\Delta E}{c}\right)^2 - (\Delta p)^2 = 0 \qquad (8.9.5)$$

式(8.9.5)为实物粒子与光量子耦合时的能量动量关系式。

Minkowski 复空间的四维位型空间和四维能量动量空间可构成八维 Minkowski 相空间。将式(8.9.2)和(8.9.5)联立，得

$$(\Delta X^* \Delta X)(\Delta P^* \Delta P) = (\Delta X^* \Delta P)(\Delta P^* \Delta X) = 0 \qquad (8.9.6)$$

取

$$\Delta X^* \Delta P = \Delta P^* \Delta X = 0 \qquad (8.9.7)$$

对式(8.9.7)按式(7.7.8)的算法展成分量形式：

$$\Delta X^* \Delta P = (c\Delta t - \mathrm{j}\Delta x)\left(\frac{\Delta E}{c} + \mathrm{j}\Delta p\right) = (\Delta t \Delta E - \Delta x \Delta p) - \mathrm{j}\left(\Delta x \frac{\Delta E}{c} - c\Delta t \Delta p\right) = 0 \qquad (8.9.8)$$

由式(8.9.8)可分别写成

$$(\Delta t \Delta E - \Delta x \Delta p) = 0 \qquad (8.9.9)$$

$$\Delta x \frac{\Delta E}{c} - c\Delta t \Delta p = 0 \qquad (8.9.10)$$

式(8.9.10)是交叉项乘积所对应的关系式，当成为态函数的指数或相位因子时归一。因为式(8.9.9)与(8.2.8)形式相同，表现了两类复数的共性。注意到式(7.7.6)，电子和光子共同遵守的不确定关系，式(8.9.9)满足式(8.3.1)。对式(8.9.9)乘因子 $\frac{\mathrm{j}}{\hbar}$（也可以乘 $\frac{\mathrm{i}}{\hbar}$），注意式(7.4.1)和(7.4.2)，有

$$\frac{\mathrm{j}}{\hbar}(\Delta x \Delta p - \Delta t \Delta E) = \mathrm{j}(k\Delta x - \tilde{\omega}\Delta t) = 0 \qquad (8.9.11)$$

对式(8.9.11)取指数运算，有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(k\Delta x - \tilde{\omega}\Delta t)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(kx - \tilde{\omega}t)} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kx' - \tilde{\omega}t')} = 1 \qquad (8.9.12)$$

令

$$\begin{cases}\varphi(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(kx-\omega t)} \\ \varphi'(x',t')^* = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kx'-\omega t')}\end{cases} \tag{8.9.13}$$

由式(8.9.12)和(8.9.13),可以写为

$$\varphi'_m(x',t')^*\varphi_n(x,t) = \delta_{mn} \tag{8.9.14}$$

同理,与式(8.3.11)对应地有

$$\begin{cases}\varphi(x,t) = A\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(xp-Et)} = A\varphi(x)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et} \\ \varphi^*(x',t') = A'^*\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(x'p-Et')} = A'^*\varphi^*(x')\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et'}\end{cases} \tag{8.9.15}$$

其中,

$$A = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(xp'-tE')}, \quad A'^* = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(x'p'-t'E')} \tag{8.9.16}$$

用式(8.9.13)和(8.9.15)可建立双曲型 Schrödinger 方程和 Dirac 方程,讨论量子力学中的物理问题。

双曲虚单位 j 与椭圆虚单位 i 的共性是虚单位与其复共轭符号相反 ($\mathrm{j}^* = -\mathrm{j}$, $\mathrm{i}^* = -\mathrm{i}$),它们的个性是二次项的符号相异 ($\mathrm{j}^2 = 1, \mathrm{i}^2 = -1$)。在相对论中虚单位个性的差异使四维间隔不变量的算法不同。双曲复数内积运算对应的间隔不变量是复矢量的混合积,椭圆复数的间隔不变量是并矢的缩并,两者的差异体现在消除交叉项的运算规则上。在量子力学态函数中隐含了四维间隔不变量。但态函数中的四维间隔不变量是以指数形式出现的,交叉项通过相位因子的乘积而消除。式(8.3.2)和(8.9.11)的虚单位是添加到四维间隔不变量上,并通过式(8.3.3)和(8.9.12)形成指数形式。因此,态函数关系式(8.3.4)和(8.9.13)中的虚单位和其复共轭突出了它们的共性,而回避了个性。在经典量子力学中无论用双曲虚单位 j 和椭圆虚单位 i,都会得到类同的结果。但是对于相对论量子力学,例如在 Dirac 方程中引入双曲虚单位可以利用内积或厄米共轭的形式使运动方程和态函数共同满足相对论的能量动量关系。

第九章　量子诠释的统计性和因果性

传统量子力学沿用 Bohr 的观点形成一套量子系统的正统解释，虽然被较为普遍地接受，但也受到以 Einstein 为代表的少数物理学家的质疑。质疑主要是围绕量子解释展开的，这涉及量子客体的几率诠释和因果解释以及系综的统计性与个体决定性的联系。其实，从本质上讲量子诠释出现问题的原因应该是数学基础的不完备性。传统量子力学的数学基础为由 Euclidean 几何抽象出的 Hilbert 空间，相互独立的非质点相格描述的量子客体限制了实物粒子与光量子的联系。由量子力学基本原理或基本假设所包含的波粒二象性和不确定关系以及态函数的干涉没有几何空间相对应，无法对量子客体的运动行为进行因果描述。以 Minkowski 几何抽象出的广域 Hilbert 相空间分别具有实物粒子和光量子的对应区域，可能对量子客体的定域性和光量子的全域性给出合理的因果描述和几率解释。或者说，是在传统量子客体的几率诠释基础上添加了具有几何背景的因果解释。从 Minkowski 几何方向奇异性的角度可以回答 Born 提出的疑问，阐述微观客体在什么情况下可以从初始状态计算出准会发生什么，粒子从哪里来，到哪里去的问题。

9.1　量子诠释的传统理论

量子理论对微观世界的运动规律和实验现象给出的结论和证明，其正确性是不容质疑的。但量子解释却有多种观点，相互之间差异较大，至今无法给出一个统一的、令人信服的量子诠释。目前量子理论的权威解释是哥本哈根学派的传统观念，也称为量子力学的正统解释。但这种传统的解释一直受到各种不同观点的质疑。量子力学的正统解释主要思想：(1)把可观察量作为建立理论的基础与依据；(2)在观察微观客体时不可避免地要产生干扰，因此可观察量表现了实验环境中客体的行为与性质；(3)描述微观客体的态函数是一种几率波，粒子出现的几率则是由波幅的平方所确定；(4)不可对易量的测量，遵循不确定原理；(5)用经典语言和词汇描述微观客体的统一性质时，遵循互补原理；(6)在微观领域中，力学的因果律和决定论遭到破坏；(7)无论从科学还是哲学角度来看，量子力学对微观客体的描述都是完备的。

哥本哈根学派的主要代表人物是 Bohr、Born 和 Heisenberg 等一批科学家，其中领军人物是 Bohr。Bohr 的量子诠释和互补性思想是哥本哈根学派理论观念的

精髓，主要体现在微观客体一方面表现强烈的个体性，另一方面表现为波动性，用宏观经验无法观察微观客体的时空行为。Bohr 认为，只有求助于统计性的描述，而放弃决定论，才能摆脱困境；Bohr 又进一步指出，要想区分主体和客体就带有任意性，其后果是不可能清晰表达微观因果律。他在《科学的哲学》一文中写到："在量子论中，客体和测量仪器之间的不可控制的相互作用迫使我们放弃因果描述"。Bohr 认为，微观客体表面上的波粒二象性是同一物理实在的两个不同的方面而已，他在《原子物理学和人的知识》一文中写到："把传统的物理属性硬加给原子客体就导致了一个本质上的含糊性要素。这点在关于电子和光子的粒子性质和波性质的两难局面上非常明显。在那里我们必须和两个彼此对立的图景打交道，每个图景都指向经验证据的一个本质方面。"Bohr 论述了由于对原子现象的观察必须要涉及客体和量具之间不能忽略的相互作用，于是就产生了实验观察的准确性与客体状态的确定性之间互斥与互补的关系。他认为，按照量子假设，任何准确的观察将是不可能的，空间和时间的概念也失去了直接的意义；系统与测量工具的相互作用，严格确定系统的状态是不可能的，通常的因果性也存在问题。量子论的本质，迫使我们把空间时间标示和因果性要求看成是描述的互相补充但又互相排斥的特色，两者分别象征着观察和确定的理想化。他对互补原理有一个较为普遍的论述，在《原子论和自然的描述》中写到："为了描述我们的思维的活动，我们一方面要求和一个在知觉中的主体相对立的有一个客观上给定的内容，而在另一方面，正像这一断定中已有的含义那样，客体主体之间不能有截然的区分，因为知觉主体也从属于我们的思维内容。"

Heisenberg 是哥本哈根学派的重要代表人物和思想家，他首先提出把量子力学的理论建立在可观察量的基础上；提出"能量子"具有两重性质，是构成物理世界基元的假说；Heisenberg 认为，量子论迫使我们放弃决定论，而选择统计论。他在《物理学家关于自然的概念》中写到："量子论实际迫使我们正在作为统计定律来表述这些定律，并且在根本上离开决定论。""量子理论的数学表述出现后，纯粹的决定论就得放弃。"第七章提到 Heisenberg 是不确定关系的创造者，他在《量子论的物理原理》中论述："这个测不准关系标明粒子图景能够应用的限度，使'位置'和'速度'这些字眼在越出这个方程所给定的准确度时，就和使用意义未确定的字眼一样毫无意义。"

在哥本哈根学派的观念中 Born 的几率波思想占据着重要地位。Born 从决定性思想出发，把 $|\psi|^2$ 称为几率密度，对态函数作出了统计解释。Born 认为，量子力学所对应的微观客体力学体系，使经典力学的传统形式应该用一个统计的方法来代替，对任何坐标 x、速度 v、时刻 t 都存在着一个几率密度 $\rho(x,v,t)$，它主要依据两个量子效应：(1)不确定关系；(2)态函数的几率干涉。这使我们不能从初始状态计算出准会发生什么，粒子碰撞的结果是怎样的。这意味着，解释只能是统计性

的，于是 Born 提出必须放弃个体决定论的观点。即量子效应及微观客体波和粒子的二重性宣告了严格决定论的结束，同时又要改变传统的因果律。毫无疑问，量子力学的形式及其统计解释在整理和预言物理经验上是成功的。但是非决定性和实物客体的统计性诠释能否满足人们接受机遇而不是因果性来作为支配物理世界的最高规律呢？可能 Born 也不能给出一个令他本人满意的回答。他在《关于因果和机遇的自然哲学》中写到："如果否认任何回到决定论的可能性，这都是愚蠢和粗暴的。因为没有一个物理理论会是最终的理论，新的经验会迫使我们作出改变，甚至于走回头路。我期待我们目前的理论将要发生深刻的改变。"显然，Born 对量子解释的哲学观点与哥本哈根学派的传统观念还是有区别的，他并不认为量子力学对微观客体的描述是完备的终极理论。

与哥本哈根学派相对应的是 J. von Neumann 的量子力学的标准体系。1932 年 J. von Neumann 证明了量子力学可以表述为 Hilbert 空间中厄米算符的运算，建立了量子力学的逻辑体系。在标准体系中用算符 A^a 描述可观察量，满足离散谱分解 $A^a = \sum_j a_j \sum_k \left| a^a_{jk} \right\rangle \left\langle a^a_{jk} \right|$，其中，$a_j$ 是 A^a 的本征值，$\sum_k \left| a^a_{jk} \right\rangle \left\langle a^a_{jk} \right|$ 是与之对应的本征映射。当观察量 A^a 被测量后，有确定值(本征值) a_j，它出现的概率有关系：$\left[\sum_k \left| a^a_{jk} \right\rangle \left\langle a^a_{jk} \right| \right] = 1$。按 J. von Neumann 的理论，测量后系统的态从 $\psi(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x)$ 变为 $\varphi_n{}'(x)$，被称为"波包塌缩"。在量子理论中"波包塌缩"是一种不连续、非因果的变化。因此有人认为，J. von Neumann 的量子力学的标准体系，仅涉及粒子的测量而没有清晰描述基本粒子属性的量子体系。

与哥本哈根学派相对立的是以 Einstein 为代表的"实在论"和"因果论"学派。Einstein 把量子论的解释看成是个暂时的权宜之计，"上帝"不掷色子是他不可动摇的原理。Einstein 认为，整个客观世界是离开人的精神而独立的实在，而这个实在是终极实在。他在《Maxwell 对物理实在观念发展的影响》一文中写到："相信有一个离开知觉主体而独立的外在世界，是一切自然科学的基础。"他认为，Newton 系统的物理实在是由空间、时间、质点和力等概念来表征的；Faraday 和 Maxwell 时代，电磁场概念作为一种终极实体已经被普遍接受；量子论创造了物理实在的新的根本特色。Einstein 认为，量子力学所描述的几率世界图象，并没有破坏物理实在的因果性，只不过是说明量子力学理论体系缺乏完备性而已。他承认在目前情况下，因果原理不可能适应到原子内部过程中去。但他断言地反对外界实体不存在因果过程。Einstein 还认为："虽然量子力学无可怀疑地是一个富有成效的学说，但是它并没有接触到事物的究根，我决不相信它能构成真正的自然观。我相信，我们能够描述自然界，是建立在自然界的规律不是只讲可能性及其变化，而是讲实体在时间上的变化的观点上的。"他在《关于量子力学描述的完备性问题》中指

出："我们得到的结论是 ψ 函数不应当被看做是关于一个体系的物理状态的一种完备的描述。""在我看来，像现在所用的这种在原则上统计性的描述的(方法)，只能是一种暂时的过渡状态。"这就是说，不能把过渡的不完备的量子力学理论，作为真正的自然观来对待，也不能作为否定因果决定论的根据。

与 Einstein 持类同观点的重要人物是 Dirac。Dirac 认为，物理学目前的阶段仅仅是通向未来更好阶段的一步台阶。他指出："我认为也许结果最终会证明 Einstein 是正确的，因为不应认为量子力学的现在形式是最后的形式。关于现在的量子力学，存在一些很大的困难。""我认为很可能在将来的某个时间，我们会得到一个改进了的量子力学，使其回到决定论，从而证明 Einstein 的观点是正确的。但是这种重新返回到决定论，只有以放弃某些基本思想为代价才能办到。"关于量子解释，Dirac 还说道："我说的要点是，我们只计算几率，我们不能从已给的初始条件计算出准能发生什么。这就意味着，解释只能是个统计性解释。""可能在未来的发展中，我们将能够回到决定论，但是这只能在抛弃别的什么东西，抛弃我们目前牢牢坚持的某种其他偏见之后才能办到。"在《物理学中的假设和先入之见》中，Dirac指出："我十分相信，当前量子理论所面临的困难以及作为量子论和相对论之间的阻力而出现的困难要得到克服，就必须进行变革，而且这个变革会像从 Bohr 轨道到 Heisenberg 和 Schrödinger 的量子力学的变革那样非常地剧烈。因此，我们不该太拘泥于目前的量子力学。我们不要以为在建立我们的整个哲学时仿佛目前这个量子力学已是定论了。"

9.2　对量子诠释的思考

对两个学派一些代表人物观点的回顾，主要想从他们的观点中找出值得深思和关注的问题，结合量子力学的几何背景，对量子解释和态函数的统计诠释提出一些解决问题的方法。首先，讨论量子个体的决定性与几何关联问题，这也是量子解释的实质问题。显然，Newton 的经典物理和 Einstein 的狭义相对论都能对质点个体作出决定性的描述。这些具有决定性的个体，无论在经典物理还是在狭义相对论中，它们的运动规律都对应着连续的时间和空间。在经典物理中质点个体(宏观、低速)对应着能量守恒、动量守恒及质量守恒；在狭义相对论中质点(宏观、高速)在四维空间作亚光速运动，其动量和能量可以相互转化，质点的质量也可以发生变化。但是，变化的质量是运动质量，而不是静止质量，因为静止质量在四维动量空间中是坐标变换不变量，是范数。可是，在量子力学中，对微观客体无论是低速还是高速运动，时间和空间均是分立的。这种具有非质点相格的量子客体与宏观质点的本质区别是它们缺少相应的几何对应。即到目前为止，还没有找到一个

合适的几何空间对微观客体的运动行为和耦合规律给出具有因果性质的几何描述。

有人认为，量子客体不能进行个体决定性描述的原因是微观客体具有波粒二象性。但是波粒二象性与实物客体和光量子的耦合有关，即实物粒子本身不是孤立的，在运动过程中微观客体与光量子取得了相互关联。这种相互作用，一方面使微观客体在吸收或放出光量子时其本身的静止质量发生了改变，即发生了质能转变；另一方面，光量子的耦合细节在经典量子力学中是无法描述的，即到目前为止还没有一种数学或物理的方法用以描述光量子对应类光区的局域性质。在经典物理中，光量子的速度为无限大，无法表述光量子的运动行为；在传统狭义相对论中，光量子的传播速度为光速，虽有光量子的对应区间(类光区)，但涉及光量子的四维时空间隔和四维动量间隔均为零。在几何上，由于不能给出类光区和类时区的几何关联，物理上不能准确描述光量子与微观个体耦合的实际过程，也就不能描述实物个体质量和能量等物理量的准确变化情况。所以，这可能是不能从初始状态计算出微观个体准会发生什么，粒子碰撞或耦合的结果是怎样的原因。由于不能描述粒子在何时何地的变化情况(质量的增减，质能的转变等)，因果律就受到了破坏，对微观客体描述的完备性也受到了质疑。因此，量子力学不能对微观客体进行个体决定性描述的根本原因应该是量子力学或微观理论的几何对应问题没有得到根本解决。所以说，目前的量子理论可以对微观客体进行完备描述是不能让人信服的。

其次，对微观客体的统计描述。Born 把 $|\psi|^2$ 称为几率密度，对态函数作出了统计解释，其正确性是不容质疑的。问题是，$|\psi|^2$ 是否还包含其他的信息或隐参量？这种统计解释与决定论是一种什么关系？量子力学的统计诠释与经典的统计解释有哪些联系和区别？这可能是 Einstein 想得到的量子力学所接触事物究根的关键所在。因为传统量子力学的数学基础是 Hilbert 空间，其原型空间为 Euclidean 几何。J. von Neumann 在 Hilbert 空间建立量子力学的标准体系时，并没有真正把量子客体与 Hilbert 空间所对应的原空间即 Euclidean 几何空间联系起来。由于在 Euclidean 空间没有光量子的几何对应区域，不能描述光量子的几何行为。在这种数学背景下，不可能给出实物粒子与光量子耦合时质量和能量转变的细节问题，只能在三维坐标空间和一维独立的时间坐标中讨论微观客体断断续续的、不连贯的运动行为。即使是相对论量子力学，由于 Hilbert 空间的原型空间是 Euclidean 几何，所以我们也不能讨论高速运动粒子与光量子耦合的准确情况。因此，说 $|\psi|^2$ 是发现粒子的几率，虽然正确但不完整。因为微观粒子的质量变化，所以能量和质量的转变缺少光量子的参与是有缺陷的，在三维 Euclidean 空间中也是无法描述的。就是说，用三维 Euclidean 坐标空间不可能准确地描述微观客体

的时空运动规律，它的决定性和因果律也遭到了破坏。当用实验仪器观察微观客体运动行为时，由于不能控制和得到某个粒子与光量子耦合的准确信息，同一个实物粒子的质量增减、能量变化等因素可能在不同实验条件下，不同的仪器和不同的测试中给出不同的结果。所以按哥本哈根学派说法，把可观察量作为建立理论的基础与依据，可观察量表现了实验环境中的客体的行为与性质就可以理解了。由于微观领域的基础理论存在缺陷，导致力学的因果律和决定论遭到破坏，采用哥本哈根学派说法不失为一个权益之计。

将哥本哈根学派说法作为权益之计，说明传统量子诠释有瑕疵，有局限性。这涉及建立量子理论的几何性质，涉及类时区与类光区的关联，也涉及微观客体与光量子的耦合。在三维空间孤立地确定微观客体的波粒二象性是一种思辩和假设，对电子衍射的解释也带有神秘性和非物理性。量子理论涉及实物粒子与场的相互作用，必然应该考虑实物粒子和光量子的几何对应问题，考虑三维空间与四维空间的几何关联。或者说，在三维空间严格确定量子系统的状态是不可能的，说不清光量子的局域性量子诠释的因果性就存在问题，只有在四维时空中微观客体严格地确定系统的状态和因果性，才可以通过实物粒子和光量子几何关联给出决定性描述。

传统量子力学所对应的数学工具是以 Euclidean 几何为原空间所抽象出的 Hilbert 相空间，相空间中每一个相格对应一个有静质量的实物粒子，这种相空间由于没有光量子的对应区域，所以不可能把实物粒子与光量子通过几何结构联系起来。传统的 Minkowski 几何虽然有类光区，亦即光量子的对应区域，但虚单位 $i(i^2=-1, i^*=-i)$ 没有与几何空间取得内在的逻辑关联，无法给出 Minkowski 几何的局域性质和邻近关系，甚至不能讨论几何空间的两点问题。因此，时空位矢只能以乘法缩并而不是通过内积的形式表示时空间隔不变量。不能抽象出完备的内积空间就给不出与 Minkowski 几何相关联的 Hilbert 空间，也不可能对 Minkowski 几何进行公理化分析，这是长期以来相对论，特别是狭义相对论与量子力学不融洽的真正原因。因此，态函数的几率诠释不能与相对论的时空间隔取得联系，表现了传统的 Hilbert 空间与 Minkowski 几何的不相容性，使得利用传统的泛函分析理论不能完整地刻画微观客体的运动规律，不能正确地给出量子诠释的原因。

在四维 Minkowski 复空间引入双曲虚单位 $j(j^2=1, j^*=-j)$，使四维时空间隔不变量表示成内积形式，讨论其完备性可抽象出一类广域 Hilbert 相空间。取 J. von Neumann 的量子力学标准体系对应的原空间为 Minkowski 复空间，量子力学可以表述为广域 Hilbert 空间中厄米算符的运算。$8n$ 维相格使类光区和类时区取得了几何关联，物理上对应实物粒子与光量子的耦合，使在四维 Minkowski 复空间中讨论量子个体的决定性问题变为可能。第八章分析了 $|\varphi|^2$ 中隐含了时空间

隔和静质量这两个物理量，由式(8.9.14)和(8.9.7)给出 $\varphi_m^* \varphi_n = 1$ 与 $\Delta X^* \Delta P = 0$ 具有一种等价关系。其中，$\Delta X^* \Delta P = 0$ 中隐含了四维时空的间隔不变量和四维动量间隔不变量，也隐含了实物粒子与光量子耦合中静质量的改变及质量与能量动量间的转变关系。同时，$\Delta X^* \Delta P = 0$，说明四维坐标和四维动量是可以同时确定的，即在四维时空描述微观客体的运动行为时，它们满足决定性条件和因果律。当然，这需要通过双曲复空间的奇异性，用类光区和类时区的几何关联描述实物粒子与光量子耦合所发生的质能转变。这种抽象为广域 Hilbert 空间的四维 Minkowski 复空间，是传统意义上狭义相对论所对应的四维连续时空性质的完善和补充。将类时区中特定方位的几何格空间赋予 Plank 量子假设，分立的非质点相格可清晰地描述基本粒子属性的量子体系，描述微观客体与光耦合的因果行为。在这种意义下，三维实坐标空间描述微观客体的运动规律，所对应的统计诠释不过是四维时空中一个侧面或影子，真正意义上的个体决定论应该在四维时空中通过实物粒子与光量子的耦合的几何关系来进行因果性阐述。

Born 把 $|\psi|^2$ 称为几率密度，微观客体态函数的几率诠释的统计意义体现在 $|\psi|^2 = \psi_m^* \psi_n = 1$ 中。Born 的解释依据量子效应：(1)不确定关系；(2)态函数的几率干涉。其实，这两个量子效应在四维 Minkowski 复空间和广域 Hilbert 空间中都具有因果性的四维量子解释。关系式 $\Delta X^* \Delta P = 0$ 中三维坐标和动量分量隐含了实物粒子的不确定关系，一维时间和能量分量隐含了光量子的不确定关系，两者的联系对应四维确定关系。态函数的的几率干涉、能级理论等量子力学的基本原理也可以通过 $\Delta X^* \Delta P = 0$ 给出因果解释。因此 Born 的几率波解释和统计描述与 Minkowski 时空性质有关。态函数的统计解释与决定论和因果关联并不矛盾，只是这种关联在三维空间中是无法描述的，只有在四维时空才能得到因果性表述，即在三维空间只能是统计性的，在四维时空中才能是决定性的。

Bohr 关于客体和量具关系的论述，是考虑到对原子现象的观察必须要涉及客体和量具之间不能忽略的相互作用，于是就产生了实验观察的准确性与客体状态的确定性之间互斥与互补的关系。Bohr 对互补原理有一个较为普遍的表述，在《原子论和自然的描述》中写到："为了描述我们思维的活动，我们一方面要求和一个在知觉中的主体相对立的有一个客观上给定的内容，而在另一方面，正像这一断定中已有的含义那样，客体主体之间不能有截然的区分，因为知觉主体也从属于我们的思维内容。"对微观客体的观察涉及客体和量具之间不能忽略的相互作用是客观存在的，因为粒子之间以及粒子与光量子之间的耦合或相互作用有时是无法控制的，量具与微观客体的相互作用也是无法预知的，所以测量就显得非常重要。但是不能说，对微观粒子测量就有意义，不测量就没有意义。微观粒子是客观存在的，它与测量无关，只是不测量客体和量具之间就不可能有相互作用，或无法知道它们的相互作用，这与我们的主观意识无关，也不应该将客体和主体之间相混扰。

同时,我们认为,客体和量具之间的干扰与客体和主体之间的区分有着本质上的差别,前者是客观事物之间的联系,后者是客观与主观的区别或唯物与唯心的区别。

量子力学的统计诠释,隐含了实物粒子与光量子耦合过程中静止质量的改变以及能量动量与质量的转变关系,它与传统的经典统计规律具有本质上的不同。经典统计对应着动量守恒、能量守恒以及质量守恒(粒子数不变)的大量粒子,它们中的每一个粒子在三维 Euclidean 空间中遵守着 Newton 力学原理,满足决定性规律和因果关系。而量子力学的统计规律,在三维空间中,其几率解释,发现粒子的几率必须与观察量相联系,其中隐含了不确定关系和态函数的几率干涉,无法给出决定性和因果律的解释;在四维空间,通过时空的奇异性,将类光区与类时区取得联系的函数关系式用以表达实物粒子与光量子的耦合情况。单对实物粒子而言,质量、能量和动量均不守恒。只有将实物粒子与光量子联系起来才能考虑决定性和因果律,才能刻画微观客体的时空行为,Compton 散射就是一个很好的例证。所以微观客体(亚核粒子)的量子特性与四维时空的奇异性质有关,与质量和能量的转变有关。量子统计可以对应大量粒子,也可以对应单个实物粒子,单个粒子的个体决定性由力学规律和电磁规律共同决定。量子统计涉及四维时空对称性和粒子内禀性质的统计规律,涉及四维时空的反演(宇称、时间、电荷)以及正反粒子的对称性变换,以后我们将陆续分析这种统计性质。

最后,我们对两个学派的观点作一简略评价。Einstein 与 Bohr 分歧的焦点是对物理实在的理解,但根本原因应该是数学基础的应用。吴大猷先生就说过:"单独以现行(量子力学)体系的内在一致性为基础反对 Einstein 的态度,正好像以欧氏几何的内在一致性为基础去反对非欧几何一样,是没有说服力的。"然而,我们按传统的、经验的观点去讨论量子力学同样缺乏说服力。根本原因是目前还没有给出一个能令人信服的,量子力学所对应的几何空间。Bohr 完全站在 Euclidean 空间的基础上,来讨论量子力学的几率解释是片面的;用 Einstein 的狭义相对论也不能讨论经典的量子力学,但是将两者结合起来可能给量子力学的经典解释带来生机。其实,前文引用 Einstein 表述物理实在时,认定 Newton 系统的物理实在与 Faraday 和 Maxwell 时代的电磁场概念为一种终极实体已经被普遍接受。但 Newton 力学是与 Euclidean 空间相对应的,而 Maxwell 的电磁场理论却与 Minkowski 空间相关联。在量子力学中,将实物粒子和光量子作为矛盾双方的统一体,所以在讨论微观客体的运动规律时,不应将粒子和场两者分开。即物理上把实物粒子与光量子联系起来,数学上也应将它们所对应的几何空间联系起来。当然,这种联系要突破传统的数学工具,用代数和分析的方法去研究和讨论 Minkowski 空间的几何奇异性以及类时区和类光区的数学关联。描述实物粒子与光量子的相互耦合和转化,遵循着质能转化和守恒的基本规律,这可能会接触到 Einstein 所追求的表述量子力学物理实在的究根。

9.3 也论 Schrödinger 猫

1. Schrödinger 猫的传统观念

德国科学家 Schrödinger 在 20 世纪 20 年代建立了 Schrödinger 方程，为量子力学的建立提供了一个很重要的理论基础。同时他也尝试用一个假想的实验来说明量子力学的微观解释。设想在一个封闭的匣子里，有一只活猫及一瓶毒药，用衰变的原子控制毒药的投放，判断 Schrödinger 猫的死活来表述事物发生的几率。因为具有辐射性的原子可能衰变放出电子，也可能不，即有 50%的机会在某一特定时间内发生衰变。如果衰变不发生，瓶子不被打破，猫是活的；衰变发生时，药瓶被打破，猫将被毒死。在现实世界中，猫非死即活，只有两种可能，猫有 50%的机会被毒死，也有 50%的机会活着，不可能处于第三种情况。Schrödinger 的量子力学方程可以告诉我们，匣子里面两种版本的态函数——“活猫”和“死猫”，是同样真实的。

但坚持量子力学正统解释的学者认为，可能存在一个中间态，猫既不死也不活，直到进行观察看看发生了什么。人要不进行那么一瞥，一切都是不真实的。哥本哈根解释是从一个不同的角度来看这些几率的。他们认为，从效果上这两种态函数都同样是不真实的，当我们往匣子里面观看时，它们当中有一个固化为现实，即态函数进行了坍塌。这就像双缝实验中电子通过两缝的几率相同一样，这两种可能性的重叠将产生一个态的“叠加”。所以对辐射的衰变与否也具有相等的几率，从而产生一个态的叠加。在这个实验中，猫和所有的一切，都受这样一个规则所支配。只有当我们观察这个实验时，叠加才是“真的”，只有在观察的一瞬间，态函数才坍塌为其中一个态。在我们观察之前，猫的死活是不确定的，谈论猫的死活是没有意义的，毒药瓶既不被打破，又被打破；猫既是死的，又是活的；既不是活的，也不是死的。这就是 Bohr 的客体主体之间不能有截然的区分，知觉主体也从属于我们思维内容的观点。

如何通过 Schrödinger 猫来表述量子客体的真实性。想象一个基本粒子，例如电子既不在这里又不在那里，或不能准确地说，电子何时出现在空间的某处，而是以一定几率在空间分布着的，这是可以理解，但 Schrödinger 猫的哥本哈根解释似乎违背了日常词汇中的真实性。常识中，难以想象一只熟悉的猫，处于这种形式的假死状态。但哥本哈根解释告诉我们，常识并不一定是真实的，对于量子世界，不要相信我们的常识，而要相信我们直接看到的并用实验设备准确测量的结果，如果不进行测量，就不能说粒子发生了什么。在描述量子行为时，哥本哈根解释将客体和主体混为一谈。

2. 传统理论对 Schrödinger 猫的质疑

许多人认为,Schrödinger 猫的哥本哈根解释存在瑕疵,并遭来一大批科学家的反对和质疑,这种质疑的声音一直持续到几十年后的今天。最典型的是,Einstein 他不承认 Schrödinger 猫的非真实态之说,也反对世界是由一大堆量子层次上的随机选择而决定。他花了数年时间企图设计一个实验,来检验这种内在真实性是否确实在起作用,但 Einstein 至死也没有完成这个实验。Einstein 始终坚持他的观点:态函数所描述的无论如何不能是单个体系的状态,它所涉及的是多粒子体系,从统计力学的意义上说就是"系综",即在他的《物理学与实在》中所提到的"统计系综"的解释。Einstein 最典型的实验检验是 EPR 佯谬,它是 20 世纪 30 年代早期,Einstein 和 B. Podolsky 以及 N. Rosen 一起写的一篇文章。它与 Schrödinger 猫的文章在同一年发表。Einstein 将 Schrödinger 的观点看做是证明量子波动描述是不完备的最佳途径。之所以称谓佯谬,是因为它揭示了量子真实性的非逻辑性(不符合常识)。EPR 佯谬的主要思想是,假设有两个粒子,它们之间存在相互作用,靠近后再分离,如没有与其他物体相互作用,每一个粒子都有自己确定的动量和位置。过一段较长的时间,当知道其中一个粒子的动量和位置时,另一个粒子的动量和位置也应该知道。即我们同时推算出远处粒子的动量和位置,是违背不确定原理的。或者说,对一个粒子的测量,结果影响了别处的伙伴,这违背了因果律。这是空间中的一个即时"通讯",称为"类空作用"。EPR 文章断言,如果你接受了哥本哈根解释,那么它使得第二个系统的位置和动量依赖于对第一个系统的测量过程,但客观规律找不出理由能够允许这种依赖性的存在。

尽管 Einstein 不接受哥本哈根解释,人们也不满意非因果性的量子诠释,从理性上人们认为哥本哈根解释是有欠缺的,但经过几十年的考验,始终没有动摇量子正统解释的根基。后 Einstein 时代有许多量子解释的版本,在此我们简略地作一介绍。其一是 Bohm 的隐变量理论,Bohm 用可存在量来取代正统理论中的可观测量。就是说,在量子力学本体论中可存在量有两类:一类是定域的(如粒子变量),另一类是全域的(如态函数),前者的行为方式受后者支配。Bohm 认为,微观粒子的概念具有本体论意义,运动的粒子不但受到经典势的作用,也受到量子势的作用,而量子势是由全域的态函数所决定的。

引起人们关注的还有量子力学的多世界解释,它起源于 20 世纪 50 年代 Everett 的工作。Everett 的解释是,整个宇宙叠加的态函数相互作用,以产生在量子水平上可测量的干涉的选择性,现实并不坍塌,它们中的每一个都是同样真实的,在"超空间"(和"超时间")内自己那一部分中存在。当我们在量子水平上做一次测量时所发生的事情就是观察过程迫使我们从这些选择项中选出一个,这一个就成为我们看到的"真实"世界。用 Schrödinger 猫来表示量子力学的多世界解释,就是

匣子里面有两种版本的态函数——“活猫”和“死猫”，两者是同样真实的。但它们位于不同的世界中，当我们往匣子里观看时，它们中的一个固化为现实。Everett的多世界解释包含了这样一个哲理，即将来是不确定的，过去是确定的，通过观察可以从多个现实中选出了一个“真正的”历史。量子力学的多世界解释所给出的预言与哥本哈根解释的观点完全一致，但它绕开了主观与客观的混扰。在量子高速公路上的每一个枢纽，都有很多新的现实产生，但是通向我们的路却是清晰的、毫不含糊的。坦率地讲，多世界解释可能更接近量子的真实性，但多世界的概念却暗藏很多玄机。

20世纪70年代，Van Fraassen提出量子力学的模态解释，他首先把系统处于某态与某观察量区别开来考虑。模态解释认为，量子力学的态是由一组本征态叠加而成的，每一种本征态都可能出现，也都对应一个确定的值，称为可能事件态；而测量的结果只能是该组本征态中任何一个本征态所对应的本征值，该本征态的出现是“一定的”，具有唯一性，被称为“实际事件态”。而测量是从可能到现实的过渡，也是从可能事件态到实际事件态的过渡。模态解释也隐含了本征态和本征值的非等价性，即粒子可能出现的态与可观察量是不等价的，态与值都是不等价的。

3. 四维时空中的Schrödinger猫

现在把话题转到四维Minkowski几何中的Schrödinger猫。显然量子力学中的Schrödinger猫不能用现实猫的死或活来反映微观量子的真实性，因为常识中的猫具有单元性，而量子力学中实物粒子和场具有二元性。对于广域Hilbert相空间我们可以设想这样一个假象模型，无数个非质点相格对应无数个相同的猫笼，每个猫笼都可能出现一只猫(实物粒子)。所有猫笼构成Hilbert空间的相空间，每个猫笼是相空间中的一个相格。有一种鼠妖(可能就是Einstein所说的鬼波)，可以在猫笼间穿行，构成了猫笼的全域背景。猫可以随时吃掉或吐出鼠妖(以表示电子吸收和放出光量子)，但猫吃掉或吐出鼠妖后，会出现在新的猫笼中并变成新的猫。人们对所有的猫笼谈论猫的个性是没有意义的，只有观察(测量)到某个猫笼(量子态)，才能发现这个猫笼关着哪只猫(波包塌缩)，或谈论是黑猫还是白猫(厄米算符的运算)。这种观察(测量)或人为的一瞥很重要，因为它涉及从猫笼到猫的过渡，涉及或然性到必然性的转变。这个假象模型像神话故事，在经典物理和传统的量子力学中是无法列举的。因为在经典物理和传统的量子力学中无法描述鼠妖的行踪(光量子的时空间隔为零)，也不能通过鼠妖在猫笼间穿行来描述各个猫笼的因果联系(传统Hilbert空间分立相格相互独立)，更不能说清楚猫吃掉或吐出鼠妖后，所变成的新猫(无因果性)。所以，不能客观地说清猫和鼠妖的关系，也就无法给出微观量子的真实性。

传统量子力学缺少与之相对应的几何空间，微观客体无法给出时空对应点，这

时讨论态函数的几率诠释显然有其局限性。这好比在二维的影子平面不可能正确、全面地描述三维质点的运动行为。同样，在三维影子空间，也不可能正确、全面地刻画四维空间中微观客体的运动规律和耦合关系。我们说量子猫不等同于现实猫，量子猫可以由白猫变为黑猫，可以大猫和小猫互变，亦可以猫变为鼠妖，或鼠妖变为猫。现实中猫这样的变化人们可能认为是魔术，并不知道也不了解变化的细节；但对量子猫而言，这种变化确实是很自然的。正粒子（白猫）或反粒子（黑猫）通过质量间隙吸收或放出光量子（鼠妖），以及它们之间相互耦合并产生和湮灭粒子对，这都可以通过双曲 Minkowski 几何的方向奇异性而得到演变细节和因果关系。当然，这需要建立以 Minkowski 几何为原空间的 Hilbert 空间，在狭义相对论和量子力学统一的数学框架下得以实现。对现实猫（实物粒子）而言，由于缺少描述鼠妖（光量子）的方法和手段，猫的变化和行踪只能用大概和可能的词汇是可以理解的。光量子在 Minkowski 几何中为零因子，即时空间隔为零，在 Minkowski 几何或 Hilbert 空间不能描述光量子的局域性，这是传统理论不能描述实物粒子（现实猫）与光量子（鼠妖）转变的真正原因。

"猫"和"猫笼"的关系类同于 Van Fraassen 的量子力学的模态解释。可以将 Schrödinger 猫对应 Van Fraassen 的量子力学的模态解释中的"实际事件态"，"猫笼" 对应"可能事件态"。"猫笼"对应所有叠加的量子态，一组本征态是一系列"猫笼"。每个本征态都可能出现，都对应一个确定的值，说明每个"猫笼"都有可能关着一只"猫"，对应着"可能事件态"。当实际测量时，哪个"猫笼"关着"猫"，是只什么样的"猫"，是完全确定的，是"实际事件态"。测量是从可能事件态到实际事件态的过渡，也是统计"猫笼"到统计"猫"的转变。所不同的是，"猫"不是经典的猫，它不是不变的，而是随实际测量发生变化的，这涉及有静质量粒子与光量子的耦合关系。Van Fraassen 的模态解释只给出了可能事件态与实际事件态的区别，而对实际事件态的因果性却没有给出令人信服的论述。其实，说清猫和鼠妖的关系，也就描述了有静质量粒子与光量子的因果联系。这种联系不仅仅表现了经典量子力学的统计意义，重要的是这种统计关系是建立在具有个体决定性基础之上的。当然，在经典量子力学中谈论有静质量粒子与光量子的耦合关系，亦即猫和鼠妖的转变关系是有局限性的。

9.4　态函数中的隐变量

探索 Schrödinger 猫的目的就是寻找量子的真实性，但什么是量子的真实性，用 Schrödinger 猫的死或活能反映量子的真实性吗？Feynman 在他的《物理学讲义》中说过，量子力学神秘的核心包含在双缝实验之中。本节从电子的双缝实验入手，试图通过双曲复空间的几何性质结合隐变量理论表述量子客体的运动行为，从

而揭开量子理论真实性和神秘性的面纱。Bohm 的隐变量理论将量子力学本体论中可存在量分为定域的和全域的两类。定域的为可观察量；全域的为背景，并支配可观察量的运动行为。在双缝实验中，当电子通过双缝时，电子本身是定域的，但不是孤立的。它有一个全域的背景，这个背景就是真空，是电磁场，也是电子与光子耦合的时空间。定域的电子在运动中不断地与全域场相互耦合，使全域的背景场带有了定域电子的信息；反之，定域电子的运动受到相干光构成的全域背景所支配，在电子进入双缝前通过吸收或放出光量子使这个真空背景已经形成了相干光双缝衍射的空间分布。当电子一个一个射向双缝后，与真空中叠加的相干光相互作用交换能量，由光的相干条件，在不同空间位置相关光的强度不同，对电子施加的影响也不同，使受到相干光调剂后的电子形成了与相干光类同的衍射条纹。Bohm 的博士生 Philippidis 与 Bohm 的合作者 Haley，用计算机模拟了双缝后粒子的径迹系综，所得结果跟量子理论所预示的屏上粒子密度分布是一致的，说明定域电子与全域场的相互耦合具有微观规律的真实性。

对于如何解释定域和全域的关联问题，可以从 J. von Neumann 的量子力学的标准体系说起。Von Neumann 使量子力学表述为 Hilbert 空间中厄米算符的运算，建立了量子力学的逻辑体系。离散谱 $A^a=\sum_j a_j\sum_k\left|a^a_{jk}\right\rangle\left\langle a^a_{jk}\right|$ 对应于 Hilbert 空间的相空间，每一个分立的量子态对应相空间的一个时空相格。在传统的 Hilbert 空间，原空间为 Euclidean 空间，相格之间没有特殊的联系和约定。但在广域 Hilbert 空间，由于原空间为 Minkowski 空间，每一个分立的量子态对应相空间的一个时空相格，非质点相格最小线度表示实物粒子的特征长度。由于 Minkowski 空间的方向奇异性，两个不同的相格之间的线度与光量子相干波长的倍数联系起来，使有静质量粒子相互关联的空间线度与光量子的相干波长在 Minkowski 空间中找到了一种几何关联。我们可以描述这样一幅绘景，将 Von Neumann 的量子力学的标准体系表述为 Minkowski 几何所对应的广域 Hilbert 相空间的厄米算符的运算。定域的可观察量（如电子）的 λ_j 是 A^a 的本征值，$\sum_k\left|\varphi^a_{jk}\right\rangle\left\langle\varphi^a_{jk}\right|$ 是与之对应的本征映射，本征态 $|\varphi^a_{jk}\rangle$ 对应广域 Hilbert 相空间的一个时空相格，整个相空间的所有相格都是通过光量子取得因果联系。因此，有静质量的定域粒子的全域背景是用光量子联系的电磁场，它们之间的关联在 Minkowski 空间通过类时区与类光区得到了几何解释。

Bohm 的隐变量理论将量子力学本体论中定域的可观察量看做隐含于态函数中的量子势，写作指数形式 $a=e^{i\phi}$，其中，ϕ 为实数。式(8.5.16)可能就是 Bohm 所追求的隐含于态函数中的量子势。取 $\phi=\frac{1}{2}nk\lambda$，$n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$，则定域

量子势为 $a = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}nk\lambda}$，表示实物粒子量子跃迁前后所对应的空间关联；如果将 $\phi^* = -\frac{1}{2}nk\lambda$ 也看做是相干光的干涉或衍射条件，则 $a^* = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}nk\lambda}$ 为相干光干涉的指数形式。实物粒子与相干光耦合满足相位因子关系式 $a^* a = 1$，使粒子跃迁前后的态函数相等。可以说，Bohm 所追求的隐含于态函数中的量子势应该是实物粒子吸收或放出相干光量子所满足的衍射条件。当实物粒子吸收或放出相干光量子时，它们之间就建立起一种时空联系，实物粒子的空间分布受到了相干光的干涉或衍射条件的调剂，形成了微观粒子类同于相干光的干涉或衍射图样。与光的衍射区别是，实物粒子与相干光量子是二元函数，应该用复指数形式表示它们之间的耦合关系，而归一化相位因子"隐含"在态函数关系式(8.5.15)中。

本征态函数几率诠释的正交归一关系式(8.3.5)对应于 Minkowski 几何，隐含了四维位型空间和四维动量能量空间的零度量关系。复数的二元性体现了复数中实部与虚部的区别和联系，复数的度量或模方表现为时空间隔不变量。当时空间隔为零时，复数的实部和虚部为一种对等关系，应用在物理中包含了实物粒子与光量子的内在关联。如果复数式(1.1.3)的实部 ct 表示光量子的空间量度，虚部 r 表示实物粒子的空间量度，则 $\Delta r = c\Delta t$ 刻画了实物粒子与光量子在相互转化过程中空间量度的等量关系；而 $\Delta p = \dfrac{\Delta E}{c} = p_c$ 刻画了实物粒子与光量子耦合能量动量的等量关系和转化关系。这种三维空间和一维时间的对等关系表现为复数的四维时空间隔为零度量，说明本征态函数隐含了粒子和场的二元性，这是微观客体态函数只能取复数而不能取实数的一个合理解释。

Bohm 认为，不确定关系是由更深层次的隐参量决定的表观现象。四维确定关系 $\Delta X^* \Delta P = 0$ 应该是三维不确定关系深层次的隐参量，它隐含了量子系统的几何关联，也隐含了定域粒子与全域场的因果关联。四维不变量 $\Delta X^* \Delta P = 0$ 所对应的分量形式具有不确定关系，可写为 $\Delta x \Delta p_x = nh$，$\Delta t \Delta E = nh$，或写成

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant h, \quad \Delta t \Delta E = (c\Delta t)\left(\frac{\Delta E}{c}\right) \geqslant h \tag{9.4.1}$$

从形式上看，式(9.4.1)是三维形式的不确定关系，在传统量子理论中它们具有各种不同的物理诠释。但是在四维 Minkowski 空间，四维时空间隔等于零，对应着四维复数的实部和虚部相等，即

$$\Delta x = c\Delta t, \quad \Delta p = \frac{\Delta E}{c} = p_c \tag{9.4.2}$$

式(9.4.2)说明，三维形式的不确定关系式(9.4.1)在 Minkowski 四维位型空间和四维动量能量空间对应的是一种确定关系，对应着实物粒子和光量子相互转化的等量关系。

不确定关系式(9.4.1)应该与测量无关，它刻画了量子跃迁的因果过程。如果

取粒子两个本征态的空间间隔 $\Delta x = c\Delta t$，吸收或放出的光量子以光速运动，运动时间为 $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$。而实物粒子在跃迁前后动量改变量 $\Delta p = \frac{\Delta E}{c} = p_c$，它与吸收或放出光量子的动量 p_c 相对应。量子跃迁式(9.4.2)满足动量守恒和能量守恒。坐标与动量的不确定关系和时间与能量的不确定关系表现了一种对等关联，这时的时间间隔应该是量子跃迁时吸收或放出一个光子的时间，也是实物粒子跃迁前后位置改变的时间。这些量子信息应隐含于式(8.9.14)本征态函数归一化表示的相位因子之中，它们通过指数形式表现为量子势 $a = e^{\frac{1}{2}ink\lambda}$ 和 $a^* = e^{-\frac{1}{2}ink\lambda}$。所以，本征态函数的几率诠释隐含了不确定关系，隐含了电子与相干光耦合的干涉和衍射条件。

量子势与无限维广域 Hilbert 相空间对应起来，赋予了非欧空间的几何意义。只有当电子吸收或放出光子或与光信号取得因果联系时，它们共同表现为波粒二象性，这也应该为本征态函数几率诠释的隐变量。由修改后的波粒二象性式(7.4.2)，取波数 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$，圆频率 $\bar{\omega} = 2\pi\nu$，则 $\Delta p = \frac{h}{\lambda} = k\hbar$ 和 $\Delta E = h\nu = \hbar\bar{\omega}$。所以本征态函数关系式(8.9.13)和(8.9.14)的虚指数因子中包含了实物粒子与光量子耦合过程中所表现的波粒二象性，具有微观客体量子跃迁的因果性质。在式(8.9.2)或(8.9.5)中，$\Delta X(\Delta x, \Delta t)$ 是实物粒子在跃迁前后分别对应的空间间隔和时间间隔，$\Delta P(\Delta p, \Delta E)$ 分别为跃迁前后的动量间隔和能量间隔。微观客体在量子跃迁前后的空间位置、时间、动量以及能量是能够确定的。当将它们展开成式(8.9.12)的形式，可显含于式(8.9.13)本征态函数的虚指数中。如果用 $\varphi(x_1, t_1)$ 和 $\varphi(x_2, t_2)$ 分别表示实物粒子在跃迁前后的量子本征态，由 Born 的概率解释，$|\varphi(x_1, t_1)|^2$ 和 $|\varphi(x_2, t_2)|^2$ 是发现粒子的概率密度，但从 $\varphi(x_1, t_1)$ 到 $\varphi(x_2, t_2)$ 满足式(8.5.15)，代表了实物粒子与光量子耦合的持续性和分立性。由于光量子是一个整体，波长有一定线度，量子跃迁以及吸收或放出光量子需要一定的时间间隔 Δt。在这个时间间隔 Δt 的前后，实物粒子的坐标和动量是确定的，只在耦合过程中实物粒子的坐标和动量是不确定的。

复数的二元性可在所对应的复空间中通过几何性质表现出来，而与复数性质相关联的微观客体与复空间之间也应存在内在的逻辑关联。通过 Minkowski 空间类时区的定向格式化，使类时区两个几何点的差值等于类光区的几何点，可用于表示类时区的两物理事件与类光区的一个物理事件取得的几何联系。在抽象的广域 Hilbert 相空间中引入这种定向相格对应微观客体的本征态，则类时区的两物理事件对应两个不同的本征态，而本征态之间的量子跃迁与类光区的物理事件相对应。所有的非质点相格与粒子所有的本征态相对应，每一个本征态联系着一个粒子的一个本征函数。某粒子在不断吸收或放出光量子的进程中，其本征态和本

征函数不断地变化，使粒子与场的关联表现了力学和电磁性质的转换关系和因果联系。多粒子对应的任意态函数可以看做是所有单粒子所对应的本征函数的线性组合，则任意态函数的几率诠释为粒子在各个本征态出现的几率，表现了态函数的统计性。所以，任意态函数的几率诠释隐含了不同本征态之间进行量子跃迁的概率分布，也隐含了 Minkowski 空间的几何性质。态函数的几率诠释与 Minkowski 空间的几何性质相联系，在四维乃至八维 Minkowski 空间进行量子解释有助于狭义相对论和量子力学的一元化表述，有助于对非欧空间的了解。

9.5　态函数的几率诠释和因果诠释

本节结合 Born 的观点在 Minkowski 复空间或广域 Hilbert 相空间中论述态函数的几率诠释和因果诠释。Born 认为，不确定关系和态函数的几率干涉对应着两个量子效应，粒子的波动性不能对微观客体从初始状态计算出准会发生什么，粒子碰撞的结果是怎样，这导致几率解释只能是统计性的。Born 放弃因果性解释应该是受到了数学基础存在缺陷的影响，在对孤立客体缺少几何描述的前提下，论述粒子的波粒二象性和不确定关系必然缺乏因果性。只有在广域 Hilbert 相空间中将电子的双缝衍射解释为定域的可观察电子和全域背景的场的相互耦合，通过 Minkowski 复空间类时区和类光区的几何关联，才能对 Born 的几率诠释给出具有个体决定性的因果解释。

为了对 Born 几率诠释赋予因果解释，可以从统计规律性和个体决定性两方面论述。首先讨论统计规律性。量子统计和经典统计的差异应该表现在统计的对象不同。经典力学或狭义相对论力学描述的对象是物体或实物客体，不管是力学规律还是统计规律都对应着数量不同的物体这个客观的研究对象。但量子力学的统计对象并不是实物客体，而是实物客体可能处于的微观状态。Hilbert 相空间中无穷多个分立相格都是实物粒子可能出现的量子本征态，任一态函数 ψ 可用这些本征态函数的线性叠加来表示，如式(8.5.19)。所有量子态发现粒子的概率应归一，这就是一般态函数几率诠释的归一化表示，如式(8.5.20)。前文列举了站点与人的关系，经典统计的对象好比是站点上的人。对单个人来讲，遵守的是必然规律，对多数人的集体行为对应统计平均值，遵守的是或然规律或统计规律；但量子统计的对象不是人而是站点，是人可能出现的所有站点，人在所有站点出现的概率应为一。由于人可以在这个站点，也可以在那个站点，每一个站点出现人的概率都相等。但一旦在某个站点发现要找的人，则该人在这个站台出现的概率就为一，而其他站点出现人的概率应为零，这可能就是量子力学中的“波包塌陷”。Schrödinger 猫的情况也是如此。对所有猫笼取概率统计，发现猫的概率应归一。但要发现猫在哪个猫笼，需要观察和寻找，需要人为的“一瞥”，当确定了猫和某个猫笼的联系，

也就完成了"波包塌陷"。所以，量子统计的对象是广域 Hilbert 相空间中无穷多个分立相格，是微观客体可能处于的所有量子本征态。哪个本征态会发现粒子需要测量，人为的"一瞥"实现了量子力学中的"波包塌陷"，也实现了由或然性到必然性的转变。将式(8.5.20)利用 δ 函数可"塌陷"到式(8.3.5)。当 $x'=x$ 时，本征态粒子出现的概率为一，$x'\neq x$ 的其他本征态粒子出现的概率为零。需要强调的是，粒子的存在是第一性的，是客观存在的；寻找或测量是第二性的，是人为的主观行为。但不测量，只对粒子可能出现的量子态说是发现粒子的概率是没有意义的。人为的"一瞥"，确定了粒子出现的位置和性质，也实现了统计对象从可能的量子态到实物粒子的转变。在测量过程中测量的仪器可能改变粒子的性质，但这并不影响物质存在是第一性的唯物主义观点。

其次，Born 认为量子力学不能对微观客体从初始状态计算出准会发生什么，是缺少对量子个体决定性的描述。在四维时空中，量子个体决定性应表示实物粒子与光量子耦合的量子过程，这是一个二元函数，涉及复数的实部和虚部的关联；而经典描述为实物客体的孤立行为，是一元函数，可用实数表示。经典描述和量子描述的差异还表现在对客体的"过程"和"状态"的不同表述。人所处的站点以及某个有 Schrödinger 猫的猫笼对应着一个状态，人或猫从哪来到哪去是不确定的，但当人和车或猫和鼠妖组合在一起就构成了一个因果过程。在站点如不考虑人和车的联系，就说不清人从哪站来到哪站去，将人和车统一考虑就完成了一个因果过程。同样从 Schrödinger 猫的角度，缺少猫和鼠妖的联系，就说不清大猫变小猫或小猫变大猫，猫变鼠妖或鼠妖变猫的客观过程，将猫和鼠妖的转换过程表述出来也就完成了一个个体决定性描述。

量子统计中将粒子和场作为一个辩证统一体，一个个体的量子跃迁对应着实物粒子与光量子的相互作用，考虑它们的相互转换关系就是一个因果性描述，也是一个量子个体决定性描述。式(8.5.15)中 $\varphi(x_1,t_1)$ 和 $\varphi(x_2,t_2)$ 代表不同的本征态函数，对应微观客体的不同"状态"。由量子势 $a^*\ a=1$，将因 $\varphi(x_1,t_1)$ 和果 $\varphi(x_2,t_2)$ 联系起来就完成了一个因果过程，所有态函数的等值联系对应着实物粒子和光量子耦合的微观过程。因此，Born 的态函数几率诠释只对应一个微观状态，是问题的一半，而另一半是联系两个状态间的微观过程。由于本征态之间的联系具有量子个体决定性，应该满足 Born 所追求的对微观客体从初始状态计算准会发生什么的条件，能够表述粒子从哪里来，到哪里去。

经典描述能从初始状态计算出准会发生什么，是有一个能描述物体运动规律的几何背景。而四维 Minkowski 几何应该为量子客体提供这种因果性描述的必要条件。实物粒子耦合光量子前后在类时区对应不同的时空坐标，光量子在类光区也对应相应的时空坐标，通过类时区与类光区几何关联就刻画了一个具有因果性质的量子过程。因此四维时空的因果性对应着物态的二元性质，量子跃迁联系

着 Minkowski 空间的特定方向，联系着类时区与类光区的几何关联。Born 所设定的粒子态函数几率诠释，局限在或延续了经典物理的因果表述，仅对孤立的实物粒子所处某个量子状态进行描述，说不清微观客体准会发生什么，就是缺少一个微观过程的描述，缺少一个几何对应。实物粒子的变化缺少光量子的参与，量子过程仅描述微观客体的独立行为是不完整的，几率解释只具有统计性而不具有因果性就可以理解了。Bohm 追求隐含于态函数中的量子势，只考虑实物粒子而不考虑场或光量子存在的缺陷也在这里，只有将实物粒子和光量子的量子势 $a = e^{\frac{1}{2}ink\lambda}$ 和 $a^* = e^{-\frac{1}{2}ink\lambda}$ 统一起来，才能完整地表述量子力学中的个体决定性，才能对微观客体从初始状态计算出准会发生什么。现在可以完整地给出态函数的几率诠释和因果诠释：

（1）粒子的本征态函数与 Minkowski 空间的零时空间隔相对应，包含了粒子的量子跃迁与光量子的相互作用，隐含了不确定关系、波粒二象性以及粒子与场的干涉条件，具有个体决定性和微观因果性，可以描述微观粒子从哪里来到哪里去。

（2）广域 Hilbert 相空间中，每一个分立相格对应一个微观客体的本征态或量子态，每个量子态出现粒子的概率均相等，一般态函数可以用本征态函数完全集的线性组合表示，态函数的概率密度刻画了量子态的统计分布，所有相格出现粒子的概率满足归一化条件。

（3）可观察量是量子理论的基础，测量使对量子态的统计过渡到对实物客体的统计，是或然性到必然性的转变。测量可以影响粒子客观行为，但客观规律是第一性的。

9.6　找回 Einstein 不掷色子的“上帝”

Einstein 所信仰的不掷色子的“上帝”，是离开人的精神而独立的客观世界，是终极实在，这种物理实在由空间、时间和力等概念来表征。Einstein 承认量子力学是一个富有成效的学说，但认为它并没有接触到事物的究根。因为建立在自然界的规律不是只讲可能性及其变化，而是讲实体在时间和空间上的变化。不能把过渡的不完备的量子力学理论作为真正的自然观来对待，也不能作为否定因果决定论的根据。Einstein 的观点在 Minkowski 空间和广域 Hilbert 相空间中可以得到验证。微观客体本身的运动规律遵循经典力学或狭义相对论力学规律，运动轨迹或世界线与 Minkowski 几何相对应。实物客体与光量子的耦合遵循力学规律和电磁场规律，对应着 Minkowski 空间类时区与类光区在特定方向上的几何关联。显然，量子力学的终极实在对应着广域 Hilbert 相空间，是经典力学、相对论力学和场论的综合体现。

考虑实物粒子与场的综合效应就应该抛弃传统的因果规律和决定论，也应该抛弃 Einstein 所设定的物理实在的传统框架。其实，Einstein 为否定量子解释所

设计的 EPR 佯谬实验，也移植了传统决定论观念。例如，将实物粒子看做客观实在，忽略了态函数中实物粒子与光量子的联系，不交代清楚两个粒子以何种方式相互作用，就无法确定它们之间的因果联系。另外，同时确定粒子的动量和位置带有经典的含义，不适用微观客体的量子解释，显然，这种具有瑕疵的理想实验是难以对量子诠释作出有说服力的解释。在狭义相对论中，Einstein 是站在思辩的立场，以物理基本假设为基础来解释实验现象。传统 Minkowski 空间具有数学算法的局限性，不能解决非欧几何中任意两点间的距离问题，也就不能定义内积空间的度量和范数，这也是量子力学不能给出个体决定性和因果解释的根源。

传统量子力学中的波粒二象性、Einstein-de Broglie 关系以及不确定关系等基本原理和基本假设，在广域 Hilbert 相空间可以从非质点相格的相互关联中得到相应的几何解释。粒子和场共同遵守的 Einstein-de Broglie 关系满足能量守恒和动量守恒。Compton 散射描述了量子跃迁中电子与光量子的耦合，为 Einstein-de Broglie 关系提供了实验验证。所谓的“波粒二象性”应该是实物粒子的波动性和光量子的粒子性形成辩证统一体，单独谈论某个微观粒子的波粒二象性是没有意义的，单独表述实物粒子的因果性也是片面的。将实物粒子和光量子两者的转化和运动规律结合起来才能给出一个完整的，具有因果性质的客观描述，而类时区与类光区的联系为这种因果描述提供了几何背景。因此，不管是表征粒子性的 Compton 散射，还是表征波动性的电子的衍射，在 Minkowski 空间中通过量子跃迁都能得到合理的几何解释。在粒子和场耦合时，空间和动量的不确定关系与时间和能量的不确定关系具有一种等量联系，它们均可作为四维时空间隔和四维动量间隔等于零时的分量形式。当态函数的几率诠释与 Minkowski 复空间零度量联系时，就隐含了波粒二象性和不确定关系，隐含了粒子的几率干涉。或者说，波粒二象性、不确定关系以及态函数的几率干涉是实物粒子和光量子相互耦合的产物。

广域 Hilbert 相空间中，粒子态函数的几率诠释隐含了一个与类时区和类光区相互关联的量子过程，实物粒子和光量子的量子势填补了 Born 放弃个体的决定论的理由的空白。Born 对粒子态函数的几率诠释由于缺少表示光量子参与的量子过程，粒子的突变、从哪里来、到哪里去是无法进行因果描述的，因此数学基础的瑕疵导致了传统量子描述的不完备性。粒子态函数的几率诠释与 Minkowski 空间的四维时空间隔不变量和四维能量动量间隔不变量相对应，使量子力学所描述的微观理论赋予了非欧几何的数学背景。同时，态函数的几率诠释也隐含了具有因果性质的物理变量和数学变量。类时区与类光区的定向联系使微观客体的运动行为具有了因果性质的几何解释，解决了微观客体从哪里来，到哪里去的问题。这种包含个体决定性的本征态函数，隐含了实物客体与光信号相互关联的因果性质，描绘了量子力学与狭义相对论具有统一性质的几何图景，可能正是 Einstein 所追求不掷色子的“上帝” 和“自然的因果描述”。

第十章　四维时空理论的和谐性与完备性

有人说，数学是物理的工具；也有人说，数学和物理是一对孪生姐妹。其实，“工具”并不能确切表达数学与物理的逻辑关联，对拧紧一个螺丝帽，扳子行，钳子行，用手也行，它们都可作为工具，但它们与螺丝帽之间并没有内在的关联。如果将物理比做螺丝帽，数学看成扳子、钳子，它们之间并不具备深层次的关联。数学作为物理的基础是一个不争的事实，但如何摆正数学、物理以及哲学的关系，是一个值得探讨的问题。对个别的物理问题，可以抛开数学的含义和计算，也可以不赋予其哲学意义。但对整个系统理论，从和谐性和完备性的角度就需要考虑数学基础框架和哲学解释的问题，需要理顺三者的内在关联。数学与物理的关联，最重要的也是最直接的就是时空理论的联系。时空理论的对称性、和谐性、完备性以及物质不同形态在时空中的演化和转变过程，都可归结为数学与物理深层次的内在关联。

10.1　时空相格间的不变量

微观客体对应广域 Hilbert 相空间的非质点相格，相格之间的定向关联对应 Minkowski 复空间的方向奇异性，这种定向相格之间的内在关联可以描述实物粒子与光量子的耦合关系。式(8.9.1)对应物理事件 $X_1(ct_1,\mathrm{j}x_1)$ 和 $X_2(ct_2,\mathrm{j}x_2)$ 的时空间隔不变量，将式(8.9.1)中两式相加和相减，有

$$\begin{cases}X_1^* X_1 + X_2^* X_2 = R_1^2 + R_2^2 \\ X_2^* X_2 - X_1^* X_1 = R_2^2 - R_1^2\end{cases} \tag{10.1.1}$$

取

$$\begin{cases}R^2 = \dfrac{R_1^2 + R_2^2}{2} \\ \Delta R^2 = \dfrac{R_2^2 - R_1^2}{2}\end{cases} \tag{10.1.2}$$

则

$$\begin{cases}R_2^2 = R^2 + \Delta R^2 \\ R_1^2 = R^2 - \Delta R^2\end{cases} \tag{10.1.3}$$

式(10.1.1)至(10.1.3)为两个用光信号联系的物理事件时空间隔的几何关联。这一方面说明，如果两个物理事件对应 Hilbert 相空间的相邻相格，相格间的度量应为

坐标变换不变量；另一方面，当类时区的两个时空点或两个物理事件 $X_1(ct_1, \mathrm{j}x_1)$ 和 $X_2(ct_2, \mathrm{j}x_2)$ 用光信号取得因果联系时，它们各自对应时空点的间隔不变量要发生改变。也就是说，微观粒子吸收或放出光量子的前后，在 Minkowski 复空间对应不同的时空相格，它们的时空间隔不变量发生的改变量为 $\Delta R^2 = \dfrac{R_2^2 - R_1^2}{2}$。

在 Minkowski 复空间的类时区引入

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{2}(X_1 + X_2) \in \mathbf{C} \\ \Delta X = \dfrac{1}{2}(X_2 - X_1) \in \Xi \end{cases} \tag{10.1.4}$$

有关系式：

$$\begin{cases} X_1 = X - \Delta X \\ X_2 = X + \Delta X \end{cases} \tag{10.1.5}$$

式(10.1.5)为两个物理事件的几何关联，而式(10.1.4)中第二式满足式(8.9.2) $\Delta X^* \Delta X = 0$，说明实物粒子的量子跃迁所对应的光量子时空间隔为零。式(8.9.2)的分量形式满足 $\Delta x = c\Delta t$，即时空不变量的时间分量和空间分量具有等量关系，当空间量子化时，时间也应该对应量子化。

在动量空间取 $P_1\left(\dfrac{E_1}{c}, \mathrm{j}p_1\right)$ 和 $P_2\left(\dfrac{E_2}{c}, \mathrm{j}p_2\right)$，为两个用光信号联系的物理事件的四维动量。分别取内积，有

$$\begin{cases} P_1^* P_1 = \dfrac{1}{c^2}E_1^2 - p_1^2 = m_{10}^2 c^2 \\ P_2^* P_2 = \dfrac{1}{c^2}E_2^2 - p_2^2 = m_{20}^2 c^2 \end{cases} \tag{10.1.6}$$

式(10.1.6)是用光信号联系的两个物理事件分别对应的质量能量关系式。在 Minkowski 复空间的类时区中 $P_1\left(\dfrac{E_1}{c}, \mathrm{j}p_1\right)$ 和 $P_2\left(\dfrac{E_2}{c}, \mathrm{j}p_2\right)$ 的连线平行或垂直类光区，满足式(8.9.4)。取内积对应式(8.9.5)为实物粒子与光量子耦合所对应的能量动量关系式。将式(10.1.6)两式相加和相减，注意到式(8.9.4)，整理后得

$$\begin{cases} P_1^* P_1 + P_2^* P_2 = m_{10}^2 c^2 + m_{20}^2 c^2 \\ P_2^* P_2 - P_1^* P_1 = m_{20}^2 c^2 - m_{10}^2 c^2 \end{cases} \tag{10.1.7}$$

取

$$\begin{cases} P = \dfrac{1}{2}(P_1 + P_2) \in \mathbf{C} \\ \Delta P = \dfrac{1}{2}(P_2 - P_1) \in \Xi \end{cases} \tag{10.1.8}$$

有

$$\begin{cases} P_1 = P - \Delta P \\ P_2 = P + \Delta P \end{cases} \tag{10.1.9}$$

式(10.1.9)为两个物理事件在动量空间的几何关联，对式(10.1.8)按式(7.7.8)的算法取内积，有

$$\begin{cases} P^* P = \dfrac{1}{4}(P_1 + P_2)^* (P_1 + P_2) = \dfrac{1}{2}(m_{10}^2 c^2 + m_{20}^2 c^2) \\ \Delta P^* \Delta P = \dfrac{1}{4}(P_2 - P_1)^* (P_2 - P_1) = 0 \end{cases} \tag{10.1.10}$$

式(10.1.8)中第二式满足式(8.9.5) $\Delta P^* \Delta P = 0$，说明实物粒子量子跃迁所对应的光量子四维动量间隔为零。在四维动量空间所对应的相格线度也应为坐标变换不变量，或对应分量形式

$$\Delta p = \frac{\Delta E}{c} \tag{10.1.11}$$

式(10.1.11)可改写成

$$\frac{E_1}{c} - p_1 = \frac{E_2}{c} - p_2 \tag{10.1.12}$$

式(10.1.11)和(10.1.12)使两个物理事件的动量改变量和能量改变量具有了对等关系。

10.2　时间量子化

在位型空间中，式(7.1.1)的时间分量满足分立关系式

$$c\Delta t = c(t_2 - t_1) = d\lambda, \quad (d = \pm 1, \cdots) \tag{10.2.1}$$

或

$$\Delta t = \frac{d\lambda}{c} = \frac{\mathrm{d}}{\nu}, \quad (d = \pm 1, \cdots) \tag{10.2.2}$$

取式(10.2.2)中 λ、ν 分别为光的波长和频率，说明了两个不同物理事件的因果联系需要一定的时间间隔。Δt 与实物粒子吸收或放出的光量子的频率有关，对此有与传统理论不同的观点。首先，令式(10.2.1)和(10.2.2)中 $d = 1$，$\Delta t = \dfrac{1}{\nu}$，说明用光信号联系的两个物理事件在 Δt 内光量子传播的空间距离为 $\Delta x = c\Delta t = \lambda$。取 $\Delta t = \dfrac{\lambda}{c} = \dfrac{1}{\nu}$ 为两个物理事件取得因果关联最小时间间隔，也是粒子进行量子跃迁吸收或放出一个完整光量子的时间间隔。如果光量子运行一个空间周期为一个波长，需要的时间间隔 $\Delta t = T$ 为一个时间周期，这也是粒子量子跃迁所对应的最小时间间隔。光量子的波长和频率量子化，对应时间间隔也是量子化的。一般说空间某点的波长为多少是没有意义的，因为 λ 在空间应具有一定的线度。时间间

隔 Δt 与光量子的相干波长 λ 有关，因而 $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$ 也没有意义或同时性没有物理意义。用光信号测量相空间的非质点相格应具有最小的几何线度，微观粒子与光耦合所具有的波粒二象性也是通过相格的最小几何线度来刻画的。波动性具有非质点的特性，而 $\lambda = 0$ 或 $\Delta t = 0$，使微观客体只能抽象为几何点。

$\lambda \neq 0$，则 $\Delta t \neq 0$，即 $c\Delta t$ 与光量子的波长和频率 λ、ν 构成一种单值关系，说明它们之间存在一种内在联系。将时间间隔 Δt 看做量子理论描述微观客体具有波粒二象性内禀性质的重要因素，这与传统物理中对时间的理解具有本质上的区别。在传统量子力学中时间是一维连续的、与客体内禀性质无关的物理参数。在时间流失的过程中，表示实物粒子内在性质的物理量，如波长和频率并不能随着时间间隔的不同而改变。时间是一个具有外在性质的可描述客体运动规律的物理量。两者的差异如何解释呢？其实 $c\Delta t = x_c$ 对应着光量子传播距离，如果用 Δx 表示微观客体最小的非质点线度，$c\Delta t = \Delta x$ 可以认为光信号在 Δt 的时间间隔内以光速 c 传播了 Δx 位移。$\Delta t = \frac{\lambda}{c} = \frac{1}{\nu}$ 可看做光信号与有静质量粒子相互耦合的时间间隔，也可表示实物粒子在吸收或放出整个光波的最小时间间隔，Δt 的改变，必然引起 λ 或 ν 的变化。用光的波长 λ 联系实物粒子两物理事件的空间线度，则 Δt 与 λ、ν 的单值联系就描述了微观客体与光耦合所具有波粒二象性的内禀性质，Δt 与 λ 也就建立了一种等价关系。传统量子力学将时间看做外在参数，没有考虑事物的整体性和辩证性。在 Euclidean 空间或 Minkowski 空间单独描述实物粒子的运动行为，时间具有一种外在性质，这是经典物理或狭义相对论的思维模式。广域 Hilbert相空间的非质点相格，空间间隔和时间间隔是一个辩证统一体，时间量子化与能量量子化具有一种等价关系。量子跃迁时粒子能量的改变需要一定的时间间隔，需要弛豫时间带来的滞后效应，这应该是耦合一个完整光量子在空间运行一个波长所需要的时间周期 $\Delta t = \frac{1}{\nu}$。

Δt 与 λ 具有的等价关系有其特定条件限制，这个特定条件就是描述实物粒子与光量子耦合时所对应的两个物理事件的类光间隔。从几何角度，在四维 Minkowski 复空间实物粒子对应的非质点相格的连线平行或垂直类光区域，它们之间的因果联系是通过传递光信号来进行的。时间量子化是类时区与类光区几何关联的重要特征，表现了四维 Minkowski 复空间的方向奇异性。从物理角度来讲，实物粒子和场是物质的两类重要组成部分，它们之间的耦合具有客观规律性，是真实存在的自然规律。脱离粒子与光量子耦合这个条件和规律，时间就由内在因素转变为外在因素，由分立性质转变为连续性质。在狭义相对论中，描述高速物体的运动规律，时间和空间不再是相互独立的，它们结合在一起满足 Lorentz 变换。但时间是连续的，因为它只描述粒子的运动规律，只是类时区内时空点的演化

问题,不涉及粒子与光耦合问题,不涉及类时区与类光区的联系,也就不存在 Δt 与 λ 的等价问题。在传统的量子力学中由于没有几何结构对应关系,时间间隔不能表现这种内在的等价关系,就不能用以刻画微观客体的内禀性质。经典量子力学将时间看做独立于空间之外的参量,没有关注到这个与量子跃迁相联系的特定条件,时间间隔也就不能作为与物质内禀性质有关的物理量。

Δt 与 λ 或 ν 的关联代表了微观客体与光信号联系的因果性。考虑因果关联,就要考虑不同空间位置物理事件相互关联的时间间隔或由于弛豫时间带来的滞后效应。而微观客体与光量子耦合所关联的光的波长、频率具有分立值是客观存在的,并与微观客体的非质点线度和波粒二象性相关联。我们经常说"同时测量",一方面,两个事件的同时性对微观客体来讲是一种超距作用;另一方面,将时间间隔与测量联系起来,有一个主观和客观的辩证关系问题。测量包含人为的主观成分,它是与微观客体内禀性质无关的外在因素。强调同时性(或超距作用),即 $\Delta t=0$,违背了不同时空相格所对应的不同物理事件的因果联系或滞后效应。在 Minkowski 复空间中,同时性对应两事件的类空间隔,所以"因果关联"和"同时性"是不相容的。由于同时性排斥因果关联,我们在选择微观客体的非质点线度和波粒二象性就要摒弃同时性和同时测量,也就是说,在量子理论中说"同时测量"是没有意义的。Δt 是实物粒子对应的两个物理事件与光量子取得因果联系时所产生的时间间隔,也是光量子在 Δx 空间线度中的运行时间,这也排斥了以亚光速进行的测量手段。对事件进行亚光速测量只能对实物客体本身的运动规律进行描述,不能表述实物粒子与光量子耦合情况。这时的实物客体对应类时区的类时间隔,只具有粒子性不具有波粒二象性,时空只具有连续性而不具有分立结构,时间应表现为外在因素。所以对具有波粒二象性的微观客体进行测量只能使用光信号,但测量时外加的光信号可能改变客体的物质性,这时 Δt 就与测量有关。测量影响粒子规律性的改变是客观的,是不以人的意识而转移的。

10.3　时间算符和能量算符

在量子力学中,Δx 和 Δt 表征了实物客体与光量子的内在联系,时间不应看做外在的参数,而是与物理事件内在性质相关联的物理量。这种联系与 Minkowski 复空间的时空性有关,空间的方向奇异性和分立结构与微观客体的非质点线度和波粒二象性相对应,使微观理论描述的时间不再是连续的,而是间断的、分立的。Δx 和 Δt 分别联系着 Δp 和 ΔE,则 Δx 和 $c\Delta t$ 的等量关系对应着 ΔE 和 $c\Delta p$ 相互转变的等量关系。它刻画了微观客体与光量子耦合时所具有量子化的标准和量度,为量子理论的基本原理带来了新的观点和内容。

Minkowski 四维空间将三维空间和一维时间有机地结合起来,实物客体和场

的不同的运动形态和转换规律具有不同的描述方法。描述低速运动物体本身的运动形态时，时间和空间相互独立，时间可看做外在的独立参数；描述高速运动的客体时，Lorentz 变换使时间和空间不再相互独立，能量和动量也不分别守恒，四维时空和四维动量形成了一个辩证统一体，但时间仍是一个外在参数；描述微观粒子与光子耦合时，四维时空类时区与类光区的几何关联表现了奇点与非奇点的联系，时间和空间的概念不再是主要矛盾，实物粒子本身的运动形态也不是主要矛盾，取而代之的是物态之间的转换关系，即实物粒子与光或电磁场的转换关系上升为主要矛盾，时间就成为一个与物态转换有关的内在因素。

实物粒子和场作为两种不同的物质形态可对应不同的力学量和数学算符。通过四维时空的力学量变换，给出了实物粒子的算符为[参见第二十四章式(24.4.13)和(24.4.20)]

$$\begin{cases}\hat{\vec{r}} = \mathrm{j}\hbar\,\nabla_p = \mathrm{j}\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial\vec{p}}\\[2mm] \hat{\vec{p}} = \mathrm{j}\hbar\,\nabla = \mathrm{j}\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial\vec{r}}\end{cases} \tag{10.3.1}$$

对应的时间和能量算符可写为

$$\begin{cases}\hat{t} = -\mathrm{j}\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial E}\\[2mm] \hat{E} = -\mathrm{j}\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial t}\end{cases} \tag{10.3.2}$$

式(10.3.2)中的时间算符在传统量子力学中相对实物粒子而言没有守恒量相对应，所以并不赋予物理意义。但在四维 Minkowski 空间中，类光区的光量子与类时区的实物粒子具有物态间的转换，式(10.3.2)对光量子而言具有了物理意义。由式(10.2.2)，时间间隔 Δt 是光频率 ν 的单值函数，取光速 c 为常量，则 Δt 也是波长 λ 的单值函数，时间算符与描述光量子的物理量相对应。在特定时间间隔内粒子通过量子跃迁发出光量子的频率和波长是守恒量，时间也就有了守恒量相对应。其实注意到式(7.4.1)，光的频率 ν 和波长 λ 也是光的能量和动量的单值函数，所以时间算符对应光量子的动量守恒和能量守恒，时间间隔 Δt 就赋予了与物质内禀性质有关的物理量的含义，它应该是类光区中描述类光粒子具有时空对称性的物理量。

取粒子量子跃迁时吸收或放出的光量子在 Δt 时间内运行的空间位移为 $x_c = c\Delta t$，具有动量 $p_c = \dfrac{E_c}{c}$，相应算符为

$$\begin{cases}\hat{x}_c = -\mathrm{j}\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial p_c}\\[2mm] \hat{p}_c = -\mathrm{j}\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial x_c}\end{cases} \tag{10.3.3}$$

将式(10.3.2)的第一式乘以光速 c，第二式除以光速 c，则式(10.3.2)应该与式(10.3.3)具有类同的形式和物理意义。如果说式(10.3.1)中 $\hat{r}$、$\hat{p}$ 为实物粒子的坐标算符和动量算符，则式(10.3.3)中 $\hat{x}_c$、$\hat{p}_c$ 分别为光量子、中微子等类光粒子的坐标算符和动量算符。在 Minkowski 相空间，$\hat{x}_c$、$\hat{p}_c$ 分别对应着类光区中分立相格的几何量，应该赋予相应的物理解释和力学守恒量。式(10.3.3)可用于讨论实物粒子间相互作用产生的电磁质量和质量间隙，也可讨论真空中类光粒子的运动方程。

取类光粒子满足

$$E_c = m_c c^2 = h\nu = \hbar\tilde{\omega} \tag{10.3.4}$$

所以时间算符也可以写成

$$\hat{t} = -\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial\tilde{\omega}} = -\mathrm{j}\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\nu} = -\frac{\mathrm{j}\hbar}{c^2}\frac{\partial}{\partial m_c} \tag{10.3.5}$$

因此，时间算符为量子力学中实物粒子与类光粒子耦合的特定产物，是描述实物粒子量子跃迁质量与能量转化过程中保持守恒的力学量算符。实物粒子与类光粒子的等量联系满足四维 Laplace 坐标方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{10.3.6}$$

和四维 Laplace 动量方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial p_0^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_z^2}\right) = 0 \tag{10.3.7}$$

对应式(10.3.1)和(10.3.3)，满足关联式：

$$\begin{cases} |\hat{r}|^2 = \hat{x}_0^2 \\ |\hat{p}|^2 = \hat{p}_0^2 \end{cases} \tag{10.3.8}$$

式(10.3.8)将实物粒子和类光粒子的算符通过 Laplace 算符联系起来，刻画了四维时空中实物粒子与类光粒子耦合所对应的对称性和守恒量的关系。

10.4　四维时空理论的和谐性与完备性

20 世纪初 Einstein 的相对论诞生，将理论物理与非欧几何的空间性质联系起来，使人们相信物理与数学之间可能存在一种内在的、深层次的逻辑关联。但 20 世纪 20 年代出现量子力学以后，数学和理论物理开始分道扬镳，人们开始怀疑两者的内在联系。近几十年，数学家和物理学家意识到，现代几何学与物理理论可能存在内在关联，人们提出数学和理论物理重新统一以及打破两者的界限问题。

其实，早在 19 世纪 70 年代，英国数学家 Clifford 就对几何空间与物质世界的和谐性及因果联系提出了许多创造性的观点，只是当时并没有引起人们的关注。

Clifford的高维空间理论的哲学意义在于他最早将三维空间与四维空间辩证地联系起来，并发现高维空间的意义在于它能够为"力"提供一种简单而漂亮的描述。这是第一次有人正确地分离出了高维空间真实的物理意义，即关于高维空间理论实际上给出了一个统一的"力"的绘景。利用Clifford引进的虚单位j，使Minkowski几何与特殊幺正群联系起来，将量子力学与Minkowski空间的分立结构相对应，从而使相对论和量子力学统一在相同的几何空间中。这给我们提出了一个新的课题，一方面可以在数学领域将各个分支，如高等几何、复变函数、数理方程、泛函分析、几何代数通过Minkowski空间的几何结构抽象给出一套系统的非欧理论；另一方面，将这套数学理论应用于现代物理学中，可能会建立起狭义相对论、广义相对论、经典量子力学、相对论量子力学、量子场论统一的数学框架，并找到现代数学和现代物理之间内在的联系，这对于探讨我们这个宇宙的自然规律有其重要的理论价值。

量子力学的基本原理与Minkowski空间的几何关联，使我们应该改变对现代物理学的数学基础的认识。建立狭义相对论和量子力学一元化原理的关键，是应该有一套和谐而完备的描述微观客体运动规律的时空理论。Minkowski空间作为一类平直的四维时空，应该能够描述我们这个世界中微观客体各种运动规律和不同物质形态相互转化的关系。这包括微观客体低速运动时所对应的经典力学，高速运动粒子对应的狭义相对论，低速运动粒子与光量子耦合的经典量子力学，高速运动粒子与类光粒子耦合的相对论量子力学以及粒子间耦合所对应的Yang-Mills场、Maxwell场以及强相互作用场。将物质世界不同形态的运动规律和相互转化规律通过四维Minkowski几何不同的且相互融合的时空性质表现出来，体现了四维时空理论的和谐性和完备性，这也是贯穿本书的主导思想。

狭义相对论与量子力学的融合主要表现在数学基础的关联方面。能否建立一套统一的，具有公理性质的，包含几何、代数、群表示、泛函分析、拓扑结构以及特殊函数等分支的数学理论，作为狭义相对论和量子力学的共同数学基础，是建立两论一元化的关键。统一理论的突破口还是回到绪论中所谈到的关于Hawking的量子引力论和奇点问题上。Hawking想在弯曲的时空中，通过奇点的量子化来找到广义相对论与量子力学的几何联系。尽管Hawking在弯曲时空定义的奇点具有其本身的独特性，但本质上还是类光区与类时区的几何联系，这涉及时空的量子化和物质的非质点化，也涉及有静质量粒子与类光粒子的耦合问题。与Hawking的观点相区别，我们认为狭义相对论与量子力学应该在平直的Minkowski空间中统一起来。Minkowski空间的类时区对应静止质量不为零的客体，类光区对应静止质量等于零的类光粒子和弥散在真空中的场。将类时区与类光区通过几何性质联系起来，用以表述实物粒子与类光粒子的耦合，可能为量子力学提供一个几何诠释。以Minkowski几何为原空间建立一套包含几何、代数、泛函分析等分支的系

统理论，可能为狭义相对论和量子力学提供一套相融合的数学基础。

在 Minkowski 空间描述量子力学的物理规律就要对量子力学的基本原理赋予非欧几何性质，从数学角度涉及 Hilbert 相空间与 Minkowski 空间的关联问题。Hilbert 空间定义为完备的内积空间，即空间的度量或距离是以完备的内积形式描述的。量子力学中态函数的几率诠释作为不变量，与 Hilbert 相空间非质点相格完全集的内积相联系，坐标变换群为特殊幺正群。但传统的 Minkowski 空间的坐标变换不变量为时空位矢乘积的缩并，不具有内积形式，Lorentz 群也不是特殊幺正群。时空间隔不变量不能写成内积形式也就不能定义 Hilbert 空间，这是狭义相对论和量子力学不能融合的关键所在。其实，传统 Minkowski 空间的时空间隔并不具有真正意义上的空间度量或距离，因为度量或距离涉及空间任意两点间的坐标变换不变量。由于 Minkowski 空间具有方向奇异性，从乘积缩并形式抽象出的时空间隔只能对应 Minkowski 空间特殊时空点间的不变量，并不能解决任意两点间的度量问题。

Minkowski 空间的度量涉及非欧几何的时空性质，作为一类复空间也涉及相对应的复函数和虚单位性质。本书借用 Clifford 几何代数中单位矢的定义，在 Minkowski 空间引入双曲虚单位 j，但涉及的范围和作用与 Clifford 几何代数本身的内容和结构是有区别的。其目的只是用双曲虚单位 j 取代传统的虚单位 i，所对应的单复变函数与 Minkowski 空间具有一种内在的逻辑关联。也就是说，利用新的单复变函数所对应的时空性质和运算规则讨论 Minkowski 空间的几何性质、代数性质和分析性质。在双曲型 Minkowski 复空间定义的时空间隔不变量具有内积的形式，可抽象出类时区中任意两点间的距离和度量。特别是类时区的类光间隔刻画了类时区与类光区的几何关联，达到了 Hawking 想通过奇点量子化为有静质量粒子与类光粒子或电磁场耦合提供一种几何解释的目的。双曲复数所对应的 Lorentz 群为特殊幺正群，与量子力学中的群表示具有相同的形式。对内积形式的时空间隔不变量赋予完备性可定义广域 Hilbert 空间，为狭义相对论与量子力学的一元化表述提供了理论基础。

广域 Hilbert 相空间与传统 Hilbert 相空间的本质区别是原空间性质不同，一个为 Minkowski 空间，一个为 Euclidean 空间。量子力学与非 Euclidean 几何相对应，我们面对的首要问题就是如何协调它与传统理论的关系，这涉及 Euclidean 空间与非 Euclidean 空间的辩证关系，也涉及对微观理论的量子诠释。要消除量子力学与狭义相对论的相互抵触，首先要跳出 Euclidean 几何的圈子，由 Minkowski 几何为原型空间抽象出包含类光区在内的广域 Hilbert 空间。因为零因子的添加，使得实物粒子和场的定域区间相区分，双曲复空间方向异性使抽象的广域 Hilbert 相空间中非质点相格不再是相互孤立的，而是通过类时区与类光区的几何关联建立起因果联系，物理上表示实物粒子与类光粒子的耦合或相互作用。在超

弦理论中，将微观客体看做一维弦、二维弦以至于高维弦，但没有类时区与类光区的几何联系，各类弦粒子也只能是相互独立。相互独立的微观客体不能描述它们与光量子或场的因果联系，也就不具有时空理论的和谐性和完备性，这可能也是 Hawking 想建立奇点量子化的初衷。

广域 Hilbert 空间为建立量子力学的个体因果性打开一个突破口，而微观理论的几何化处理是这种因果描述重要环节，它完善了整个微观物理理论的数学框架。以四维 Minkowski 几何为原空间抽象出的泛函分析、非欧代数、Lorentz 群、广域拓扑等数学分支可共同作为描述微观世界的时空理论，在这一框架下将狭义相对论和量子力学有机地联系起来，对建立统一的物理理论具有重要的理论意义。传统量子力学正是因为缺少相应的几何结构，才使得量子力学不能对个体决定性作出因果解释。量子力学主要描述微观客体的运动规律以及粒子与场的耦合关系，微观客体所对应的几何空间应该将粒子和场或光子的对应区域相分离，并通过几何性质将它们联系起来。粒子和场应有各自的力学量，在几何中具有各自的对称性，通过相应的算符描述各自的运动规律。由 Minkowski 复空间抽象出的广域 Hilbert 相空间是完备的内积空间，所具有的非质点相格可通过类光区取得因果联系。量子力学以这种非欧几何作为数学基础，其完备性可以得到保证，微观客体的个体因果性也能够通过几何性质得到合理的解释。

广域 Hilbert 相空间既可以作为量子力学的数学基础，也可以作为狭义相对论和场论的数学基础。但这涉及宏观客体与微观客体、时空的连续与分立以及实物粒子本身运动与粒子和光耦合的区别问题。由 Minkowski 复空间不同的时空性质抽象出不同类别的 Hilbert 相空间可以对不同的物理规律和运动形式作出不同的描述。但从四维几何的整体性质来看，它们之间是和谐的，也是可以融合的，特别是量子力学的几何化处理，像一根链条连接起经典力学、狭义相对论以及场论，使 Minkowski 几何的时空性质更具有完整性。

利用广域 Hilbert 空间可以描述低速运动的微观客体。经典力学用 Cartestan 坐标和 Galilei 变换描述低速粒子的运动规律。在实数域，Cartestan 坐标与三维 Euclidean 空间相对应是无可非议的，但是在复域，Cartestan 坐标与时空间的对应关系确是一个值得探究的问题。在第六章分析了微观领域中 Galilei 变换和 Cartestan 坐标与 Minkowski 复空间的对应关系。复域中，Cartestan 坐标对应的时空间有两个：一个是复 Euclidean 空间，具有各向同性的特点；另一个是复 Minkowski 空间，通常称赝欧空间，具有方向异性的特点。由于后者对量子力学基本原理作出对应的几何解释，我们认为这种复时空间与自然规律存在一定的必然联系，所以我们趋向于这种复空间。这就是说，Cartestan 坐标与双曲复空间相对应，使经典量子力学领域进入了一个非 Euclidean 几何空间。微观低速的基本粒子有别于宏观的经典物体，一方面，低速粒子本身的运动可用 Galilei 变换表述；

另一方面，粒子通过能级跃迁而与场的耦合具有相对论效应。考虑了场和粒子的联系，在几何上也就不能割断描述场和粒子的运动规律和相应时空的关联。就是说，微观客体的运动规律应该考虑三维 Euclidean 空间和四维 Minkowski 空间、Galilei 变换和 Lorentz 变换以及三维空间坐标和一维时间坐标的内在关联。其实，微观低速粒子本质上有别于经典宏观物体也体现在它们能量的区别，经典宏观物体的能量分为动能和势能，可以与 Euclidean 空间相对应。但由于在 Euclidean 空间光速为无限大，微观粒子的静能在 Euclidean 空间找不到几何对应。第七章分析的 Compton 效应，散射前后电子和光量子的能量和动量均发生改变应与 Minkowski 空间建立几何关联。当实物粒子与类光粒子耦合时满足能量守恒和动量守恒，同时也要满足能量动量关系，这其中就隐含了静能要通过质能转变发生改变，这种变化可以通过 Minkowski 空间的几何形式表示出来，所以将微观粒子与 Euclidean 空间相对应是一种时空的错位，只有将它引入 Minkowski 空间才能表现出微观粒子与时空的和谐关系。

利用广域 Hilbert 空间可以描述高速运动的微观客体。高速运动的物体满足相对论效应和 Lorentz 变换，但传统的狭义相对论却没有与 Minkowski 空间性质完整地结合起来。从数学角度上看，完整地描述 Minkowski 空间类时区中两个物理事件的几何联系涉及时空间的度量问题，应该包括类时间隔、类光间隔以及类空间隔三种类型。类时间隔可以描述实物粒子本身运动规律和粒子之间以亚光速取得的因果联系；类光间隔可以刻画实物粒子与场的耦合。由于类光间隔将粒子与场的联系与类时区和类光区的几何关联对应起来，给量子力学赋予了一种几何背景。如果 Maxwell 场与 Minkowski 空间类光区相对应，实物粒子与类时区相对应，则量子力学的几何背景就像一座桥梁将 Maxwell 场和实物粒子的相互作用通过 Minkowski 空间的方向奇异性联系起来。添加 Minkowski 空间类时区与类光区的几何联系，粒子的量子态可抽象为广域 Hilbert 相空间的非质点相格，量子跃迁表示为不同相格间的几何关联，使四维平直空间具有了和谐性与完整性。Minkowski 空间对应的几何、代数、分析、拓扑等数学分支构成的理论框架作为微观物理统一的数学基础可以形成现代物理学完备的系统理论。

实物粒子通过量子跃迁吸收或放出光量子，发生了能量和质量之间的转变。传统理论认为平直的 Minkowski 空间可以表示粒子能量和动量，却不能表现质量，即 Minkowski 空间不具有物质性，而具有物质性的时空为弯曲空间。但是在狭义相对论中，动量能量关系联系着静能或静止质量，结合能的改变对应着质能关系。如果将实物粒子与光量子的转换关系通过 Minkowski 空间的几何性质表示出来，则平直的 Minkowski 能量动量空间就具有了物质性。四维动量的内积对应着能量动量关系，而静能为四维能量动量空间的坐标变换不变量，也是度量或距离。利用 Minkowski 能量动量空间的几何性质可以描述两种物质形态的转换关

系。粒子和场之间有相互作用，表现为弱相互作用、强相互作用以及电磁相互作用，在四维 Minkowski 能量动量空间可以推导出含质量项的 Yang-Mills 方程、Maxwell 方程以及强相互作用方程并建立起它们的统一关联式。

总之，由人为思辩建立起的系统理论具有其局限性，而传统的狭义相对论和量子力学都带有这种思辩的痕迹。以数学规则为基础建立起四维时空理论需要改变人们的时空观，改变对物质形态与时空性质依赖关系的认识。利用非欧几何的公理体系和四维平直时空理论可以囊括狭义相对论和量子力学的物理内容，建立一个自洽的、没有抵触的微观理论体系，它贯穿了数学、物理和自然规律，具有内在关联的和谐性与完备性。特别是，双曲复函理论可以拓展到弯曲度量空间，从而使量子力学、场论、狭义相对论及广义相对论等物理分支在数学形式和物理内容上得以和谐地关联。

10.5 狭义相对论与量子力学基础关联的哲学解释

1. 连续与分立的辩证关系

Dirac 说过："我觉得，现在需要的是建立一种含有几率幅度的相对论新量子理论。这些几率幅度应当以某种符合相对论基本观念的方式而互相适应。"在 Minkowski 复空间中引入微观粒子态函数的几率诠释并使它与四维时空间隔相对应，揭示了相对论与量子理论的内在联系，而这种内在关联与 Minkowski 空间的几何性质有关。Minkowski 复空间的时空间隔为内积形式，可定义为度量空间的距离。非欧几何的方向奇异性使度量具有方向因子和线度因子双重性质(参见第二十一章定义 21.8)。不同方向的世界线由于方向因子的差异，使类时区划分成类时间隔、类光间隔和类空间隔。Minkowski 复空间类时区的多时空间隔对应广域多拓扑理论，由拓扑的不同分类可以对狭义相对论所对应的连续空间和量子力学对应的分立空间的几何关联作出解释。

Minkowski 复空间类时区的类光间隔被命名为场粒子拓扑，在泛函分析中对应第二类 Hilbert 相空间(参见第二十一章定义 21.23)。类时区中两个物理事件的几何连线平行或垂直类光区域，数学上刻画了类时区域与类光区域的几何关联，物理上对应实物粒子与场的耦合。类光间隔使类时区中每一点都伴随着奇点问题，同时也使类光区所对应光量子的性质转移到无奇点的类时区中去讨论，从而形成一套描述类时区与类光区相关联的系统理论。用场粒子拓扑可以对 Minkowski 复空间进行格式化，从而可以抽象出第二类分立的广域 Hilbert 相空间，将它作为量子理论的数学基础可以讨论经典量子力学和相对论量子力学的物理问题。场粒子拓扑排斥了传统量子力学中的瞬时超距作用，取而代之的是，实物粒子通过光量

子或电磁场相互作用，而这种相互作用是以光速在传播的，存在弛豫时间带来的滞后效应。实物粒子本身具有定域性，而光量子具有全域性。它可解释为，在广域 Hilbert 相空间中，具有定向相格的微观客体以跃迁的方式吸收和放出光量子，并与相邻相格的微观客体相互交换光信号，在整个广域 Hilbert 相空间中，所有的微观客体都是通过这种传递光信号亦即与场的相互作用取得了因果联系。场粒子拓扑刻画了量子力学所特有的物理实在，它将微观客体的时间、空间、动量、能量、质量等物理量用广域 Hilbert 相空间中非质点相格表示出来。在 Minkowski 位型空间，四维非质点相格中三维空间分量对应实物粒子间的最小几何关联，一维时间分量联系着耦合光量子的几何线度；Minkowski 能量动量空间中，四维非质点相格的三维动量分量对应实物粒子动量的最小改变量，一维能量分量对应实物粒子的最小能量改变量，也对应耦合光量子的能量。广域 Hilbert 相空间非质点相格之间并不是孤立的，非质点相格所表示的微观客体通过类光区相互地联系起来。这种建立在粒子和场相互关联的基础上的物理实在，在四维双曲 Minkowski 空间中刻画了量子力学中微观客体的因果性，可能接触到 Einstein 所追求的事物的究根。这种四维物理实在是离开知觉主体而独立的外在世界，任何三维解释只能是它的局部，都具有其片面性。传统的、以 Euclidean 几何为原空间的 Hilbert 相空间作为量子力学的数学基础不能完整刻画粒子和场的几何关联，是片面而不完备的。

类时区的类时间隔命名为粒子拓扑，对应第一类 Hilbert 相空间（参见第二十一章中定义 21.23）。因为 Minkowski 复空间中两物理事件的几何连线不平行也不垂直零因子区或类光区，就不能给出场和粒子的耦合关系，也不能进行时空量子化。由于不能给出类时区与类光区的几何关联，也就割断了场与粒子的联系。同时，粒子的特征长度不能用相干波长刻画，也就失去了相空间量子化的意义。这时，相格抽象为几何点，粒子间相互独立但可以相互作用，这就是狭义相对论所对应的四维连续空间。当这种连续空间进行经典近似时过渡到 Newton 力学。显然，类时区的粒子拓扑刻画了 Einstein 的狭义相对论系统以及 Newton 的经典力学系统的物理实在。这种物理实在可脱离类光区的背景，用运动质点来表示实物客体的空间、时间、速度等物理性质。

由此看来，Minkowski 复空间对应着广域多拓扑结构。利用 Minkowski 复空间时空奇异性，可以在同一类时区中使场粒子拓扑和粒子拓扑分别描述分立的量子理论和连续的狭义相对论理论。同时也揭示了 Minkowski 复空间中狭义相对论和量子力学两个物理领域涉及的粒子与粒子、粒子和场、局部与整体、间断与连续之间的辩证统一关系。

2. 统计律与因果律的辩证关系

在广域 Hilbert 相空间中，微观粒子态函数的几率诠释与时空间隔的对应关

系表达了量子力学与狭义相对论互相适应的内在联系，弥补了两论各自的缺陷和片面性。一方面，把量子力学引入非 Euclidean 几何空间，对 $\psi^{*}\psi=|\psi|^{2}$ 不仅能说是发现了粒子的几率，而且能揭示 Einstein 所追求的“自然的因果描述”。另一方面，把狭义相对论内容引入抽象的广域 Hilbert 相空间，可利用几何空间的奇异性用度量公理描述微观客体的运动行为。双曲拟距空间的度量在时空坐标中对应时空间隔不变量，在四维动量坐标为静能不变量，这综合了量子力学和狭义相对论具有共性的物理量。双曲态函数在描述微观客体时，既满足相对论的零度量公理，又满足传统量子力学中的基本假设；既可用几率的观点进行统计描述，也能真实地体现物质的实在。也就是说，它能够揭示出量子力学统计规律与物质实在的辩证统一关系。

Einstein 提出的量子力学中完备性条件是，在一个完备的理论中，ψ 函数和实在状态之间必须有一一对应关系。应该说，虽然微观粒子的几率表述突出了统计规律，但它从根本上反映了物质实在，反映了物质存在的客观性。本征态函数 φ 包含了粒子的量子跃迁与光量子的相互作用，具有个体决定性和微观因果性，这是物质实在的具体表现。物质的可观测量，发现粒子出现的几率隐含了系统的时空间隔和静能，也是实在的具体表现。也就是说，无论怎样测量、是否测量，事件出现的几率和实在都是有意义的，是客观存在的，并不以人的意志为转移。当然，这种实在是在四维时空中进行的，这就是说，微观事物的客观实在性要在 Minkowski 时空里来定义。三维坐标系可看做是四维时空坐标的影子，在三维坐标中不可能反映事物的全部和实在。微观事件在三维坐标系的描述虽然接近常识，但不是事物的全部，只能是事件片面和局部的反映。

Minkowski 复空间中，对量子力学中一些微观机制引入，使场粒子拓扑表现了粒子和场的相关性和互补性。当然，这种互补并不仅仅是传统意义上的粒子波粒二象性的互补关系，而应看做是有静质量粒子的波动性与光量子的粒子性之间的互补关系。场粒子拓扑使 Minkowski 空间的类时区和类光区亦即粒子和场取得了几何关联，离开粒子与场的耦合说实物粒子的波动性是没有意义的。同样，光量子的粒子性也应与实物粒子的相干长度相联系。抛开两者的联系，实物粒子只能表现为粒子性，光量子也只能表现为波动性。Einstein 的实在状态一一对应关系应该囊括实物粒子的力学因素和光量子的波动因素。

量子力学中，粒子态函数的几率诠释，解释为发现粒子的几率。但表现粒子哪些物理量的几率在传统量子理论中并没有交代清楚，也不可能说清楚。在 Minkowski 复空间中，本征态函数的几率诠释对应四维时空间隔和静能，不同的实物粒子对应不同的时空相格，也具有不同的时空间隔和静能。发现粒子的几率是实物粒子与光量子耦合时通过时空间隔的变化和质能转变来表现它们之间的因果联系。虽然我们不能预先判断何时何地发生这种转变的数量关系和直观地论述

系统中某一局部所对应的物理实在细节，但可以通过粒子本征态函数的联系来刻画时空间隔和静能的转变，从而阐述几率诠释的物理含义。

场粒子拓扑中，实物粒子通过交换光量子而进行能级跃迁，但不同能级的粒子能量和质量是不同的。也就是说，在吸收和发射光量子的同时，实物粒子和场之间发生了质能转变。但是，粒子态函数所对应的广域 Hilbert 相空间是由拟距空间和虚距空间共同抽象出来的。态函数的几率诠释所对应的四维时空间隔和动量间隔都是在拟距空间定义的。在拟距空间中，不能描述场的邻近关系和局域性质，光量子的度规为零，由于不能定量刻化光量子，所以它就显得来无影去无踪，被 Einstein 称为"鬼波"。所以，在拟距空间亦即对于态函数的几率诠释说发现光量子的几率是没有意义的。这时的态函数几率诠释只能相对于实物粒子而言，但实物粒子与场发生了质能转变，本身出现物质的亏增不能满足质量守恒，所以也就无法论述量子系统的因果关系，这是量子力学的物理解释不能令人满意的关键所在。为完整地刻画整个相空间量子系统的因果关系，在 Minkowski 复空间用场拓扑描述光量子的定域区间，用虚距空间表示场的度量空间，用虚度规刻画场的邻近关系。把拟空间和虚空间的拟度规和虚度规结合起来，亦即在场粒子拓扑中把场和粒子统一起来，描述它们之间的物质守恒和转化关系，表示它们的因果联系，才能一对一地给出微观客体态函数的实在含义，这可能就是 Einstein 所追求的量子力学中完备性条件。

3. 数学与物理学的逻辑关联

数学与物理学的关系是一个很深奥而复杂的问题，Wiener 曾说过："数学在自然科学中极大的有用性是相当神秘的，没有对它进行的合理的说明。"杨振宁先生曾用一个"二叶理论"来形象地表示数学和物理的关系。他认为数学和物理就像两片对生的树叶，只在基部有少许公共部分，而它们各自有不同的价值观念和学术传统，互相独立地生长。人们常说：数学是基础，是工具。"基础"一词似乎已达成共识，但其中包含有太多的内涵；"工具"一词能否表达数学与物理的逻辑关联值得商榷，例如：拧紧一颗螺丝，可以用扳子、钳子或用手等工具，但这些工具与螺丝都没有逻辑上的关联。如何理解"逻辑关联"的深层次的含义，对判断数学与现代物理学的关系具有重要意义。

数学与现代物理学的关系，可以从局部和整体两个角度阐述。数学作为工具可以解决物理的局部问题。例如，解决某个具体的物理问题，或对应于物理的某个分支，我们可以用这套数学，也可以用那套数学。工具可以不同，但抓住解决问题的共性就可以达到相同的目的和效果，也不需要从根本上找出两者的逻辑关联。对拧紧一颗螺丝，无论用扳子、钳子或用手等工具，利用这些工具的共性，握紧螺丝向顺时针旋转即可，这些工具与螺丝都没有逻辑上的关联。但各个工具之间即有

共性，也存在个性，更可能产生抵触。传统的椭圆复数在现代物理中可能也只起到这种工具的作用，使各个分支在其内部均具有自洽的表述，但存在的个性使相互间有抵触，这也是狭义相对论和量子力学不融洽的根本原因。

整体上看，数学与物理学更形象地应该用筋骨和血肉的关系来形容，筋骨是基础、是框架，筋骨和血肉之间存在着深层次的依存关联，它们相辅相成。当然，这里还包含着不同基础框架之间以及同一框架局部与整体的联系问题，欧氏几何和非欧几何就可以分别形成一套完整的理论体系和基础框架。从数学分类的角度，数学各个分支的逻辑关联影响整个数学公理化体系的完备性建立；从物理学分类的角度，欧氏几何为经典力学提供了一套完整的理论体系和基础框架，而现代物理学中的狭义相对论和量子理论应该对应非欧几何的数学公理化体系。狭义相对论和量子力学的融合涉及数学基础的统一性和完整性，只有在同一个数学体系中，构成一个统一的基础框架才能形成一套完备的现代物理的系统理论。非欧数学作为筋骨和基础需要搭建一个完整骨架，合理地填充现代物理学的内容或血肉才能揭开自然界的神秘面纱，真实地描述物质的运动和转化规律。在相对论和量子力学诞生一百年后的今天，有必要建立起描述我们这个宇宙物质运动和转化规律的数学公理化体系。

第十一章　经典量子力学的数学表述

经典量子力学是描述微观客体在低速运动时的理论体系，通过 Schrödinger 方程可以讨论复合粒子乃至原子和各元素的组成规律。经典量子力学的数学基础为 Hilbert 相空间，其中每一个非质点相格对应一个微观客体的量子态。但 Hilbert 空间的原空间为 Euclidean 空间，没有光的对应区域，使 Hilbert 空间在描述光量子时出现了缺陷，这可能也是微观客体进行统计诠释时不能给出因果解释的原因。将 Minkowski 几何所对应的广域 Hilbert 相空间作为数学基础，通过 Minkowski 空间类时区与类光区的几何联系描述低速微观粒子的运动行为和与光子的相互作用，为经典量子力学赋予了一种非欧几何背景。

11.1　Minkowski 空间的 Schrödinger 粒子

Schrödinger 方程描述微观客体低速运动时的运动规律。经典物理中，宏观低速物体在 Euclidean 几何中用 Newton 力学描述其运动规律，可是在经典量子力学中，微观低速客体却没有相应的几何空间与之对应。这主要是低速微观客体具有三方面重要特征：第一，粒子本身的低速运动满足 Galilean 变换；第二，实物粒子可与场或光量子发生相互作用；第三，低速粒子具有静能和静止质量。这三个特征对单个实物粒子而言是辩证统一体，它们既有联系又有区别。粒子的量子跃迁吸收或放出光量子，使粒子的内禀性质发生突变。Euclidean 空间为连续空间，无法描述粒子的分立结构，也没有光量子乃至场的对应区域，这使得微观理论或 Schrödinger 方程在数学上只能对应泛函分析结构而没有几何结构。低速粒子的静能 m_0c^2 含有光速，在 Euclidean 几何中趋于无穷大无法找到时空对应点，所以，经典量子力学的数学基础为泛函分析中的 Hilbert 空间，缺少几何空间与之对应。

传统的 Hilbert 相空间是以 Euclidean 几何为原空间抽象出的完备内积空间。理论上 Hilbert 相空间应该具有或保留 Euclidean 空间的几何性质，即具有泛函性质的 Hilbert 相空间与原空间不可能发生本质上的变化。将 Hilbert 相空间分解成一系列分立的相格，在量子力学中，每一个微观客体用 Hilbert 相空间的非质点的分立相格描述。假如这种分立相格不加说明地应用于光量子，显然，相空间的分立性以及对光量子的刻画将超越 Euclidean 空间的几何范畴。这种超越不单是几何到泛函分析的跨越，而且是对空间几何性质本质的改变。光量子对应区域的缺失，以及微观客体分立性与 Euclidean 几何连续性的矛盾，对于量子力学是一个不

应回避的问题，因它涉及整个现代物理学的数学基础，也涉及物理各领域的相互关联。空间中的客体不能用空间理论描述，经典量子力学缺失几何结构应是一种不完备的表现。完备的微观理论应该具有公理性质并包含几何分析以及代数结构的数学描述，也应包含和谐的物理理论和哲学诠释。

Minkowski 空间将三维 Euclidean 空间与一维时间有机地联系起来，一方面可以描述微观客体本身的运动规律，另一方面也可描述实物粒子与光量子的相互作用。四维双曲位型空间 $X(ct, \mathrm{j}\vec{r})$，对应四维矢量 $X = ct + \mathrm{j}\vec{r}$。微观粒子在四维空间运动的轨迹对应一条世界线。当粒子静止时，世界线平行于 ct 轴。粒子低速运动时满足 $v \ll c$，对应 Galilei 变换，运动轨迹或世界线与 ct 轴形成的夹角 $\varphi \approx 0$。在能量动量空间 $P\left(\dfrac{E}{c}, \mathrm{j}\vec{p}\right)$，取四维矢量 $P = \dfrac{E}{c} + \mathrm{j}\vec{p}$，粒子静止质量为 m_0，静止能量 $E_0 = m_0 c^2$；粒子运动时质量为 m，能量为 $E = mc^2 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$。当经典近似时，利用级数展开，有

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \tag{11.1.1}$$

则粒子的动能

$$E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 \tag{11.1.2}$$

由于 $v \ll c$，静能远大于动能，这与低速运动的宏观客体具有本质区别。宏观客体一般是不考虑静能的，因为在 Euclidean 空间中光速 $c \to \infty$，静能没有相应的几何对应点。也恰恰因为这一点，低速运动的微观客体由于要考虑静能，时空对应点应该在 Minkowski 空间而不是在 Euclidean 空间，而 Schrödinger 粒子也应该在 Minkowski 几何为原空间的广域 Hilbert 相空间中进行描述。

低速运动的微观客体与宏观客体的共性是动能均为 $E_k = \dfrac{1}{2} m_0 v^2$，遵守 Galilei 变换。微观客体本身的运动规律可以用 Newton 力学的物理规律描述，但和光量子的耦合应该与 Minkowski 空间的方向奇异性有关，使高速运动的微观客体在经典近似时并不完全满足 Newton 力学。第一章和第六章分析了 Minkowski 空间满足 Galilei 变换的条件，使在 Minkowski 空间可以讨论微观低速粒子的运动行为。如何处理 Minkowski 空间与 Newton 力学的内在关联，可以从两个角度进行分析：一方面，低速微观客体不能简单地与三维 Euclidean 空间建立几何对应关系，这是基于微观客体具有静能和与光量子耦合的双重性质。在 Minkowski 能量动量空间 $P\left(\dfrac{E}{c}, \mathrm{j}\vec{p}\right)$，静止的微观客体位于 $\dfrac{E}{c}$ 轴上一点，而低速微观客体由于 $\dfrac{1}{2} m_0 v^2 \ll m_0 c^2$ 或 $E_k \ll E_0$，则时空点位于 $\dfrac{E}{c}$ 轴附近。在广域 Hilbert 相空间，静

止或低速运动的微观客体均可抽象为分立相格，粒子的量子跃迁对应不同的相格，吸收或放出的光量子在类光区也对应一个分立相格。另一方面，实物粒子与光量子耦合时能量和动量分别守恒，低速客体本身的运动行为也应该满足能量守恒和动量守恒，满足 Newton 力学的物理规律，所以可在相对独立的空间分量和时间分量中描述低速微观客体本身的运动行为。

实物粒子与光量子相互作用在 Minkowski 空间取得了几何关联，分立结构和量子跃迁涉及四维空间的时空性质。四维空间描述实物粒子与光量子相互转化的等量关系时四维时空间隔等于零，对应四维复数的空间分量等于时间分量。综合来看，在 Minkowski 空间中的低速微观客体以及所对应的运动方程，应该用 Galilei 变换表示本身的运动规律，用四维时空的零间隔表示粒子与光相互作用时所遵守的能量守恒和动量守恒。引入 Schrödinger 方程描述微观客体低速运动规律应该具有描述粒子本身运动行为和与光量子耦合的双重性质，这有别于宏观低速物体的运动方程。

11.2　双曲型 Schrödinger 方程

在 Minkowski 空间建立 Schrödinger 方程所对应的复数有两类：一类为双曲复数 $X(ct,\mathrm{j}\vec{r})$，另一类为椭圆复数 $Y(\mathrm{i}ct,\vec{r})$。两类矢量的差别是对应 Minkowski 复时空的算法规则不同。前者对应内积的多项式混合运算，后者为并积的缩并运算。由于微观低速涉及四维空间的经典近似，利用两类复数的共性，均可用于经典量子力学的运算规律。本章用双曲复数讨论经典量子力学的物理内容，它与传统量子力学在虚单位表述上存在差别。

由双曲虚单位分写成动量和能量算符[参见第二十四章式(24.4.11)和(24.4.13)]：

$$\hat{\vec{p}} = \mathrm{j}\hbar\,\nabla,\quad \hat{E} = -\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

椭圆虚单位对应的能量和动量算符

$$\hat{\vec{p}} = -\mathrm{i}\hbar\,\nabla,\quad \hat{E} = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{11.2.1}$$

在四维双曲 Minkowski 空间取本征方程

$$\hat{P}_\mu\psi = -\mathrm{j}\hbar\Box^*\psi = \frac{\hat{E}}{c}\psi + \mathrm{j}\hat{\vec{p}}\psi = \frac{E}{c}\psi + \mathrm{j}\vec{p}\psi = P_\mu\psi \tag{11.2.2}$$

可分写成

$$\hat{H}\psi = E\psi \tag{11.2.3}$$

$$\hat{\vec{p}}\psi = \vec{p}\psi \tag{11.2.4}$$

在经典量子力学中，当 $c \gg v$ 时粒子以低速运动，由式(11.1.2)，有

$$E = E_0 + E_k = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \tag{11.2.5}$$

将式(11.2.5)代入式(11.2.3)，有

$$\hat{H}\psi = E\psi = E_k \psi + E_0 \psi \tag{11.2.6}$$

式(11.2.6)为微观客体低速运动时的微分方程。由于 $E_0 = m_0 c^2$ 为常量，低速粒子的运动动能满足 $E_k = \frac{p^2}{2m}$，取动能算符为

$$\hat{H}_k = \hat{E}_k = \frac{\hat{p}^* \hat{p}}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \tag{11.2.7}$$

式(11.2.7)中动量算符 $\hat{\vec{p}}$ 和 $\hat{\vec{p}}^*$ 的二次项乘积保留了 Minkowski 时空间隔不变量的内积形式。Minkowski 空间对应的态函数为式(8.9.15)，隐含了实物粒子进行量子跃迁时与光量子的相互作用。由式(11.2.6)取态函数

$$\begin{cases} \psi(\vec{r}, t) = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)} = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_k t - E_0 t)} = \varphi(\vec{r}, t) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \\ \varphi(\vec{r}, t) = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_k t)} \end{cases} \tag{11.2.8}$$

态函数(11.2.8)的第一式中具有静能项；第二式仅有动能成分，可用以描述低速运动微观客体的运动规律。式(11.2.6)与(11.2.7)联立，有

$$\hat{H}\psi = -j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + m_0 c^2 \psi = E\psi \tag{11.2.9}$$

或

$$\hat{H}^* \psi^* = j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + m_0 c^2 \psi^* = E\psi^* \tag{11.2.10}$$

式(11.2.9)与(11.2.10)相互复共轭。为了消去静质量对方程的影响，由式(11.2.7)和(11.2.8)将式(11.2.6)改写成态函数 $\varphi(\vec{r}, t) = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_k t)}$ 的本征方程，就可给出 Minkowski 空间中自由粒子的 Schrödinger 方程

$$\hat{E}_k \varphi = -j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi = E_k \varphi \tag{11.2.11}$$

式(11.2.11)可看做式(11.2.6)的特例，是不考虑静止能量时低速运动微观客体的微分方程。对式(11.2.11)取复共轭，有

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi^* = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi^* = E_k \varphi^* \tag{11.2.12}$$

式(11.2.11)和(11.2.12)是描述低速微观客体的自由运动方程，其中算符 $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ 具有微观客体低速运动特征，而 φ 作为式(11.2.8)中态函数 ψ 的一部分，具有实物客体与光耦合的特征，两者的复合特征使 Schrödinger 方程具有了双重性质。由

于 Schrödinger 方程的时间算符是一次微分，空间算符为二次微分，在 Minkowski 空间类时区进行经典近似时，分立解不是线性的，分立相格的线度也不是等长的。微观客体的二元性质从本质上有别于具有一元性质的宏观客体，经典力学的运动方程只描述质点本身的运动规律，低速宏观客体对应三维 Euclidean 实空间；而经典量子力学的运动方程，既要描述粒子本身的运动规律，也要描述粒子和场的因果联系。低速微观客体对应四维 Minkowski 复空间，在 Minkowski 动量空间满足式(7.4.1)和(8.2.2)，对应写作

$$\begin{cases}\Delta E = E_2 - E_1 = m_c c^2 = h\nu_c \\ \Delta p = p_2 - p_1 = p_c = m_c c = \dfrac{h}{\lambda_c}\end{cases}$$

可合写成

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{\Delta E}{c} + \mathrm{j}\Delta\vec{p} = d'\vartheta_0 \tag{11.2.13}$$

对式(11.2.11)左乘 φ^* 及式(11.2.12)右乘 φ 相加，得

$$\Box J_\mu = \frac{\partial}{\partial X_\mu} J_\mu = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\vec{J} = 0 \tag{11.2.14}$$

其中，

$$J_\mu = \mathrm{j}\vec{J} + \rho \tag{11.2.15}$$

$$\begin{cases}\rho = \varphi^*\varphi \\ \vec{J} = \dfrac{\mathrm{j}\hbar}{2m}(\varphi\nabla\varphi^* - \varphi^*\nabla\varphi)\end{cases} \tag{11.2.16}$$

式(11.2.15)为双曲 Schrödinger 方程对应的几率守恒关系式，式(11.2.16)为几率密度和几率流密度。

式(11.2.4)为动量本征方程，消去静质量对方程的影响后也改成 φ 的本征方程。动量分量 $\hat{p}_x = \mathrm{j}\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ 的本征方程满足

$$\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\varphi = p_x\varphi \tag{11.2.17}$$

其中，p_x 为本征值，有 $\dfrac{\partial \ln\varphi}{\partial x} = \dfrac{\mathrm{j}p_x}{\hbar}$，则 $\varphi_{p_x} = C\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p_x x}{\hbar}}$，如果 $C = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$，得动量本征函数 $\varphi_{p_x} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p_x x}{\hbar}}$，满足归一化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{p'_x}^*(x)\varphi_{p''_x}(x)\mathrm{d}x = \delta(p'_x - p''_x) \tag{11.2.18}$$

11.3　Dirac 算符与幺正变换

在双曲复空间中引入 Dirac 算符，可抽象出一类普适于相对论及量子力学的

理论体系，为两论的一元化表述奠定了理论基础。取双曲半线性空间 S，对 $\forall A \in S$，表示成 $|A\rangle$，命名为右矢；令 S^* 为 S 的对偶半线性空间，对 $\forall B \in S^*$ 表示成 $\langle B|$，命名为左矢。右矢或左矢满足各自的封闭性乘法和加法运算构成半群，而左矢和右矢的混合积构成内积 $\langle B \mid A\rangle$（参见第二十章定义 20.1）。在双曲复空间中引入的 Dirac 算符，通用于相对论和量子力学两个物理领域。在狭义相对论中，取四维时空位矢

$$\begin{cases} X_\mu(ct, \mathrm{j}\vec{r}) = | X_\mu\rangle = ct + \mathrm{j}\vec{r} \\ X_\mu^*(ct, \mathrm{j}\vec{r}) = \langle X_\mu | = ct - \mathrm{j}\vec{r} \end{cases} \tag{11.3.1}$$

时空间隔不变量可表示为

$$\langle X_\mu \mid X_\mu\rangle = c^2t^2 - r^2 = R^2 \tag{11.3.2}$$

在四维能量动量空间，四维动量位矢可写作

$$\begin{cases} P_\mu(E, \mathrm{j}\vec{p}) = | P_\mu\rangle = \dfrac{E}{c} + \mathrm{j}\vec{p} \\ P_\mu^*(E, \mathrm{j}\vec{p}) = \langle P_\mu | = \dfrac{E}{c} - \mathrm{j}\vec{p} \end{cases} \tag{11.3.3}$$

能量动量的间隔不变量为

$$\langle P_\mu \mid P_\mu\rangle = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2c^2 \tag{11.3.4}$$

或能量动量关系式

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \tag{11.3.5}$$

在量子力学中，双曲广域所对应 Hilbert 空间中归一化波函数可写作

$$\langle \varphi \mid \varphi\rangle = 1 \tag{11.3.6}$$

一般来讲，任一双曲函数皆可表成

$$| F\rangle = \sum_k c_k k\rangle \tag{11.3.7}$$

$| k\rangle$ 称为全集，如满足

$$\langle m \mid k\rangle = \delta_{mk} \tag{11.3.8}$$

则 $| k\rangle$ 称为广义归一全集（包含零因子）。而

$$c_k = \langle k \mid F\rangle \tag{11.3.9}$$

为 $| F\rangle$ 在基本单位向量为 $| k\rangle$ 的坐标分量，或 $| F\rangle$ 在基矢 $| k\rangle$ 上的投影。式(11.3.9)代入式(11.3.7)，有

$$| F\rangle = \sum_k \langle k \mid F\rangle \mid k\rangle = \sum_k |k\rangle\langle k|F\rangle \tag{11.3.10}$$

其中，$P = | k\rangle\langle k |$ 为投影算符，满足

$$\sum_k | k\rangle\langle k | = 1 \tag{11.3.11}$$

或

$$\int \mathrm{d}k \mid k\rangle\langle k \mid = 1 \tag{11.3.12}$$

式(11.3.9)至(11.3.12)可看做 J. von Neumann 的量子力学的标准体系。在标准体系中 Hilbert 空间中厄米算符的运算用算符 $\mid F\rangle$ 描述可观察量，满足离散谱分解式(11.3.10)，$\sum\limits_{k} \mid k\rangle\langle k \mid$ 是与之对应的本征映射。

在四维双曲复空间，双曲四元数 $X_\mu = ct + \mathrm{j}\vec{r} = \sum\limits_{\mu=1}^{4} X_\mu$，满足 Lorentz 变换：

$$X'_\mu = S_{\mu\nu} X_\nu \tag{11.3.13}$$

其中，$S_{\mu\nu}$ 为幺正矩阵，满足关系式：

$$S^{+}_{\mu\nu} S_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} S^{+}_{\mu\nu} = I \tag{11.3.14}$$

在式(11.3.14)中，$S^{+}_{\mu\nu}$ 为 $S_{\mu\nu}$ 的厄米共轭矩阵，I 为单位阵。

可以把式(11.3.13)推广到 n 维及无限维广域 Hilbert 相空间，得到一个广义的多维 Lorentz 变换亦即量子力学理论中的相似变换。由

$$X_\mu \rightarrow \phi = \sum_\alpha a_\alpha \phi_\alpha = \sum_\beta a'_\beta \varphi_\beta \tag{11.3.15}$$

同乘 ϕ_i^*，得

$$a_i = \sum_\beta (\phi_i, \varphi_\beta) a'_\beta = \sum_\beta S_{i\beta} a'_\beta \tag{11.3.16}$$

其中，$S_{i\beta} = (\phi_i, \varphi_\beta)$，满足

$$S^{+}_{i\beta} S_{i\beta} = S_{i\beta} S^{+}_{i\beta} = \boldsymbol{I} \tag{11.3.17}$$

式(11.3.17)与式(11.3.14)相吻合，式(11.3.16)也与式(11.3.13)相对应，所以相对论中的坐标变换形式及 Lorentz 变换与量子力学的坐标变换及相似变换取得了类同的群表示，这为相对论和量子力学的一元化奠定了理论基础。

取量子态 ϕ，经算符 $\hat{F}$ 运算后变为另一态 φ，满足

$$\varphi = \hat{F}\phi \tag{11.3.18}$$

或

$$\sum_k b_k \phi_k = \hat{F} \sum_k a_k \phi_k = \sum_k a_k \hat{F} \phi_k \tag{11.3.19}$$

左乘 ϕ_i，得

$$b_i = \sum_k F_{ik} a_k \tag{11.3.20}$$

其中，

$$F_{ik} = (\phi_i, \hat{F}\phi_k) \tag{11.3.21}$$

由式(11.3.18)和(11.3.21)，可进行表象变换：

$$F = SF'S^{-1} \tag{11.3.22}$$

及力学量的期望值公式：

$$\overline{F} = \sum_{ki} a_k^* F_{ki} a_i \tag{11.3.23}$$

显然，在广域 Hilbert 相空间引入的 Dirac 算符以及一系列时空变换关系，在形式上把传统的量子理论与狭义相对论吻合起来。广域 Hilbert 相空间对应着多维 Minkowski 空间的广义内积空间，Lorentz 群与特殊幺正群相对应。当把这些抽象的代数理论引入量子力学能协调地与相对论机制融于一体，这不是偶然的，而是双曲复函与近代物理及自然规律存在深层次的必然联系。

Dirac 说过："……我想建议人们把单复变函数论当做基础。这一数学分支特别美，此外，与它相联系的变换群，亦即复平面的变换群与支配狭义相对论时空的 Lorentz 群相同。这就导致人们猜测在单复变函数论与狭义相对论的时空之间存在着某种深刻的联系，找出这种联系是未来的一项困难任务。"长期以来物理学家们已经注意到单复变函数与相对论的关联，以及相对论与量子力学统一的理论基础问题。双曲复函是一个新的单复变函数，它能以 Minkowski 空间为原型，抽象出由内积范数导出的双曲广域度量空间和双曲广域 Hilbert 相空间，形成量子力学和相对论统一的数学基础框架，说明这种单复变函数与现代物理学存在深层次的逻辑关联。这种新型的数学工具一定会给相对论和量子力学带来新的内容并能解决现存的疑难问题。前文将经典量子力学以及 Schrödinger 方程赋予 Minkowski 空间的几何结构正是在这种统一数学框架中的和谐表示。

11.4　非交换代数与对易关系

Clifford 代数是具有非交换性质的几何代数，第十八章中式(18.3.11)是坐标变换的一般关系式，满足

$$r' = (a \cdot r + a \wedge r)a^{-1} = ara^{-1} \tag{11.4.1}$$

其中，

$$a \wedge r = \frac{1}{2}(ar - ra) = \frac{1}{2}[a,r] \tag{11.4.2}$$

式(11.4.2)中，

$$ar - ra = [a,r] \tag{11.4.3}$$

式(11.4.3)称为对易关系。四维 Lorentz 变换的普遍形式(2.2.11)与式(11.4.1)具有类同的形式，也不满足交换律。利用双曲动量算符 $\hat{p} = \mathrm{j}\hbar\nabla$，其中，$\hat{p}_x = \mathrm{j}\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$，由式(11.2.3)取态函数 φ，有关系：

$$x\hat{p}_x\varphi = \mathrm{j}\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\varphi \tag{11.4.4}$$

$$\hat{p}_x x\varphi = \mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial x}(x\varphi) = \mathrm{j}\hbar\varphi + \mathrm{j}\hbar x \frac{\partial}{\partial x}\varphi \tag{11.4.5}$$

所以,

$$[x, \hat{p}_x] = x\hat{p}_x - \hat{p}_x x = -\mathrm{j}\hbar \tag{11.4.6}$$

式(11.4.6)为双曲空间中三维对易关系式。一般情况下有

$$[r_\alpha, \hat{p}_\beta] = r_\alpha \hat{p}_\beta - \hat{p}_\beta r_\alpha = -\mathrm{j}\hbar\delta_{\alpha\beta} \tag{11.4.7}$$

其中,$r_\alpha(\alpha=1,2,3) \equiv (x,y,z)$,$\hat{p}_\beta(\beta=1,2,3) = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$,$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases}1, \alpha=\beta \\ 0, \alpha\neq\beta\end{cases}$为 δ 函数。注意到式(11.4.2),则式(11.4.7)可写作

$$r_\alpha \wedge \hat{p}_\beta = \frac{1}{2}(r_\alpha \hat{p}_\beta - \hat{p}_\beta r_\alpha) = -\frac{1}{2}\mathrm{j}\hbar\delta_{\alpha\beta} \tag{11.4.8}$$

对应时间算符和一维坐标算符有

$$\hat{t} = -\mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial E}, \quad \hat{x} = \mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} \tag{11.4.9}$$

式(11.4.9)的第一式也可写成

$$\hat{x}_0 = c\hat{t} = -\mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial(E/c)} = -\mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial p_0} \tag{11.4.10}$$

其中,能量算符为

$$\frac{E'}{c} = \hat{p}_0 = -\mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial ct} = -\mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial x_0} \tag{11.4.11}$$

由于

$$p_x \hat{x}\varphi = \mathrm{j}\hbar p_x \frac{\partial}{\partial p_x}\varphi \tag{11.4.12}$$

$$\hat{x} p_x \varphi = \mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial p_x}(p_x\varphi) = \mathrm{j}\hbar\varphi + \mathrm{j}\hbar p_x \frac{\partial}{\partial p_x}\varphi \tag{11.4.13}$$

所以坐标算符的对易关系满足

$$[p_x, \hat{x}] = p_x\hat{x} - \hat{x}p_x = -\mathrm{j}\hbar \tag{11.4.14}$$

三维形式为

$$[p_\alpha, \hat{r}_\beta] = p_\alpha \hat{r}_\beta - \hat{r}_\beta p_\alpha = -\mathrm{j}\hbar\delta_{\alpha\beta} \tag{11.4.15}$$

非交换代数形式为

$$p_\alpha \wedge \hat{r}_\beta = \frac{1}{2}(p_\alpha \hat{r}_\beta - \hat{r}_\beta p_\alpha) = -\frac{1}{2}\mathrm{j}\hbar\delta_{\alpha\beta} \tag{11.4.16}$$

同理,由时间算符和能量算符,态函数(11.2.3)满足对易关系

$$[t, \hat{E}] = [x_0, \hat{p}_0] = t\hat{E} - \hat{E}t = x_0\hat{p}_0 - \hat{p}_0 x_0 = \mathrm{j}\hbar \tag{11.4.17}$$

$$[E, \hat{t}] = [p_0, \hat{x}_0] = E\hat{t} - \hat{t}E = p_0\hat{x}_0 - \hat{x}_0 p_0 = \mathrm{j}\hbar \tag{11.4.18}$$

式(11.4.17)和(11.4.18)也可写成非交换代数形式:

$$t \wedge \hat{E} = \frac{1}{2}(t\hat{E} - \hat{E}t) = \frac{1}{2}\mathrm{j}\hbar \tag{11.4.19}$$

或

$$E \wedge \hat{t} = \frac{1}{2}(E\hat{t} - \hat{t}E) = \frac{1}{2}\mathrm{j}\hbar \tag{11.4.20}$$

11.5 角动量的共同本征态

在双曲空间中取角动量算符

$$\hat{\vec{L}} = \vec{r} \times \hat{\vec{p}} = \hat{L}_x\vec{e}_x + \hat{L}_y\vec{e}_y + \hat{L}_z\vec{e}_z \tag{11.5.1}$$

其中，角动量算符的分量形式为

$$\begin{cases} \hat{L}_x = y\hat{p}_z - z\hat{p}_y = \mathrm{j}\hbar\left(y\dfrac{\partial}{\partial z} - z\dfrac{\partial}{\partial y}\right) \\ \hat{L}_y = z\hat{p}_x - x\hat{p}_z = \mathrm{j}\hbar\left(z\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial z}\right) \\ \hat{L}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x = \mathrm{j}\hbar\left(x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}\right) \end{cases} \tag{11.5.2}$$

有关系：

$$\hat{L}_\alpha^+ = -\hat{L}_\alpha(\alpha = x, y, z), \quad \text{或}\ \hat{L}^+ = -\hat{L} \tag{11.5.3}$$

式(11.5.2)满足对易关系式：

$$\hat{L}_\alpha \wedge x_\beta = \frac{1}{2}[\hat{L}_\alpha, x_\beta] = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathrm{j}\hbar x_\gamma \tag{11.5.4}$$

$$\hat{L}_\alpha \wedge \hat{p}_\beta = \frac{1}{2}[\hat{L}_\alpha, \hat{p}_\beta] = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathrm{j}\hbar p_\gamma \tag{11.5.5}$$

其中，$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 是 Levi-Civita 符号，有性质 $\varepsilon_{123} = 1, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = -\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\gamma\beta}$。式(11.5.4)和(11.5.5)可合写作

$$\hat{L}_\alpha \wedge \hat{L}_\beta = \frac{1}{2}[\hat{L}_\alpha, \hat{L}_\beta] = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathrm{j}\hbar\hat{L}_\gamma \tag{11.5.6}$$

注意到式(19.5.3)，有关系：

$$[\hat{L}_\alpha^+, \hat{L}_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathrm{j}\hbar\hat{L}_\gamma \tag{11.5.7}$$

其中，$\hat{L}_\alpha^+$ 为 $\hat{L}_\alpha$ 的共轭转置，满足式(11.5.3)。

三维球坐标与直角坐标的变换关系为

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases} \tag{11.5.8}$$

有微分关系：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}=\sin\theta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial\theta}-\dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial\theta}+\dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}=\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\end{cases}\tag{11.5.9}$$

将式(11.5.9)代入式(11.5.2)中，有角动量算符在球坐标的形式：

$$\begin{cases}\hat{L}_x=-\mathrm{j}\hbar\left(\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\ \hat{L}_y=-\mathrm{j}\hbar\left(-\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\ \hat{L}_z=\mathrm{j}\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\end{cases}\tag{11.5.10}$$

角动量平方可以写成

$$\hat{L}^2=\hat{L}^*\hat{L}=\hat{L}_x^*\hat{L}_x+\hat{L}_y^*\hat{L}_y+\hat{L}_z^*\hat{L}_z=-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\tag{11.5.11}$$

式(11.5.11)可写成 $\hat{L}^2$ 的本征值方程：

$$\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]Y_{lm}(\theta,\varphi)=-\lambda\hbar^2Y_{lm}(\theta,\varphi)\tag{11.5.12}$$

$Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 是球谐函数，为 $\hat{L}^2$ 的本征函数，属于本征值 $\lambda\hbar^2$。其中，

$$\lambda=l(l+1),\quad l=0,1,2,\cdots\tag{11.5.13}$$

l 为角量子数，$\hat{L}^2$ 的本征函数写为

$$\hat{L}^2Y_{lm}(\theta,\varphi)=l(l+1)\hbar^2Y_{lm}(\theta,\varphi)\tag{11.5.14}$$

球谐函数 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 可以写为连带 Legendre 多项式：

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=(-1)^mN_{lm}P_l^m(\cos\theta)e^{jm\varphi},\quad m=0,1,2,\cdots,l\tag{11.5.15}$$

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi)=(-1)^mY_{l,-m}^*(\theta,\varphi),\quad m=-1,-2,\cdots,-l\tag{11.5.16}$$

由式(11.5.10)的第三式和式(11.5.15)、(11.5.16)，有

$$\hat{L}_zY_{lm}(\theta,\varphi)=m\hbar Y_{lm}(\theta,\varphi)\tag{11.5.17}$$

或

$$\hat{L}_z\mid lm>=m\hbar\mid lm>\tag{11.5.18}$$

式(11.5.17)和(11.5.18)为 $\hat{L}_z$ 的本征方程，本征值为 $L_z=m\hbar$，其中，$m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$，为磁量子数。

角动量平方与角动量的分量是对易的，有关系：

$$[\hat{L}^2,\hat{L}_\alpha]=0,\quad (\alpha=x,y,z) \tag{11.5.19}$$

$\hat{L}^2$ 和 $\hat{L}_z$ 可构成共同本征态。

11.6 中心力场与氢原子

电子在 Coulomb 场中运动，取势能为 $U=-\frac{Ze^2}{r}$。在不考虑静能时系统 Hamilton算符为式(11.2.9)。如考虑 Coulomb 场的势能，则系统 Hamilton 算符可写成

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\frac{Ze^2}{r} \tag{11.6.1}$$

本征方程为

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\frac{Ze^2}{r}\right)\varphi=E\varphi \tag{11.6.2}$$

在球极坐标中本征方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\psi-\frac{Ze^2}{r}\psi=E\psi \tag{11.6.3}$$

取分离变量

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)=R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{11.6.4}$$

其中，$R_{nl}(r)$ 为径向函数，式(11.6.4)代入式(11.6.3)得到两个方程：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2}{r}\right)-\frac{\lambda}{r^2}\right]R=0 \tag{11.6.5}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=-\lambda Y \tag{11.6.6}$$

式(11.6.6)与(11.5.5)相同，将式(11.5.6)代入径向方程(11.6.5)，有

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2}{r}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0 \tag{11.6.7}$$

令

$$R(r)=\frac{u(r)}{r} \tag{11.6.8}$$

$R(r)$ 有界的条件为 $u(r)\underset{r\to 0}{\longrightarrow}0$，将式(11.6.8)代入式(11.6.7)，得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2}{r}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u=0 \tag{11.6.9}$$

当 $E<0$ 的情况下，令

$$\alpha = \left(8m\frac{-E}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta = \frac{2mZe^2}{\alpha\hbar^2} \tag{11.6.10}$$

作代换 $\rho = \alpha r$，式(11.6.9)可写作

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} + \left[\frac{\beta}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]u = 0 \tag{11.6.11}$$

讨论式(11.6.11)的渐进行为，当 $\rho \to \infty$ 时，式(11.6.11)变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} - \frac{1}{4}u = 0 \tag{11.6.12}$$

其解取为

$$u(\rho) = \mathrm{e}^{-\frac{\rho}{2}} f(\rho) \tag{11.6.13}$$

当 $\rho \to 0$ 时，式(11.6.11)变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}u = 0 \tag{11.6.14}$$

式(11.6.14)的解为

$$u(\rho) = \rho^{l+1} \tag{11.6.15}$$

一般情况下，综合式(11.6.13)和(11.6.15)极限情况，取

$$u(\rho) = \rho^{l+1}\mathrm{e}^{-\frac{\rho}{2}} f(\rho) \tag{11.6.16}$$

代入式(11.6.11)，得到满足 $f(\rho)$ 的方程：

$$\rho\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\rho^2} + (2l+2-\rho)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho} - (l+1-\beta)f = 0 \tag{11.6.17}$$

取 $\rho = z, 2l+2 = c, l+1-\beta = a, f = y$，有合流超几何方程：

$$z\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}z^2} + (c-z)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} - ay = 0 \tag{11.6.18}$$

方程(11.6.18)的解满足条件

$$l+1-\beta = -n_r, \quad n_r = 0,1,\cdots \tag{11.6.19}$$

或

$$\beta = n = l+1+n_r, \quad l = 0,1,\cdots; n = 1,\cdots \tag{11.6.20}$$

其中，n_r 为径量子数，n 为总量子数或主量子数。将式(11.6.20)代入式(11.6.10)，有能量本征值

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = 1,2,3,\cdots \tag{11.6.21}$$

取式(11.6.21)中 $Z = 1, m = m_\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$，$m_\mu$ 称为约化质量，m_1 和 m_2 分别为电子和氢核的质量，则式(11.6.21)可写为

$$E_n = -\frac{m_\mu e^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{e^2}{2a_0}\frac{1}{n^2}, \quad n = 1,2,3,\cdots \tag{11.6.22}$$

当取 $m_\mu = m_e$ 为电子质量时，有 $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$，为氢原子的 Bohr 轨道半径。

由式(11.2.13)，电子的能级跃迁在 Minkowski 空间可写成

$$h\nu = \hbar 2\pi\nu = E_n{}' - E_n \tag{11.6.23}$$

式(11.6.22)代入式(11.6.23)，辐射光的频率为

$$\nu = \frac{E_n' - E_n}{2\pi\hbar} = \frac{m_e e^4}{4\pi\hbar^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right) = R_\infty c\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \tag{11.6.24}$$

式(11.6.24)为氢原子所满足的 Balmer 公式。式中 $R_\infty = \frac{m_e e^4}{4\pi\hbar^3 c}$ 是 Rydberg 常数。

显然在 Minkowski 空间讨论氢原子的分立结构或 Balmer 公式具有很鲜明的几何意义。虽然氢原子中的亚核粒子为低速运动，但可在 Minkowski 空间的类时区找到电子的对应时空点，辐射的光量子与类光区的时空点相对应。电子与光量子的耦合使四维时空间隔和能量动量间隔等于零，分别满足能量守恒和动量守恒，是电子与光量子质能关系相互转变所决定的。

11.7 磁场中的粒子与正常 Zeeman 效应

一个质量为 m，带电荷 q 的粒子在电磁场中运动，其 Hamilton 量为

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\phi \tag{11.7.1}$$

对应 Hamilton 算符为

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\phi \tag{11.7.2}$$

Schrödinger 方程(11.2.11)可改写成

$$-\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[\frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\phi\right]\varphi \tag{11.7.3}$$

取均匀磁场 $\vec{B}$，相应的矢势为 $\vec{A}$，满足关系：

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r} \tag{11.7.4}$$

可验证满足 $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$，取磁场方向沿 z 轴，则

$$A_x = -\frac{1}{2}y,\quad A_y = \frac{1}{2}x,\quad A_z = 0 \tag{11.7.5}$$

取 Coulomb 场 $V(r) = q\phi$，电子的电荷 $q = -e$，则 Hamilton 算符可写作

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\left(\hat{p}_x - \frac{eB}{2c}y\right)^2 + \left(\hat{p}_y + \frac{eB}{2c}x\right)^2 + \hat{p}_z^2\right] + V(r)$$

$$= \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}}^2 + \frac{eB}{c}(x\hat{p}_y - y\hat{p}_x) + \frac{e^2B^2}{4c^2}(x^2+y^2)\right] + V(r)$$

$$= \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}}^2 + \frac{eB}{c}\hat{L}_z + \frac{e^2B^2}{4c^2}(x^2+y^2)\right] + V(r) \tag{11.7.6}$$

取式(11.7.6)右边 B^2 项远小于 B 项，有

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\vec{p}}^2 + \frac{eB}{2mc}\hat{L}_z + V(r) \tag{11.7.7}$$

在中心力场取 $(\hat{H},\hat{\vec{L}}^2,\hat{L}_z)$ 为一组守恒量完全集，量子数为 (n,l,m)，本征函数为

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{11.7.8}$$

其中，$n=1,2,3,\cdots;l=0,1,2,\cdots,n-1;m=-l,-l+1,\cdots,l-1,l$。相应的能量本征值为

$$E_{nlm} = E_{nl} + \frac{eB}{2mc}m\hbar \tag{11.7.9}$$

式(11.7.9)中，E_{nlm} 与量子数 n,l,m 都有关，使中心力场 E_{nl} 所对应的一条能级分裂成 $2l+1$ 条，即为正常 Zeeman 效应的 $2l+1$ 重简并。

第十二章　双曲型 Dirac 波动方程

相对论量子力学和量子场论给出两种不同形式的 Dirac 波动方程，哪种更能真实地描述 Dirac 粒子的性质呢？应该说两种 Dirac 波动理论各有特点，但都存在一些无法克服的困难和矛盾。例如，两个方程中态函数的数学基础都为 Hilbert 相空间，其原空间联系着 Euclidean 几何，当分立的相格描述微观粒子的量子态时，粒子的运动规律处于 Euclidean 几何与 Minkowski 几何的两难境界。或者说，传统的 Dirac 方程所对应的高速粒子在 Minkowski 空间无法找到时空对应点，特别是反粒子至今还不能确切地给出它所对应的几何区域。相对论量子力学中，Dirac 提出空穴理论，将反粒子看做正粒子的真空几何背景。量子场论中的 Dirac 方程回避了空穴理论，将正、反粒子方程相互分离并满足相互厄米共轭关系，这更能体现粒子的量子特性，但同样没有解决粒子和场的几何关联问题。有必要分析 Dirac 粒子在两个不同物理分支中的异同关系，客观地描述高速运动状态亚核粒子以及与电磁场的几何联系。

将广域 Hilbert 相空间作为相对论量子力学的数学基础，无论是态函数还是粒子的运动方程均对应着 Minkowski 几何。在 Minkowski 空间的类时区可以找到正、反粒子的时空对应点，它们具有相互厄米共轭关系。在 Minkowski 几何为原空间抽象出的广域 Hilbert 相空间中可以推导出和谐的粒子和场的运动微分方程以及它们之间的相互作用方程。

12.1　二维复平面中的 Dirac 波动方程

双曲虚单位 $\mathrm{j}(\mathrm{j}^2=1, \mathrm{j}\neq\pm1, \mathrm{j}^*=-\mathrm{j})$ 所对应的复空间为 Minkowski 空间，能量算符和动量算符可分别写作[参见第二十四章式(24.4.13)]

$$\hat{p}=\mathrm{j}\hbar\nabla,\quad \hat{E}=-\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tag{12.1.1}$$

四维动量的算符满足关系式

$$\begin{cases}\hat{P}_\mu=\mathrm{j}\,\hat{p}+\dfrac{\hat{E}}{c}=-\mathrm{j}\hbar\dfrac{\partial}{\partial X_\mu^+}\\[2ex]\hat{P}_\mu^+=-\mathrm{j}\,\hat{p}^++\dfrac{\hat{E}^+}{c}=\mathrm{j}\hbar\dfrac{\partial}{\partial X_\mu}\end{cases}\tag{12.1.2}$$

其中，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial X_\mu}=\dfrac{\partial}{\partial ct}+\mathrm{j}\,\nabla\\ \dfrac{\partial}{\partial X_\mu^+}=\dfrac{\partial}{\partial ct}-\mathrm{j}\,\nabla\end{cases}\tag{12.1.3}$$

在双曲复域中，参考式(2.1.4)，取线性四元数的内积算法

$$\langle X\mid Y\rangle=\sum_{i,k=1}^{4}x_i^*\,y_k\tag{12.1.4}$$

作为式(12.1.4)的特例，当 $X=Y$ 时，有缩并形式：

$$\langle X\mid X\rangle=\sum_{i=1}^{4}x_i^*\,x_i\tag{12.1.5}$$

按式(12.1.4)的算法，由式(4.5.20)，对式(12.1.2)取内积，有

$$\hat{P}_\mu^+\hat{P}_\mu=\hbar^2\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)=m_0^2c^2$$

或

$$\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\tag{12.1.6}$$

在双曲复域，广域 Hilbert 空间作为相对论量子力学的数学基础，考虑到双曲复空间的时空对称性，设线性 Dirac 方程为

$$(\alpha_1\,\hat{\vec{p}}+\alpha_2\hat{E}+\alpha_3m_0c)\varphi=0\tag{12.1.7}$$

式(12.1.7)具有复数和矢量的双重性质，在不展开空间分量的情况下，只考虑四维超复数的复数性质。取二维复时空平面，将 $\hat{\vec{p}}$ 看成一个整体算符作为二维复数的虚部，$\dfrac{\hat{E}}{c}$ 为复数的实部。将式(12.1.1)式代入式(12.1.7)，得

$$(\alpha_1\hbar\,\vec{\nabla}-\alpha_2\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{j}\alpha_3m_0c)\varphi=0\tag{12.1.8}$$

对式(12.1.8)取厄米共轭，得

$$(\alpha_1^+\hbar\,\vec{\nabla}-\alpha_2^+\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{j}\alpha_3^+m_0c)\varphi^+=0\tag{12.1.9}$$

按式(12.1.4)的算法，对式(12.1.8)和(12.1.9)作内积运算，满足式(12.1.6)应有条件：

$$\begin{cases}\alpha_1^+\alpha_1=\alpha_1\alpha_1^+=1\\ \alpha_2^+\alpha_2=\alpha_2\alpha_2^+=-1\\ \alpha_3^+\alpha_3=\alpha_3\alpha_3^+=1\end{cases}\tag{12.1.10}$$

$$\begin{cases}\alpha_1^+\alpha_3-\alpha_3^+\alpha_1=0\\ \alpha_1^+\alpha_2+\alpha_2^+\alpha_1=0\\ \alpha_2^+\alpha_3-\alpha_3^+\alpha_2=0\end{cases}\tag{12.1.11}$$

由于添加了 α^+ 矩阵，α 取下列矩阵可满足式(12.1.10)和(12.1.11)的条件

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix} & -\mathrm{j}\\ \mathrm{j} & \end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} \tag{12.1.12}$$

取二维双曲线型 Dirac 方程

$$\left(\pi_\rho\hbar\frac{\partial}{\partial X_\rho}+\mathrm{j}m_0c\right)\varphi=0 \tag{12.1.13}$$

其中，$\pi_\rho=\pi_\rho(\pi_1,\pi_2)$，并有矩阵形式：

$$\begin{cases}\pi_1=-\mathrm{j}\alpha_1=\begin{pmatrix}-\mathrm{j} & \\ & \mathrm{j}\end{pmatrix}\\ \pi_2=\alpha_2=\begin{pmatrix} & -\mathrm{j}\\ \mathrm{j} & \end{pmatrix}\end{cases} \tag{12.1.14}$$

对式(12.1.13)取厄米共轭

$$\varphi^+\left(\pi_\rho^+\hbar\frac{\partial}{\partial X_\rho^+}-\mathrm{j}m_0c\right)=0 \tag{12.1.15}$$

将式(12.1.13)和(12.1.15)按式(12.1.4)的算法作内积运算，得到 Klein-Gordon 方程

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{c^2}{\hbar^2}m_0^2\right)\psi=0 \tag{12.1.16}$$

式(12.1.16)与(12.1.6)具有相同的算符形式，其中 $\psi=\varphi^+\varphi$，则 $\pi_\rho=\pi_\rho(\pi_1,\pi_2)$ 满足

$$\pi_1^+=-\pi_1,\quad \pi_2^+=\pi_2 \tag{12.1.17}$$

$$\pi_\rho^+\pi_\rho=-1 \tag{12.1.18}$$

而

$$\left(\frac{\partial}{\partial X_\mu}\right)^+\frac{\partial}{\partial X_\mu}=\left(\frac{\partial}{\partial ct}-\mathrm{j}\,\vec{\nabla}\right)\left(\frac{\partial}{\partial ct}+\mathrm{j}\,\vec{\nabla}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2 \tag{12.1.19}$$

Dirac 方程(12.1.13)可分写成

$$\begin{cases}\hbar\,\vec{\nabla}\varphi_1+\mathrm{j}\hbar\dfrac{\partial}{\partial ct}\varphi_2+\mathrm{j}m_0c\varphi_1=0\\ \hbar\,\vec{\nabla}\varphi_2+\mathrm{j}\hbar\dfrac{\partial}{\partial ct}\varphi_1-\mathrm{j}m_0c\varphi_2=0\end{cases} \tag{12.1.20}$$

式(12.1.15)分写成

$$\begin{cases}\hbar\,\vec{\nabla}\varphi_1^+-\mathrm{j}\hbar\dfrac{\partial}{\partial ct}\varphi_2^+-\mathrm{j}m_0c\varphi_1^+=0\\ \hbar\,\vec{\nabla}\varphi_2^+-\mathrm{j}\hbar\dfrac{\partial}{\partial ct}\varphi_1^++\mathrm{j}m_0c\varphi_2^+=0\end{cases} \tag{12.1.21}$$

12.2 四维双曲型 Dirac 波动方程

方程(12.1.20)没有考虑粒子空间分量的交叉运算，是将三维空间算符看成一

个整体算符，与时间算符共同遵守四维 Minkowski 空间的时空对称性。如果考虑粒子在三维空间中的分量运算，由式(12.1.2)，并注意到式(12.1.20)，取四维 Dirac 方程

$$\gamma_\mu \hat{P}_\mu \phi = -\mathrm{j}\hbar\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial X_\mu^+}\phi = \pm m_0 c\phi \tag{12.2.1}$$

其中，$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 为 t'Hooft 矩阵，γ_0 为单位矩阵[参见第十九章式(19.3.4)]。当取式(12.2.1)右边为正号时可写为

$$\mathrm{j}\hbar\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial X_\mu^+}\phi + m_0 c\phi = 0 \tag{12.2.2}$$

对式(12.2.2)取复共轭，有与式(12.1.21)相对应的旋量方程

$$\gamma_\mu^+ \mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial X_\mu}\phi^+ - m_0 c\phi^+ = 0 \tag{12.2.3}$$

将式(12.2.3)左乘式(12.2.2)，由式(12.1.4)的内积算法，可导出 Klein-Gordon 方程(12.1.16)。将式(12.2.2)展开可分写成

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi_4}{\partial x} - \dfrac{\partial\phi_3}{\partial y} + \dfrac{\partial\phi_2}{\partial z} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\partial}{\partial ct} + \dfrac{m_0 c}{\hbar}\right)\phi_1 = 0 & (12.2.4\mathrm{a}) \\ \dfrac{\partial\phi_3}{\partial x} + \dfrac{\partial\phi_4}{\partial y} - \dfrac{\partial\phi_1}{\partial z} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\partial}{\partial ct} + \dfrac{m_0 c}{\hbar}\right)\phi_2 = 0 & (12.2.4\mathrm{b}) \\ -\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x} + \dfrac{\partial\phi_1}{\partial y} + \dfrac{\partial\phi_4}{\partial z} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\partial}{\partial ct} + \dfrac{m_0 c}{\hbar}\right)\phi_3 = 0 & (12.2.4\mathrm{c}) \\ -\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x} - \dfrac{\partial\phi_2}{\partial y} - \dfrac{\partial\phi_3}{\partial z} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\partial}{\partial ct} + \dfrac{m_0 c}{\hbar}\right)\phi_4 = 0 & (12.2.4\mathrm{d}) \end{cases}$$

式(12.2.3)也可分写成

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi_4^+}{\partial x} - \dfrac{\partial\phi_3^+}{\partial y} + \dfrac{\partial\phi_2^+}{\partial z} + \left(\dfrac{m_0 c}{\hbar} - \mathrm{j}\dfrac{\partial}{\partial ct}\right)\phi_1^+ = 0 & (12.2.5\mathrm{a}) \\ \dfrac{\partial\phi_3^+}{\partial x} + \dfrac{\partial\phi_4^+}{\partial y} - \dfrac{\partial\phi_1^+}{\partial z} + \left(\dfrac{m_0 c}{\hbar} - \mathrm{j}\dfrac{\partial}{\partial ct}\right)\phi_2^+ = 0 & (12.2.5\mathrm{b}) \\ -\dfrac{\partial\phi_2^+}{\partial x} + \dfrac{\partial\phi_1^+}{\partial y} + \dfrac{\partial\phi_4^+}{\partial z} + \left(\dfrac{m_0 c}{\hbar} - \mathrm{j}\dfrac{\partial}{\partial ct}\right)\phi_3^+ = 0 & (12.2.5\mathrm{c}) \\ -\dfrac{\partial\phi_1^+}{\partial x} - \dfrac{\partial\phi_2^+}{\partial y} - \dfrac{\partial\phi_3^+}{\partial z} + \left(\dfrac{m_0 c}{\hbar} - \mathrm{j}\dfrac{\partial}{\partial ct}\right)\phi_4^+ = 0 & (12.2.5\mathrm{d}) \end{cases}$$

方程(12.2.4)和(12.2.5)为展开后的四维双曲型 Dirac 方程，它比传统的 Dirac 方程数多出一倍，形成了八重 Dirac 粒子。与传统 Dirac 方程不同的是，每个双曲型 Dirac 均由态函数的 4 个分量构成，而每一个传统的 Dirac 方程仅包含了波函数的 3 个分量。双曲型 Dirac 方程类同于 Majovana 表象，正粒子的态函数与反粒子的态函数不相混合，如将式(12.2.4)看做正粒子方程，下一章可证明式(12.2.5)为反粒子方程，它们相互厄米共轭。

12.3　双曲 Dirac 方程的遍历性

式(12.2.4)和(12.2.5)的 Dirac 方程数虽然为传统 Dirac 方程数的 2 倍，但它们并不能完全反映出 Dirac 方程在四维 Minkowski 动量空间的时空对称性和遍历性。可取[参见第十九章式(19.3.4)]

$$\gamma_i^1(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3),\gamma_i^2(-\gamma,\gamma_2,\gamma_3),\gamma_i^3(\gamma_1,-\gamma_2,\gamma_3),\gamma_i^4(\gamma_1,\gamma_2,-\gamma_3),$$
$$\gamma_i^5(-\gamma_1,-\gamma_2,-\gamma_3),\gamma_i^6(\gamma_1,-\gamma_2,-\gamma_3),\gamma_i^7(-\gamma_1,\gamma_2,-\gamma_3),\gamma_i^8(-\gamma_1,-\gamma_2,\gamma_3) \tag{12.3.1}$$

式(12.3.1)中各式均可作为 t'Hooft 矩阵，它们在第十七章讨论强相互作用方程的性质时有重要用处。将方程(12.2.4)分别用式(12.3.1)中的 γ_i 函数进行替换，可扩展成 4×8 个 Dirac 方程，它们均为正粒子方程；而式(12.2.5)用式(12.3.1)中 γ_i 矩阵的厄米共轭进行替换，也可扩展为 4×8 个反粒子的 Dirac 方程。64 个正粒子和反粒子的 Dirac 方程遍历了四维 Minkowski 动量空间的对称性。

正粒子和反粒子的运动方程相互分离并且保持相互厄米共轭关系，这与传统量子场论的 Dirac 旋量方程类同，排除了相对论量子力学与场论中 Dirac 粒子方程形式不同的问题。特别是，它们在 Minkowski 动量空间类时区可以找到相应的几何点，分别位于相互负元的半线性空间，解决了高速粒子的几何关联问题。由正、反粒子共同组成的 8×8 个 Dirac 方程，这 64 个 Dirac 粒子是以 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_0$，$-\gamma_1=\gamma_1^+$，$-\gamma_2=\gamma_2^+$，$-\gamma_3=\gamma_3^+$，$-\gamma_0$ 为八元数的排列组合，或为表 12.1 中 $\left(\pm\frac{\partial}{\partial X_\mu}\phi_\nu\right)(\mu,\nu=1,2,3,4)$ 的线性组合。函数 $\gamma_\mu(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_0)$ 具有时空对称性

表 12.1

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_1^+	ϕ_2^+	ϕ_3^+	ϕ_4^+
$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial\phi_1}{\partial x}$	$\frac{\partial\phi_2}{\partial x}$	$\frac{\partial\phi_3}{\partial x}$	$\frac{\partial\phi_4}{\partial x}$	$\frac{\partial\phi_1^+}{\partial x}$	$\frac{\partial\phi_2^+}{\partial x}$	$\frac{\partial\phi_3^+}{\partial x}$	$\frac{\partial\phi_4^+}{\partial x}$
$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial\phi_1}{\partial y}$	$\frac{\partial\phi_2}{\partial y}$	$\frac{\partial\phi_3}{\partial y}$	$\frac{\partial\phi_4}{\partial y}$	$\frac{\partial\phi_1^+}{\partial y}$	$\frac{\partial\phi_2^+}{\partial y}$	$\frac{\partial\phi_3^+}{\partial y}$	$\frac{\partial\phi_4^+}{\partial y}$
$\frac{\partial}{\partial z}$	$\frac{\partial\phi_1}{\partial z}$	$\frac{\partial\phi_2}{\partial z}$	$\frac{\partial\phi_3}{\partial z}$	$\frac{\partial\phi_4}{\partial z}$	$\frac{\partial\phi_1^+}{\partial z}$	$\frac{\partial\phi_2^+}{\partial z}$	$\frac{\partial\phi_3^+}{\partial z}$	$\frac{\partial\phi_4^+}{\partial z}$
$\frac{\partial}{\partial t}$	$\frac{\partial\phi_1}{\partial t}$	$\frac{\partial\phi_2}{\partial t}$	$\frac{\partial\phi_3}{\partial t}$	$\frac{\partial\phi_4}{\partial t}$	$\frac{\partial\phi_1^+}{\partial t}$	$\frac{\partial\phi_2^+}{\partial t}$	$\frac{\partial\phi_3^+}{\partial t}$	$\frac{\partial\phi_4^+}{\partial t}$
$-\frac{\partial}{\partial x}$	$-\frac{\partial\phi_1}{\partial x}$	$-\frac{\partial\phi_2}{\partial x}$	$-\frac{\partial\phi_3}{\partial x}$	$-\frac{\partial\phi_4}{\partial x}$	$-\frac{\partial\phi_1^+}{\partial x}$	$-\frac{\partial\phi_2^+}{\partial x}$	$-\frac{\partial\phi_3^+}{\partial x}$	$-\frac{\partial\phi_4^+}{\partial x}$
$-\frac{\partial}{\partial y}$	$-\frac{\partial\phi_1}{\partial y}$	$-\frac{\partial\phi_2}{\partial y}$	$-\frac{\partial\phi_3}{\partial y}$	$-\frac{\partial\phi_4}{\partial y}$	$-\frac{\partial\phi_1^+}{\partial y}$	$-\frac{\partial\phi_2^+}{\partial y}$	$-\frac{\partial\phi_3^+}{\partial y}$	$-\frac{\partial\phi_4^+}{\partial y}$
$-\frac{\partial}{\partial z}$	$-\frac{\partial\phi_1}{\partial z}$	$-\frac{\partial\phi_2}{\partial z}$	$-\frac{\partial\phi_3}{\partial z}$	$-\frac{\partial\phi_4}{\partial z}$	$-\frac{\partial\phi_1^+}{\partial z}$	$-\frac{\partial\phi_2^+}{\partial z}$	$-\frac{\partial\phi_3^+}{\partial z}$	$-\frac{\partial\phi_4^+}{\partial z}$
$-\frac{\partial}{\partial t}$	$-\frac{\partial\phi_1}{\partial t}$	$-\frac{\partial\phi_2}{\partial t}$	$-\frac{\partial\phi_3}{\partial t}$	$-\frac{\partial\phi_4}{\partial t}$	$-\frac{\partial\phi_1^+}{\partial t}$	$-\frac{\partial\phi_2^+}{\partial t}$	$-\frac{\partial\phi_3^+}{\partial t}$	$-\frac{\partial\phi_4^+}{\partial t}$

和遍历性，8×8 个 Dirac 方程囊括了四维双曲复空间的所有可能状态，构成四维 Dirac 方程的时空对称性。

12.4　双曲型 Dirac 方程与传统 Dirac 方程的对比分析

表 12.1 给出了 8×8 即 64 个 Dirac 粒子的波动方程，可由四元数$\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial t}\right)$及$(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)$排列组合来构成，也是粒子态函数对四维时空变化率的排列组合，这既包含了四维时空的对称性又刻画了 Dirac 粒子的内禀性质。每一个 Dirac 粒子的波动方程中都包含了算符的四个分量$\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial t}\right)$，以及波函数的四个分量$(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)$，保持了四维 Dirac 波动方程和四维时空的和谐关系和对称性质，这与传统 Dirac 粒子的波动方程有很大区别。

在传统的相对论量子力学中，Dirac 波动方程可写作

$$\left(\gamma'_\mu \hbar\,\frac{\partial}{\partial X_\mu}+\mathrm{i}m_0c\right)\phi=0 \tag{12.4.1}$$

式(12.4.1)与(12.2.2)具有类同的形式。其中，

$$\gamma'_1=\begin{bmatrix} & & & -\mathrm{i}\\ & & -\mathrm{i} & \\ & \mathrm{i} & & \\ \mathrm{i} & & & \end{bmatrix},\quad \gamma'_2=\begin{bmatrix} & & & -1\\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{bmatrix},$$

$$\gamma'_3=\begin{bmatrix} & & -\mathrm{i} & \\ & & & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & & & \\ & -\mathrm{i} & & \end{bmatrix},\quad \gamma'_4=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{bmatrix} \tag{12.4.2}$$

式(12.4.1)可分写成

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi_4+\frac{\partial}{\partial z}\phi_3+\left(\mathrm{i}\frac{m_0c}{\hbar}+\frac{\partial}{\partial ct}\right)\phi_1=0 & (12.4.3\mathrm{a})\\ \left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi_3-\frac{\partial}{\partial z}\phi_4+\left(\mathrm{i}\frac{m_0c}{\hbar}+\frac{\partial}{\partial ct}\right)\phi_2=0 & (12.4.3\mathrm{b})\\ \left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi_2+\frac{\partial}{\partial z}\phi_1+\left(\mathrm{i}\frac{m_0c}{\hbar}+\frac{\partial}{\partial ct}\right)\phi_3=0 & (12.4.3\mathrm{c})\\ \left(\frac{\partial}{\partial z}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi_1-\frac{\partial}{\partial z}\phi_2+\left(\mathrm{i}\frac{m_0c}{\hbar}+\frac{\partial}{\partial ct}\right)\phi_4=0 & (12.4.3\mathrm{d})\end{cases}$$

式(12.4.1)或(12.4.3)为椭圆复数所对应的传统 Dirac 方程。对两类 Dirac 波动方程有如下的对比和分析：

(1) 式(12.4.3)中每一个方程只有三个态函数分量。由于每一个方程对应一个粒子，在四维时空中一个 Dirac 运动方程缺少一个态函数分量，是值得质疑的；式(12.2.4)中每一个方程具有四个波函数的分量，它们分别被作用到四维时空梯度上。式(12.3.2)至(12.3.9)包含了四维时空的遍历性和对称性，说明 Dirac 粒子的内禀性质与四维 Minkowski 时空的几何性质具有一种深层次的内在关联。

(2) 式(12.4.3)中，前两式一般认为正粒子方程，后两式为反粒子方程，两种粒子具有相互混合的态函数；而式(12.2.3)为式(12.2.2)的厄米共轭，如果视式(12.2.2)为正粒子方程，式(12.2.3)为反粒子方程，正、反粒子的波动方程相互分离。正、反 Dirac 粒子具有不同但相互厄米共轭的态函数，使态函数 ϕ 和 ϕ^* 赋予了不同意义的物理诠释。

如果正、反粒子具有厄米共轭关系，它们应处于不同的时空区域。在四维动量空间，如果设定正粒子位于未来类时区，则反粒子应位于过去类时区。即正、反粒子与四维时空性质建立起几何联系，或四维时空具有物质性，这部分内容在后续章节中进行讨论。

12.5 双曲 Dirac 方程的协变性

在双曲 Minkowski 复空间四维 Lorentz 群为特殊幺正群 $SU(4)$ [参见第十九章式(19.2.16)]。四维算符的 Lorentz 变换可写作

$$\hat{X}'_\mu = \alpha_{\mu\nu}\hat{X}_\nu \tag{12.5.1}$$

其中，

$$\alpha^+_{\mu\nu}\alpha_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu}\alpha^+_{\mu\nu} = I \tag{12.5.2}$$

设在 Lorentz 变换下，态函数 $\phi(x)$ 的变换形式

$$\phi'(X') = \Lambda\phi(X) \tag{12.5.3}$$

其中，X 为四维函数，Λ 有性质：

$$\Lambda^{-1}\Lambda = \Lambda\Lambda^{-1} = 1 \tag{12.5.4}$$

四维梯度算符有性质：

$$\frac{\partial}{\partial X'_\mu} = \alpha^+_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial X_\nu}, \quad \frac{\partial}{\partial X_\nu} = \alpha_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial X'_\mu} \tag{12.5.5}$$

由式(12.1.2)，四维动量算符对应变换关系：

$$\begin{cases} \hat{P}'_\mu = \alpha_{\mu\nu}\hat{P}_\nu \\ \hat{P}'^+_\mu = \alpha^+_{\mu\nu}\hat{P}^+_\nu \end{cases} \tag{12.5.6}$$

将式(12.5.3)和(12.5.4)代入方程(12.2.2)，得

$$\left(\gamma_\mu\alpha_{\mu\nu}\hbar\frac{\partial}{\partial X'^+_\nu} + \mathrm{j}m_0c\right)\Lambda^{-1}\phi'(x') = 0 \tag{12.5.7}$$

式(12.5.7)左乘 Λ,满足

$$\left(\Lambda\gamma_{\mu}\alpha_{\mu\nu}\Lambda^{-1}\hbar\frac{\partial}{\partial X_{\nu}^{\prime+}}+\mathrm{j}m_{0}c\right)\phi'(x')=0 \tag{12.5.8}$$

令 $\Lambda\gamma_{\mu}\alpha_{\mu\nu}\Lambda^{-1}=\gamma_{\nu}$,由式(12.5.4),有关系:

$$\gamma_{\nu}\alpha_{\mu\nu}=\Lambda^{-1}\gamma_{\nu}\Lambda \tag{12.5.9}$$

则式(12.5.8)可化为

$$\left(\gamma_{\nu}\hbar\frac{\partial}{\partial X_{\nu}^{\prime+}}+\mathrm{j}m_{0}c\right)\phi'(x')=0 \tag{12.5.10}$$

式(12.5.10)与方程(12.2.2)具有相同的形式,如能找到 Λ 则可证得 Dirac 方程在双曲复空间具有 Lorentz 不变性。

由于二维双曲复平面的 Dirac 方程(12.1.7),其空间和时间分别作为一个独立变量,可以分步进行空间和时间反射变换。对式(12.1.13)进行空间反射变换,取 $\Lambda=\mathrm{j}\pi_2$,$\Lambda^{-1}=-\mathrm{j}\pi_2^{+}$,满足关系式(12.5.4),则

$$\Lambda^{-1}\pi_1\Lambda=-\pi_1,\quad \Lambda^{-1}\pi_2\Lambda=\pi_2 \tag{12.5.11}$$

对式(12.1.13)进行时间反射变换,取 $\Lambda=\mathrm{j}\pi_1$,$\Lambda^{-1}=-\mathrm{j}\pi_1^{+}$,满足式(12.5.4),则

$$\Lambda^{-1}\pi_1\Lambda=\pi_1,\quad \Lambda^{-1}\pi_2\Lambda=-\pi_2 \tag{12.5.12}$$

对方程(12.2.2)在四维时空中进行无穷小 Lorentz 变换。取

$$\alpha_{\mu\nu}=I+\mathrm{j}\varepsilon_{\mu\nu} \tag{12.5.13}$$

I 为单位矩阵,则时空间隔不变量应满足条件

$$\alpha_{\mu\nu}^{+}\alpha_{\mu\nu}=(I-\mathrm{j}\varepsilon_{\mu\nu}^{+})(I+\mathrm{j}\varepsilon_{\mu\nu})=I+\mathrm{j}(\varepsilon_{\mu\nu}-\varepsilon_{\mu\nu}^{+})+O(\varepsilon_{\mu\nu}^{2})=I \tag{12.5.14}$$

即 $|\varepsilon_{\mu\nu}-\varepsilon_{\mu\nu}^{+}|$ 为小量,设

$$\begin{cases}\Lambda=I+\dfrac{1}{2}\mathrm{j}\varepsilon_{\mu\nu} & (12.5.15\mathrm{a})\\[2ex] \Lambda^{-1}=\Lambda^{+}=I-\dfrac{1}{2}\mathrm{j}\varepsilon_{\mu\nu}^{+} & (12.5.15\mathrm{b})\end{cases}$$

满足式(12.5.4)条件,而

$$\Lambda^{-1}\gamma_{\mu}\Lambda=\left(I-\frac{1}{2}\mathrm{j}\varepsilon_{\mu\nu}^{+}\right)\gamma_{\mu}\left(I+\frac{1}{2}\mathrm{j}\varepsilon_{\mu\nu}\right)=\gamma_{\mu}-\frac{1}{2}\mathrm{j}\varepsilon_{\mu\nu}^{+}\gamma_{\mu}+\frac{1}{2}\mathrm{j}\gamma_{\mu}\varepsilon_{\mu\nu}+O(\varepsilon_{\mu\nu}^{2})$$

如能找到 $-\varepsilon_{\mu\nu}^{+}\gamma_{\mu}=\gamma_{\mu}\varepsilon_{\mu\nu}$ 或

$$\gamma_{\mu}\varepsilon_{\mu\nu}+\varepsilon_{\mu\nu}^{+}\gamma_{\mu}=0 \tag{12.5.16}$$

则

$$\Lambda^{-1}\gamma_{\mu}\Lambda=\gamma_{\mu}+\mathrm{j}\gamma_{\mu}\varepsilon_{\mu\nu}=\gamma_{\mu}(I+\mathrm{j}\varepsilon_{\mu\nu})=\gamma_{\mu}\alpha_{\mu\nu} \tag{12.5.17}$$

可证得 Dirac 方程在双曲复空间具有 Lorentz 不变性。

12.6 对 Dirac 方程协变性的讨论

由式(12.5.16),关键是找到 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 的具体形式,才能保证无穷小 Lorentz 变换的

协变性。一般情况下，$\varepsilon_{\mu\nu}$ 是能找到的，例如，取

$$\varepsilon_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} & & & 1\\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{bmatrix} \tag{12.6.1}$$

由式(19.3.4)将 t'Hooft 矩阵 $\gamma_i(i=1,2,3)$ 和单位矩阵 γ_0 代入式(12.5.16)，有关系式：

$$\begin{aligned}
\gamma_1\varepsilon_{\mu\nu}+\varepsilon_{\mu\nu}^{+}\gamma_1 &= \begin{pmatrix} & & & -1\\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} & & & -1\\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & -1\\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}=0\\
\gamma_2\varepsilon_{\mu\nu}+\varepsilon_{\mu\nu}^{+}\gamma_2 &= \begin{pmatrix} & & -1 & \\ & & & 1\\ 1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} & & & -1\\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & -1 & \\ & & & 1\\ -1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}=0\\
\gamma_3\varepsilon_{\mu\nu}+\varepsilon_{\mu\nu}^{+}\gamma_3 &= \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & -1\\ & & 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} & & & -1\\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & -1\\ & & 1 & \end{pmatrix}=0\\
\gamma_0\varepsilon_{\mu\nu}+\varepsilon_{\mu\nu}^{+}\gamma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} & & & -1\\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix}=0
\end{aligned} \tag{12.6.2}$$

式(12.6.2)满足式(12.5.16)，则式(12.5.4)、(12.5.5)以及式(12.5.17)成立，由此证得双曲型 Dirac 方程是协变的，即可满足关系式(12.5.10)，保证了 Dirac 方程在双曲复空间具有 Lorentz 不变性。

传统的 Dirac 方程能否具有这种 Lorentz 不变性呢？在一般量子力学文献中 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 的选取有多种形式，但都可归结到

$$\varepsilon_{\mu\nu}\gamma'_{\mu}+\gamma'_{\mu}\varepsilon_{\mu\nu}=0 \tag{12.6.3}$$

许多文献在应用中并没有给出 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 具体的矩阵形式，不加证明地认为 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 与 γ'_{μ} 满足对易关系 $\varepsilon_{\mu\nu}\gamma'_{\mu}=\gamma'_{\mu}\varepsilon_{\mu\nu}$，实际上式(12.6.3)的情况在具体问题中很难满足。例如取 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 为式(12.6.1)形式，γ'_{μ} 满足式(12.4.2)，有方程

$$\varepsilon_{\mu\nu}\gamma_1' + \gamma_1'\varepsilon_{\mu\nu} = 2\mathrm{i}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \tag{12.6.4a}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu}\gamma_2 + \gamma_2\varepsilon_{\mu\nu} = 0 \tag{12.6.4b}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu}\gamma_3 + \gamma_3\varepsilon_{\mu\nu} = 2\mathrm{i}\begin{bmatrix} & -1 & & \\ -1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{bmatrix} \tag{12.6.4c}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu}\gamma_4 + \gamma_4\varepsilon_{\mu\nu} = 0 \tag{12.6.4d}$$

显然式(12.6.4)不满足式(12.6.3)。如果找不到满足式(12.6.3)的$\varepsilon_{\mu\nu}$，就不能说传统的 Dirac 方程满足 Lorentz 不变性。

无穷小 Lorentz 变换应该具有一般 Lorentz 变换相同的性质。第四章中，在 Minkowski 几何的四维动量空间讨论了四维动量所对应的 Lorentz 变换满足关系式(4.5.18)，考虑四维动量空间的遍历性和对称性，写成算符形式，有动量算符关系式：

$$\begin{bmatrix} \mathrm{j}\gamma_1\hat{p}_x' \\ \mathrm{j}\gamma_2\hat{p}_y' \\ \mathrm{j}\gamma_3\hat{p}_z' \\ \gamma_0\hat{p}_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_x^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_y}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_z}{v^2} & \frac{\mathrm{j}v_x}{\alpha c} \\ \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_y}{v^2} & 1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_y^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_yv_z}{v^2} & \frac{\mathrm{j}v_y}{\alpha c} \\ \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_z}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_yv_z}{v^2} & 1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_z^2}{v^2} & \frac{\mathrm{j}v_z}{\alpha c} \\ \frac{\mathrm{j}v_x}{\alpha c} & \frac{\mathrm{j}v_y}{\alpha c} & \frac{\mathrm{j}v_z}{\alpha c} & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{j}\gamma_1\hat{p}_x \\ \mathrm{j}\gamma_2\hat{p}_y \\ \mathrm{j}\gamma_3\hat{p}_z \\ \gamma_0\hat{p}_4 \end{bmatrix} \tag{12.6.5}$$

将式(12.6.5)写为分量形式：

$$\begin{cases} \gamma_1\hat{p}_1' = \gamma_1\hat{p}_1 + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{\gamma(\hat{\vec{p}}\cdot\vec{v})v_x}{v^2} + \gamma_0\frac{v_x}{\alpha}\frac{E}{c} \\ \gamma_2\hat{p}_2' = \gamma_2\hat{p}_2 + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{\gamma(\hat{\vec{p}}\cdot\vec{v})v_y}{v^2} + \gamma_0\frac{v_y}{\alpha}\frac{E}{c} \\ \gamma_3\hat{p}_3' = \gamma_3\hat{p}_3 + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\gamma\frac{(\hat{\vec{p}}\cdot\vec{v})v_z}{v^2} + \gamma_0\frac{v_z}{\alpha}\frac{E}{c} \\ \gamma_0\frac{\hat{E}'}{c} = \frac{1}{\alpha}\left(\gamma_0\frac{E}{c} + \gamma\frac{\hat{\vec{p}}\cdot\vec{v}}{c^2}\right) \end{cases} \tag{12.6.6}$$

式(12.6.6)中每一个分量都可以写成四维矩阵形式，也可以对应四个坐标变换方

程，例如将式(12.6.6)的第一式写成方程

$$\gamma_1 \hat{p}_1' \phi' = \gamma_1 \hat{p}_1 \phi + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \frac{\gamma(\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{v}) v_x}{v^2} \phi + \gamma_0 \frac{v_x}{\alpha} \frac{\hat{E}}{c} \phi \tag{12.6.7}$$

展开式(12.6.7)得到 $H'\left(\mathrm{j}\,\hat{\boldsymbol{p}}', \frac{\hat{E}}{c}\right)$ 中算符分量 $\hat{p}_1'$ 的四个坐标变换关系式。由 Minkowski 动量空间的遍历性，用 64 个 Dirac 方程在四维坐标变换中才可能描述其协变性。将式(12.6.5)展开是一个十六维矩阵，作内积满足四维动量算符的间隔不变量。如将 γ_μ 和 γ_μ^+ 作为一个算符，式(12.6.5)中 $\gamma_\mu^+ \hat{P}_\mu'^+$ 和 $\gamma_\mu^+ \hat{P}_\mu^+$ 写为行矩阵，$\gamma_\mu \hat{P}_\mu'$ 和 $\gamma_\nu \hat{P}_\mu$ 可作为列矩阵，满足

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} -\mathrm{j}\gamma_1^+ \hat{p}_1' & -\mathrm{j}\gamma_2^+ \hat{p}_2' & -\mathrm{j}\gamma_3^+ \hat{p}_3' & \gamma_0 \frac{\hat{E}'}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{j}\gamma_1 \hat{p}_1' \\ \mathrm{j}\gamma_2 \hat{p}_2' \\ \mathrm{j}\gamma_3 \hat{p}_3' \\ \gamma_0 \frac{\hat{E}'}{c} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\mathrm{j}\gamma_1^+ \hat{p}_1 & -\mathrm{j}\gamma_2^+ \hat{p}_2 & -\mathrm{j}\gamma_3^+ \hat{p}_3 & \gamma_0 \frac{\hat{E}}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{j}\gamma_1 \hat{p}_1 \\ \mathrm{j}\gamma_2 \hat{p}_2 \\ \mathrm{j}\gamma_3 \hat{p}_3 \\ \gamma_0 \frac{\hat{E}}{c} \end{bmatrix} = m_0^2 c^2
\end{aligned} \tag{12.6.8}$$

式(12.6.8)为狭义相对论中能量动量的算符关系

$$\hat{E}'^2 - \hat{p}'^2 c^2 = \hat{E}^2 - \hat{p}^2 c^2 = m_0^2 c^4 \tag{12.6.9}$$

式(12.6.9)满足关系式(12.1.6)。可将式(12.6.8)写成

$$\gamma_\mu^+ \gamma_\mu \hat{P}_\mu'^+ \hat{P}_\mu' = \gamma_\mu^+ \gamma_\nu \hat{P}_\mu^+ \hat{P}_\mu = m_0^2 c^4 \tag{12.6.10}$$

或

$$\hat{P}_\mu'^+ \hat{P}_\mu' = \hat{P}_\mu^+ \hat{P}_\mu = m_0^2 c^4 \tag{12.6.11}$$

式(12.6.11)中 $\hat{P}_\mu'^+$、$\hat{P}_\mu'$ 以及 $\hat{P}_\mu^+$、$\hat{P}_\mu$ 作为矩阵时按矩阵的乘法规则运算，作为四元数时按四元数内积的混合项乘积规则运算。

12.7 四维椭圆复矢量的坐标变换

传统 Dirac 方程(12.4.1)如写成式(12.6.4)的矩阵形式，利用椭圆复数的算

符形式[参见第二十四章式(24.5.11)或(24.5.13)],有方程

$$\left(\mathrm{i}\gamma_\mu \hbar \frac{\partial}{\partial X_\mu} - m_0 c\right)\phi = 0 \tag{12.7.1}$$

取 $\gamma_i(i=1,2,3)$ 为式(19.3.4)的 t′Hooft 矩阵,$\gamma_4=\gamma_0$ 为单位矩阵。式(12.7.1)满足式(12.6.7)的协变形式,可以写成与式(12.6.4)类同的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \mathrm{i}\gamma_1 \hat{p}'_x \\ \mathrm{i}\gamma_2 \hat{p}'_y \\ \mathrm{i}\gamma_3 \hat{p}'_z \\ \gamma_0 \hat{p}'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_x^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_x v_y}{v^2} & \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_x v_z}{v^2} & \frac{\mathrm{i}v_x}{\beta c} \\ \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_x v_y}{v^2} & 1+\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_y^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_y v_z}{v^2} & \frac{\mathrm{i}v_y}{\beta c} \\ \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_x v_z}{v^2} & \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_y v_z}{v^2} & 1+\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{v_z^2}{v^2} & \frac{\mathrm{i}v_z}{\beta c} \\ \frac{\mathrm{i}v_x}{\beta c} & \frac{\mathrm{i}v_y}{\beta c} & \frac{\mathrm{i}v_z}{\beta c} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i}\gamma_1 \hat{p}_x \\ \mathrm{i}\gamma_2 \hat{p}_y \\ \mathrm{i}\gamma_3 \hat{p}_z \\ \gamma_0 \hat{p}_4 \end{bmatrix} \tag{12.7.2}$$

其中,$\beta=\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 不是相对论因子,式(12.7.2)也不是 Lorentz 变换。由式(4.6.5),动量间隔不变量不满足相对论中的能量动量关系,它是四维椭圆复空间的时空变换关系式。但是,在进行无穷小时空变换时满足关系式(12.5.16)应具有式(12.5.17)的协变形式。也就是说,在四维椭圆复空间,一般形式的时空变换关系与无穷小坐标变换保持着和谐性,或者它们与椭圆复空间的运算规则式(2.1.24)、(4.6.4)以及式(4.6.6)保持着一致性。

对式(12.7.1)取厄米共轭,有方程

$$\phi^+\left(-\mathrm{i}\hbar\gamma_\mu \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial X_\mu} - m_0 c\right) = 0 \tag{12.7.3}$$

其中,利用了 $\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial X_\mu} = \gamma_\mu^+ \frac{\partial}{\partial X_\mu^+}$。将式(12.7.1)左乘 ϕ^+,式(12.7.3)右乘 ϕ,两者相减,有

$$\frac{\partial}{\partial X_\mu}(\phi^+ \gamma_\mu \phi) = \frac{\partial J_\mu}{\partial X_\mu} = 0 \tag{12.7.4}$$

$J_\mu = \phi^+ \gamma_\mu \phi$ 为四维几率密度守恒关系式。

在 Minkowski 空间由椭圆复矢量也能满足 Lorentz 变换。将四维椭圆算符的矩阵形式写为

$$\gamma_\mu \hat{P}_\mu = \gamma_0 \frac{\hat{E}}{c} + \mathrm{i}\gamma \hat{\vec{p}} = \mathrm{i}\hbar\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial X_\mu^+} = \mathrm{i}\hbar\left(\gamma_0 \frac{\partial}{\partial ct} - \mathrm{i}\gamma \nabla\right) \tag{12.7.5}$$

将式(12.7.5)取矩阵转置后再乘式(12.7.5),有方程

$$\gamma_\mu^\sim \gamma_\mu \hat{P}_\mu^\sim \hat{P}_\mu \psi = \hat{P}_\mu^\sim \hat{P}_\mu \psi = m_0^2 c^2 \psi \tag{12.7.6}$$

或

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2+\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi=0 \tag{12.7.7}$$

式(12.7.7)为 Klein-Gordon 方程，满足狭义相对论中的能量动量关系。由式(4.7.3)，式(12.7.5)满足四维动量算符的坐标变换关系，四维坐标变换矩阵写成

$$\begin{bmatrix} \mathrm{i}\gamma_1\hat{p}'_x \\ \mathrm{i}\gamma_2\hat{p}'_y \\ \mathrm{i}\gamma_3\hat{p}'_z \\ \gamma_0\dfrac{\hat{E}'}{c} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_x^2}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_y}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_z}{v^2} & \dfrac{\mathrm{i}v_x}{\alpha c} \\ \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_y}{v^2} & 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_y^2}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_yv_z}{v^2} & \dfrac{\mathrm{i}v_y}{\alpha c} \\ \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_z}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_yv_z}{v^2} & 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_z^2}{v^2} & \dfrac{\mathrm{i}v_z}{\alpha c} \\ -\dfrac{\mathrm{i}v_x}{\alpha c} & -\dfrac{\mathrm{i}v_y}{\alpha c} & -\dfrac{\mathrm{i}v_z}{\alpha c} & \dfrac{1}{\alpha} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{i}\gamma_1\hat{p}_x \\ \mathrm{i}\gamma_2\hat{p}_y \\ \mathrm{i}\gamma_3\hat{p}_z \\ \gamma_0\dfrac{\hat{E}}{c} \end{bmatrix} \tag{12.7.8}$$

四维动量算符的间隔不变量满足关系式(12.7.6)。

方程(12.7.8)在四维时空中可以进行无穷小 Lorentz 变换。取

$$U_{\mu\nu}=I+\mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu} \tag{12.7.9}$$

I 为单位矩阵，则变换矩阵应满足条件

$$U_{\mu\nu}^{\sim}U_{\mu\nu}=(I+\mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu}^{\sim})(I+\mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu})=I+\mathrm{i}(\varepsilon_{\mu\nu}+\varepsilon_{\mu\nu}^{\sim})+O(\varepsilon_{\mu\nu}^2)=I \tag{12.7.10}$$

即 $|\varepsilon_{\mu\nu}+\varepsilon_{\mu\nu}^{\sim}|$ 为小量时，式(12.7.5)变换矩阵满足正交关系

$$U_{\mu\nu}^{\sim}U_{\mu\nu}=U_{\mu\nu}U_{\mu\nu}^{\sim}=I \tag{12.7.11}$$

设在 Lorentz 变换下，态函数 $\phi(x)$ 的变换形式满足式(12.5.3)和(12.5.4)，四维梯度算符有性质

$$\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial X_\nu}=U_{\mu\nu}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial X'_\mu} \tag{12.7.12}$$

代入方程(12.7.1)，得

$$\left(\mathrm{i}\hbar\gamma_\mu U_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial X'_\mu}-m_0c\right)\Lambda^{-1}\phi'=0 \tag{12.7.13}$$

式(12.7.13)左乘 Λ 满足

$$\left(\mathrm{i}\hbar\Lambda\gamma_\mu U_{\mu\nu}\Lambda^{-1}\frac{\partial}{\partial X'_\nu}-m_0c\right)\phi'(x')=0 \tag{12.7.14}$$

令 $\Lambda\gamma_\mu U_{\mu\nu}\Lambda^{-1}=\gamma_\nu$，有关系

$$\gamma_\nu U_{\mu\nu}=\Lambda^{-1}\gamma_\nu\Lambda$$

则式(12.7.14)可化为

$$\left(\mathrm{i}\hbar\gamma_\nu\frac{\partial}{\partial X'_\nu}-m_0c\right)\phi'(x')=0 \tag{12.7.15}$$

如能找到 Λ 则可证得 Dirac 方程(12.7.1)具有 Lorentz 不变性。设

$$\begin{cases}\Lambda = I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu} \\ \Lambda^{-1} = I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon_{\widetilde{\mu\nu}}\end{cases}$$

满足关系

$$\Lambda^{-1}\Lambda = \Lambda\Lambda^{-1} = \left(I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon_{\widetilde{\mu\nu}}\right)\left(I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu}\right) = I + \frac{1}{2}\mathrm{i}(\varepsilon_{\mu\nu} + \varepsilon_{\widetilde{\mu\nu}}) + O(\varepsilon_{\mu\nu}^2) = I$$

而

$$\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda = \left(I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon_{\widetilde{\mu\nu}}\right)\gamma_\mu\left(I + \frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu}\right) = \gamma_\mu + \frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon_{\widetilde{\mu\nu}}\gamma_\mu + \frac{1}{2}\mathrm{i}\gamma_\mu\varepsilon_{\mu\nu} + O(\varepsilon_{\mu\nu}^2)$$

(12.7.16)

如能找到 $\varepsilon_{\widetilde{\mu\nu}}\gamma_\mu = \gamma_\mu\varepsilon_{\mu\nu}$ 或

$$\gamma_\mu\varepsilon_{\mu\nu} - \varepsilon_{\widetilde{\mu\nu}}\gamma_\mu = 0 \tag{12.7.17}$$

则式(12.7.16)可写为

$$\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda = \gamma_\mu + \mathrm{i}\gamma_\mu\varepsilon_{\mu\nu} = \gamma_\mu(I + \mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu}) = \gamma_\mu U_{\mu\nu} \tag{12.7.18}$$

如能找到 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 能够满足式(12.7.17)条件，则 Dirac 方程在四维动量空间可具有 Lorentz 变换的协变性，但是椭圆复数与 Minkowski 空间的几何性质不吻合，$\varepsilon_{\mu\nu}$ 很难找到。例如，如取 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 为单位矩阵可以满足式(12.7.17)条件，可是 $|\varepsilon_{\mu\nu} + \varepsilon_{\widetilde{\mu\nu}}|$ 并不是小量，所以式(12.7.8)可看做满足 Lorentz 变换的一种数学方法，并不能考虑与 Minkowski 空间有严格的几何对应关系。

12.8　Dirac 方程的二维双曲平面波解

在双曲 Minkowski 空间，由式(12.1.7)线性 Dirac 粒子的 Hamiltonian 量可写为(本节为了使方程简化，取 $\hbar = c = 1$)

$$\hat{H} = \alpha_2^+\alpha_1\hat{\vec{p}} + \alpha_2^+\alpha_3 m_0 \tag{12.8.1a}$$

对式(12.8.1a)取厄米共轭

$$\hat{H}^+ = \alpha_1^+\alpha_2\hat{\vec{p}}^+ + \alpha_3^+\alpha_2 m_0 \tag{12.8.1b}$$

注意到式(12.1.3)取 $\hat{\vec{p}} = \mathrm{j}\vec{\nabla}, \hat{H} = -\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial t}$，对式(12.8.1)作内积，满足式(12.1.6)。因 $\alpha_i(i = 1,2,3)$ 为常数算符，其中，α_2^+ 为虚数算符，α_1、α_3 为实数算符，式(12.8.1)与(12.1.2)具有类同的形式。因 $\hat{H}$ 与 $\hat{\vec{p}}$ 对易，满足对易关系 $[\hat{H}, \hat{\vec{p}}] = 0$。Hamiltonian 算符 $\hat{H}$ 与动量算符 $\hat{\vec{p}}$ 有共同本征态，分别用 E 和 $\vec{p}$ 表示二者的本征值。其本征函数参照式(8.3.14)，写作

$$\psi(x,t) = w(\vec{p})e^{j(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)/\hbar} \tag{12.8.2}$$

将式(12.8.2)作用式(12.8.1)，有方程

$$\begin{cases} \hat{H}\psi(x,t) = (\alpha_2^+\alpha_1\hat{\vec{p}} + \alpha_2^+\alpha_3 m_0)\psi(x,t) & (12.8.3a) \\ \hat{H}^+\psi(x,t)^+ = (\alpha_1^+\alpha_2\hat{\vec{p}}^+ + \alpha_3^+\alpha_2 m_0)\psi(x,t)^+ & (12.8.3b) \end{cases}$$

对应的本征方程为

$$\begin{cases} E\psi(x,t) = (\alpha_2^+\alpha_1\vec{p} + \alpha_2^+\alpha_3 m_0)\psi(x,t) & (12.8.4a) \\ -E\psi(x,t)^+ = (-\alpha_1^+\alpha_2\vec{p} + \alpha_3^+\alpha_2 m_0)\psi(x,t)^+ & (12.8.4b) \end{cases}$$

对式(12.8.4)取内积，有质量动量关系式

$$E^2 = p^2 + m_0^2 \tag{12.8.5}$$

显然，二次式(12.8.5)是由一次方程式，即正、反粒子的本征方程共同决定的。

令

$$w(p) = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \tag{12.8.6}$$

由式(24.4.11)和(24.4.12)，有算符

$$\begin{cases} -j\dfrac{\partial}{\partial X_\mu^+} = \vec{\nabla} - j\dfrac{\partial}{\partial t} = j\hat{\vec{p}} + \hat{H} & (12.8.7a) \\ j\dfrac{\partial}{\partial X_\mu} = \vec{\nabla} + j\dfrac{\partial}{\partial t} = j\hat{\vec{p}} - \hat{H} & (12.8.7b) \end{cases}$$

将式(12.1.12)代入式(12.8.3a)有关系式

$$\begin{bmatrix} & j\hat{\vec{p}} \\ j\hat{\vec{p}} & \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} & -jm_0 \\ jm_0 & \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H} & \\ & \hat{H} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \tag{12.8.8}$$

式(12.8.8)的本征方程为

$$\begin{bmatrix} & j\vec{p} \\ j\vec{p} & \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} & -jm_0 \\ jm_0 & \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \\ & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \tag{12.8.9}$$

或

$$\begin{cases} E\xi - j(\vec{p} - m_0)\zeta = 0 \\ j(\vec{p} + m_0)\xi - E\zeta = 0 \end{cases} \tag{12.8.10}$$

由式(12.8.10)得到

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{j(\vec{p} - m_0)}{E}\zeta \\ \xi = \dfrac{E}{j(\vec{p} + m_0)}\zeta \end{cases} \tag{12.8.11}$$

式(12.8.11)中任一式代入式(12.8.2)中，得

$$w(\vec{p})=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{j}(\vec{p}-m_0)}{E}\zeta\\ \zeta\end{pmatrix} \tag{12.8.12}$$

或

$$w(\vec{p})=\begin{pmatrix}\dfrac{E}{\mathrm{j}(\vec{p}+m_0)}\zeta\\ \zeta\end{pmatrix} \tag{12.8.13}$$

式(12.8.12)或(12.8.13)可看做正粒子的态函数。同理，与式(12.8.3b)对应的方程为

$$\begin{cases}E\xi^{+}+\mathrm{j}(\vec{p}-m_0)\zeta^{+}=0\\ \mathrm{j}(\vec{p}+m_0)\xi^{+}+E\zeta^{+}=0\end{cases} \tag{12.8.14}$$

对应的本征态函数为

$$w^{+}(\vec{p})=\left(\frac{-\mathrm{j}(\vec{p}-m_0)}{E}\zeta^{+}\quad \zeta^{+}\right) \tag{12.8.15}$$

或

$$w^{+}(\vec{p})=\left(\frac{E}{-\mathrm{j}(\vec{p}+m_0)}\zeta^{+}\quad \zeta^{+}\right) \tag{12.8.16}$$

式(12.8.15)或(12.8.16)可看做反粒子的态函数，它们与正粒子的态函数式(12.8.12)或(12.8.13)具有相互厄米共轭关系。欲使态函数满足归一化条件，由式(12.8.12)和(12.8.15)，有关系式

$$\left(\frac{-\mathrm{j}(\vec{p}-m_0)}{E}\quad 1\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{j}(\vec{p}-m_0)}{E}\\ 1\end{pmatrix}=\frac{-(\vec{p}-m_0)^2}{E^2}+1=\frac{2\vec{p}m_0}{E^2} \tag{12.8.17}$$

令

$$\zeta=\frac{E}{\sqrt{2\vec{p}m_0}},\quad \zeta^{+}=\frac{E}{\sqrt{2\vec{p}m_0}} \tag{12.8.18}$$

则

$$\zeta^{+}\zeta=\frac{E^2}{2\vec{p}m_0} \tag{12.8.19}$$

由式(12.8.2)，满足态函数的归一化条件

$$\psi^{+}\psi=\left(\frac{-\mathrm{j}(\vec{p}-m_0)}{E}\zeta^{+}\quad \zeta^{+}\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{j}(\vec{p}-m_0)}{E}\zeta\\ \zeta\end{pmatrix}=1 \tag{12.8.20}$$

将式(12.8.18)代入式(12.8.11)，有

$$\xi = \frac{\mathrm{j}(\vec{p} - m_0)}{E}\zeta = \frac{\mathrm{j}(\vec{p} - m_0)}{\sqrt{2\vec{p}m_0}} \tag{12.8.21}$$

同理,对式(12.8.16),有

$$\zeta = \frac{\vec{p} + m_0}{\sqrt{2\vec{p}m_0}}, \quad \zeta^{+} = \frac{\vec{p} + m_0}{\sqrt{2\vec{p}m_0}} \tag{12.8.22}$$

$$\xi = \frac{\mathrm{j}E}{(\vec{p} + m_0)}\zeta = \frac{\mathrm{j}E}{\sqrt{2\vec{p}m_0}} \tag{12.8.23}$$

式(12.8.18)、(12.8.21)、(12.8.22)及(12.8.23)代入式(12.8.2),态函数的表达式为

$$\psi(x,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{j}(\vec{p} - m_0)}{\sqrt{2\vec{p}m_0}} \\ \dfrac{E}{\sqrt{2\vec{p}m_0}} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)/\hbar} \tag{12.8.24}$$

或

$$\psi(x,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{j}E}{\sqrt{2\vec{p}m_0}} \\ \dfrac{\vec{p} + m_0}{\sqrt{2\vec{p}m_0}} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)/\hbar} \tag{12.8.25}$$

第十三章　反粒子和反物质

自然界是否存在反物质仍是悬而未决的问题。反物质披着神秘的面纱，长时间挑动着人们的神经，至今无论从理论上还是从实验上都无法确定它的存在。相对论量子力学中，Dirac 波动方程和 Klein-Gordon 方程均满足相对论中能量动量关系，两者之间有着密切的联系。在 Minkowski 复空间可以用正、反粒子的 Dirac 波动方程推导出 Klein-Gordon 方程，说明 Klein-Gordon 方程所对应的介子是一个复合粒子，应该与正、反 Dirac 粒子耦合有关。Klein-Gordon 方程经典近似时对应 Schrödinger 方程，说明 Schrödinger 方程在四维时空存在对称性的破缺，也具有复合粒子的特性。如果能证明复合粒子的基本方程不能构成反原子(氢原子除外)和反分子，就缺少了反物质存在的理论基础。在理论上能像证明永动机一样证明反物质不存在，无论从科学角度还是从社会角度都是一种进步，毕竟人们已花费太多时间来寻找它。

13.1　电流与电荷的共轭变换

方程(12.2.3)可写作

$$\phi^+\left(\gamma_\mu^+\hbar\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial X_\mu}-\mathrm{j}m_0c\right)=0 \qquad (13.1.1)$$

将方程(12.2.2)左乘 $\mathrm{j}\phi^+$，式(13.1.1)右乘 ϕ，然后两者相加，得

$$\phi^+\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial X_\mu^+}\phi+\left(\frac{\partial}{\partial X_\mu}\phi^+\right)\gamma_\mu^+\phi=0 \qquad (13.1.2)$$

因 $\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial X_\mu^+}=\gamma_\mu^+\frac{\partial}{\partial X_\mu}$，对式(13.1.2)化简，得几率守恒的微分方程

$$\frac{\partial J_\mu^+}{\partial X_\mu}=0 \qquad (13.1.3)$$

或分写成

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \qquad (13.1.4)$$

四维几率流密度可写作

$$J_\mu=c\rho+\mathrm{j}\vec{J}=\phi^+\gamma_\mu\phi \qquad (13.1.5)$$

其中三维几率流密度 $J_i(i=1,2,3)$ 和几率密度 ρ 可分别写作

$$J_i = -\mathrm{j}\phi^+ \gamma_i \phi, \quad c\rho = \phi^+ \gamma_4 \phi = \phi^+ \phi \tag{13.1.6}$$

并有性质

$$J_i^+ = J_i, \quad \rho^+ = \rho \tag{13.1.7}$$

令

$$I_\mu = \mathrm{j}eJ_\mu = \mathrm{j}\vec{I} + I_4 \tag{13.1.8}$$

则

$$\vec{I}^+ = -\vec{I}, \quad I_4^+ = -\mathrm{j}ec\rho = -I_4 \tag{13.1.9}$$

取 e 为电子的电荷，由式(13.1.9)和(13.1.7)可见，$+e$ 的电流 $\vec{I}^+$ 与 $-e$ 的电流 $\vec{I}$ 的方向相反，但几率密度相同。取一个电子在电磁场中矢势

$$\begin{cases} A_\mu = A_4 + \mathrm{j}\vec{A} & (13.1.10a) \\ A_\mu^+ = A_4 - \mathrm{j}\vec{A} & (13.1.10b) \end{cases}$$

将式(13.1.10)代入式(12.2.2)，电子的波动方程可以写为

$$\left[\gamma_\mu\left(\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu^+} - \mathrm{j}eA_\mu\right) + \mathrm{j}m_0 c\right]\phi = 0 \tag{13.1.11}$$

对式(13.1.11)取厄米共轭

$$\left[\gamma_\mu^+\left(\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu} + \mathrm{j}eA_\mu^+\right) - \mathrm{j}m_0 c\right]\phi^+ = 0 \tag{13.1.12}$$

由式(13.1.10)得

$$\gamma_\mu^+ A_\mu^+ = \gamma_\mu A_\mu \tag{13.1.13}$$

则式(13.1.12)可化为

$$\left[-\gamma_\mu\left(\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu^+} + \mathrm{j}eA_\mu\right) + \mathrm{j}m_0 c\right]\phi^+ = 0 \tag{13.1.14}$$

由式(12.5.16)，令 $G = \varepsilon_{\mu\nu}$，取 $\phi^G = \phi^+$，有

$$-\gamma_\mu = \gamma_\mu^G = G\gamma_\mu G \tag{13.1.15}$$

将式(13.1.15)代入式(13.1.14)，得

$$\gamma_\mu^G\left(\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu^+} + \mathrm{j}eA_\mu\right)\phi^G + \mathrm{j}m_0 c\phi^G = 0 \tag{13.1.16}$$

式(13.1.16)和(13.1.12)相同，相当于式(13.1.11)的时间、空间和电荷的联合反演(CPT 反演)。可以认为式(13.1.16)是相对于式(13.1.11)的反粒子所对应的波动方程，正、反粒子之间具有相互厄米共轭的关系，从而可以说明方程(12.2.4)和(12.2.5)为相互厄米共轭的 8 个正、反粒子所对应的波动方程。

13.2 Minkowski 复空间中的正、反粒子

Dirac 方程(13.1.11)和(13.1.12)可分别写作

$$\gamma_\mu \hat{P}_\mu \phi = -\mathrm{j}\hbar\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial X_\mu^+}\phi = m_0 c\phi \tag{13.2.1}$$

$$\gamma_\mu^+ \hat{P}_\mu^+ \phi^+ = \mathrm{j}\hbar\gamma_\mu^+ \frac{\partial}{\partial X_\mu}\phi^+ = m_0 c\phi^+ \tag{13.2.2}$$

取旋量方程的态函数为

$$\phi = \omega e^{\mathrm{j}(\vec{r}\cdot\vec{p}-Et)/\hbar}, \quad \phi^+ = \omega^+ e^{-\mathrm{j}(\vec{r}\cdot\vec{p}-Et)/\hbar} \tag{13.2.3}$$

式(13.2.1)和(13.2.2)的能量和动量分量方程可分别写作

$$\begin{cases} \gamma_0 \hat{E}\phi = \gamma_0 E\phi & (13.2.4a) \\ \gamma_0^+ \hat{E}\phi^+ = \gamma_0^+ E\phi^+ & (13.2.4b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_i \hat{p}_i \phi = \gamma_i p\phi & (13.2.5a) \\ \gamma_i^+ \hat{p}_i \phi^+ = \gamma_i^+ p_i \phi^+ & (13.2.5b) \end{cases} \quad (i = 1,2,3)$$

其中,式(13.2.4a)和(13.2.5a)分别看做正粒子的能量本征方程和动量本征方程;式(13.2.4b)和(13.2.5b)为反粒子的能量本征方程和动量本征方程。对式(13.2.1)和(13.2.2)取内积满足式(4.5.20)动量空间间隔不变量

$$P_\mu'^+ P_\mu' = P_\mu^+ P_\mu = m_0^2 c^2$$

式(4.5.20)中 m_0^2 为四维动量空间坐标变换不变量,它也为 Dirac 方程(13.2.1)和(13.2.2)的静止质量。式(4.5.20)是 Dirac 正、反粒子相互耦合的结果,具有复合粒子的性质,对应着能量动量关系式(4.5.21)。所以,二次项实数形式的能量动量关系应该由一次项复数形式的正、反粒子共同组成。

带有电荷的 Dirac 方程(13.1.11)和(13.1.12)可分别写作

$$\gamma_\mu (\hat{P}_\mu + eA_\mu)\phi = m_0 c\phi \tag{13.2.6}$$

$$\gamma_\mu^+ (\hat{P}_\mu^+ + eA_\mu^+)\phi^+ = m_0 c\phi^+ \tag{13.2.7}$$

矢势 A_μ 是一个重要物理量,在粒子与场的相互作用中 A_μ 扮演了重要角色,参与了粒子和场的弱、电以及强相互作用。上一节中分析正、反粒子之间相互厄米共轭并满足 CPT 反演关系,即正、反粒子的厄米共轭相当于时间、空间以及电荷反演,或($t \to -t, \vec{r} \to -\vec{r}, e \to -e$),由式(13.2.6)也相当于动量、能量以及电荷反演。将四维动量空间 P_μ 扩展为 $P_\mu + eA_\mu$,在 Minkowski 四维动量空间和四维矢势空间可以定性找到带电粒子时空对应点。如在四维双曲动量空间的第一象限 C_1 区中取四元复数或时空点 $H\left(\mathrm{j}\vec{p}, \mathrm{j}e\vec{A}; \frac{E}{c}, eA_4\right)$,则它的时间、空间以及电荷的反演点 $-H\left(-\mathrm{j}\vec{p}, -\mathrm{j}e\vec{A}; -\frac{E}{c}, -eA_4\right)$ 应位于第三象限的 C_5 区中,如图 13.1,相互负元的类时区(C_1 和 $-C_1 = C_5$)中取时空点 $P_\mu + eA_\mu$ 和 $-(P_\mu + eA_\mu)$。

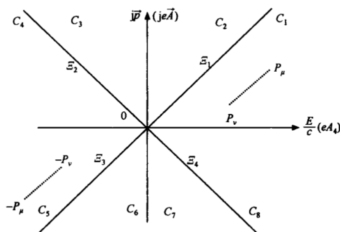


图 13.1　正、反粒子在四维动量空间时空对应点

Minkowski 复空间中第一象限(如 C_1 区)中的复数与第三象限(如 C_5 区)中复数的直和可看做同一象限(如 C_1 区)中两个复数的减法。在 Minkowski 复空间，双曲复数的减法 $X_n - X_m = X_l$，为复数的实部和虚部分别相减再取和，但 X_l 根据不同的情况，可分别属于类时区、类光区及类空区，这是 Minkowski 复空间所独有的特性。Minkowski 复空间具有时空方向异性的特点，使该空间的类时区域或类空区域 $\dot{C}$ 与类光区域 Ξ 的零因子取得了形式上的关联，当 $X_l \in \Xi$ 时，$X_n - X_m$ 平行或垂直类光区。如果将 X_n 看做正粒子的时空对应点，$-X_m$ 看做反粒子的时空对应点，则正、反粒子的耦合，形成的光量子或中微子对应于类光区 Ξ 中。

Stephen Hawking 曾引进虚时间概念，并强调它与虚单位的性质有关。在图 13.1 中，时间和能量均是正定的，而空间和动量与虚单位相联系。Hawking 将虚时间应用于 Feynman 对历史求和，而我们对于双曲复空间的几何性质应用于亚核粒子所特有的时空对称性和遍历理论。在与双曲复空间相对应的 Minkowski 复几何中，粒子和反粒子相互厄米共轭，这为确定反粒子对应的时空点找到了一个突破口。在四维 Minkowski 复空间，如果设定一个正粒子的时空点位于类时区的光锥内，则它的反粒子所对应的时空点就应位于厄米共轭的光锥内，动量空间也是如此，亦即它们的时空点位于类时区相互厄米共轭的时空坐标和动量坐标中。

13.3　Klein-Gordon 方程的复合性质

四维算符满足关系

$$\hat{P}_\mu = -\mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial X_\mu^+}, \quad \hat{P}_\mu^+ = \mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial X_\mu} \tag{13.3.1}$$

在双曲 Minkowski 空间中，相对论中能量动量方程为四维矢量的内积形式：

$$P_\mu^+ P_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2 \tag{13.3.2}$$

式(13.3.2)的算符表示为

$$\hat{P}_\mu^+ \hat{P}_\mu = \left(\frac{\hat{E}^+}{c} - \mathrm{j}\hat{p}^+\right)\left(\frac{\hat{E}}{c} + \mathrm{j}\hat{p}\right) = \hbar^2 \nabla^2 - \frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = m_0^2 c^2 \tag{13.3.3}$$

将式(13.3.3)作用于态函数 $\psi(\vec{r},t)$，满足

$$\hat{P}_\mu^+ \hat{P}_\mu \psi = m_0^2 c^2 \psi \tag{13.3.4}$$

或

$$\left(\hbar^2 c^2 \nabla^2 - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m_0^2 c^4\right)\psi = 0 \tag{13.3.5}$$

式(13.3.5)也可写成

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \nabla^2 \psi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\psi = 0 \tag{13.3.6}$$

式(13.3.6)为 Klein-Gordon 方程，也可以从 Dirac 波动方程(12.2.2)和(12.2.3)取内积而得到。

Klein-Gordon 方程(13.3.6)是 Dirac 正粒子波动方程(12.2.2)和反粒子波动方程(12.2.3)的复合方程。自然界中 Klein-Gordon 方程对应介子，它可能由一个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的正粒子和自旋为 $-\frac{1}{2}$ 的反粒子复合而成的。2010 年欧洲粒子物理研究所捕获的反氢原子与氢原子湮灭可以形成 π 介子，是对 Klein-Gordon 粒子为复合粒子的一个实验验证。取 $\psi = \phi^+ \phi$ 为 Klein-Gordon 方程的态函数，由于 Dirac 旋量态函数 ϕ 为四分量的矩阵形式，其内积 $\phi^+ \phi$ 为一个分量的实数形式，所以 Klein-Gordon 方程为自旋为零的实数方程。

将 $\psi^+ \times (13.3.5) - \psi \times (13.3.5)^+$，有

$$\hbar^2 c^2 \nabla(\psi^+ \nabla\psi - \psi \nabla\psi^+) = \hbar^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^+ \frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi \frac{\partial}{\partial t}\psi^+\right) \tag{13.3.7}$$

取几率密度和几率流密度为

$$\begin{cases} \vec{J} = -\mathrm{j}\hbar(\psi^+ \nabla\psi - \psi \nabla\psi^+) \\ \rho = \dfrac{\mathrm{j}\hbar}{c^2}\left(\psi^+ \dfrac{\partial}{\partial t}\psi - \psi \dfrac{\partial}{\partial t}\psi^+\right) \end{cases} \tag{13.3.8}$$

式(13.3.8)的几率密度和几率流密度均满足守恒关系式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \tag{13.3.9}$$

Klein-Gordon 方程所对应的 π 介子自旋为零，式(13.3.9)中的几率密度可正，可负，也可以为零。这是正、反粒子耦合复合粒子所产生的必然结果。

在非相对论极限情况下，有关系 $\frac{v}{c} << 1, m_0 = m$，由式(11.1.2)，粒子的能量满足

$$E = m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0} \tag{13.3.10}$$

式(13.3.10)中，第一项为粒子的静能，第二项为动能。注意到式(11.2.7)，将式(13.3.10)写成算符形式：

$$\hat{E} = m_0 c^2 + \frac{\hat{\vec{p}}^+ \hat{\vec{p}}}{2m_0} \tag{13.3.11}$$

或

$$-\mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial t} = m_0 c^2 - \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \tag{13.3.12}$$

由式(11.2.8)取态函数

$$\begin{cases} \psi(\vec{r},t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} = \varphi(\vec{r},t)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}}{\hbar}m_0 c^2 t} \\ \varphi(\vec{r},t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_k t)} \end{cases}$$

则能量算符 $\hat{E} = -\mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ 作用态函数(11.2.8)的第一式，微分后，有

$$\hat{E}\psi = -\mathrm{j}\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\mathrm{j}\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} + m_0 c^2 \varphi\right)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}}{\hbar}m_0 c^2 t} \tag{13.3.13}$$

将式(13.3.12)作用式(11.2.8)的态函数第一式并与式(13.3.13)联立，有

$$-\mathrm{j}\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\mathrm{j}\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} + m_0 c^2 \varphi\right)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}}{\hbar}m_0 c^2 t} = \left(m_0 c^2 \varphi - \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \varphi\right)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}}{\hbar}m_0 c^2 t} \tag{13.3.14}$$

式(13.3.14)可分解为静能和动能对应的两个方程，其中动能的方程为

$$-\mathrm{j}\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \varphi \tag{13.3.15}$$

式(13.3.15)与(11.2.11)相同，是 Minkowski 空间中自由粒子的 Schrödinger 方程。

考虑带电粒子在电磁势 $A_\mu(\mathrm{j}\vec{A}, A_4)$ 中运动，作替换

$$\hat{\vec{p}} \to \hat{\vec{p}} + e\vec{A}, \quad \mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \to \mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial t} + eA_4 \tag{13.3.16}$$

则

$$\hat{P}_\mu = \left(\frac{\hat{E}}{c} + eA_4\right) + \mathrm{j}(\hat{\vec{p}} + e\vec{A}), \quad \hat{P}_\mu^+ = \left(\frac{\hat{E}^+}{c} + eA_4\right) - \mathrm{j}\hbar\left(\hat{\vec{p}}^+ + \frac{e}{c}\vec{A}\right) \tag{13.3.17}$$

由式(13.3.4)，可写为

$$\left[\left(\frac{\hat{E}^+}{c}+eA_4\right)-\mathrm{j}(\hat{\vec{p}}^++e\vec{A})\right]\left[\left(\frac{\hat{E}}{c}+eA_4\right)+\mathrm{j}(\hat{\vec{p}}+e\vec{A})\right]\psi-m_0^2c^2\psi=0 \tag{13.3.18}$$

由式(24.4.14)，四维算符可写成

$$\square^+\square=-\frac{\partial}{\partial X_\mu^+}\frac{\partial}{\partial X_\mu}=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2-(\nabla)^2 \tag{13.3.19}$$

在电磁场中的 Klein-Gordon 方程为

$$\left(\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu}+eA_\mu^+\right)\left(-\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu^+}+eA_\mu\right)\psi-m_0^2c^2\psi=0 \tag{13.3.20}$$

13.4　再论正、反粒子态函数的几何诠释

第八章分析了 Minkowski 复空间由于方向奇异性使微观粒子的几率态函数隐含了时空间隔不变量和动量能量不变量，本质上表现了实物粒子与光量子的一种耦合关系。Minkowski 复空间对应正、反粒子的 Dirac 波动方程具有相互厄米共轭关系，这意味着方程中态函数的复共轭关系以及态函数的几率诠释应与正粒子和反粒子的性质有关。本章第二节在 Minkowski 四维动量空间给出了正、反粒子的时空对应点，这应打破传统观念对粒子态函数给出一种全新的几何解释。

在 Minkowski 复空间中，对相互负半线性空间的连通区域（如 C_1 和 C_5）进行定向格式化，如图 13.2。如 C_1 中每一个相格看做一个非质点的正粒子，则 C_5 中的每一个相格就对应一个非质点的反粒子。相互负半线性空间的连通区域（如 C_1 和 C_5）中，相格的直和可看做在同一连通区域（如 C_1）中两个相格的减法。第三章中分析了四维 Minkowski 位型空间中时间是正定的，虚空间分量可正可负。现在可

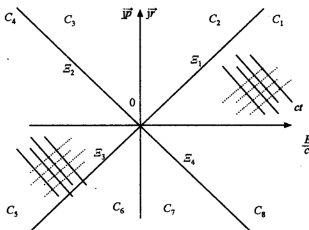


图 13.2　Minkowski 动量空间的定向格式化

以说，在四维 Minkowski 动量空间中，正、反粒子对应的能量是正定的，运动的动量是相反的，这也得到了实验的验证。

在四维双曲动量空间 $H(p_0, \mathrm{j}\vec{p}) = H\left(\frac{E}{c}, \mathrm{j}\vec{p}\right)$ 中，由式(7.1.3)取四维动量间隔

$$\Delta P = \left(\mathrm{j}\Delta p + \frac{\Delta E}{c}\right) = d'\vartheta_0 \in \Xi \tag{13.4.1}$$

在 $\Delta P = P_\mu - P_\nu$ 中，令 P_μ 为正粒子的四维动量，$-P_\nu$ 为反粒子的四维动量，$d'\vartheta_0$ 为光量子或中微子的动量。同理，在四维双曲坐标空间 $H(ct, \mathrm{j}\vec{r})$ 中，四维时空间隔

$$\Delta X = X_\mu - X_\nu = (\Delta ct + \mathrm{j}\Delta\vec{r}) = d\theta_0 \in \Xi \tag{13.4.2}$$

对式(13.4.1)及(13.4.2)取内积，

$$\Delta X^* \Delta P = (c\Delta t - \mathrm{j}\Delta\vec{r})\left(\frac{\Delta E}{c} + \mathrm{j}\Delta\vec{p}\right) = (\Delta t\Delta E - \Delta\vec{r}\Delta\vec{p}) + \mathrm{j}\left(c\Delta t\Delta\vec{p} - \Delta\vec{r}\frac{\Delta E}{c}\right) = 0 \tag{13.4.3}$$

由式(7.5.1)和(7.5.4)，改写成

$$\Delta E = E_n - E_m = lh\nu = l\hbar\tilde{\omega}, \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{13.4.4}$$

$$\Delta p_x = p_{xn} - p_{xm} = \frac{lh}{\lambda} = l\frac{h\nu}{c} = l\frac{\hbar\tilde{\omega}}{c}, \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{13.4.5}$$

式(13.4.3)可写成指数形式

$$\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}}{\hbar}\Delta X^* \Delta P} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}}{\hbar}\Delta P^* \Delta X} = C\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}}{\hbar}(\Delta r\Delta p - \Delta t\Delta E)} = C\mathrm{e}^{\mathrm{j}(x_m p_m - t_m E_m)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(x'_m p'_m - t'_m E'_m)} = 1 \tag{13.4.6}$$

或

$$\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}}{\hbar}\Delta X^* \Delta P} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}}{\hbar}\Delta P^* \Delta X} = C\mathrm{e}^{\mathrm{j}(k_n x_n - \tilde{\omega}_n t_n)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_m x_m - \tilde{\omega}_m t_m)} = 1 \tag{13.4.7}$$

其中，$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 为波数，$\tilde{\omega}$ 为圆频率。令粒子态函数

$$\begin{aligned} \phi_n &= c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}(k_n x_n - \tilde{\omega}_n t_n)} \\ \phi_m^+ &= c_m \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_m x_m - \tilde{\omega}_m t_m)} \end{aligned} \tag{13.4.8}$$

相位因子 $C = c_m^+ c_n$，将式(13.4.8)代入式(13.4.7)，利用 δ 函数的公式

$$f(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0)\mathrm{d}x \tag{13.4.9}$$

取 $n = m$，有归一化的态函数几率诠释

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_m^+(x)\phi(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{13.4.10}$$

对于式(13.4.10)，我们可以给出与经典量子力学完全不同的解释。如果将

ϕ_m 看做正粒子的态函数，则 ϕ_m^+ 为反粒子态函数。这与上文导出正、反粒子的 Dirac 方程满足相互厄米共轭关系是吻合的。不仅如此，式(13.4.9)还包含着许多数学、物理及哲学方面的内容和信息，这意味着它们相应的态函数应具有一种新的诠释，除在第八章对态函数的解释之外，作如下几点补充：

(1) 态函数的几率诠释与 Minkowski 复空间的方向奇异性有关，而这种方向奇异性可以对亚核粒子，包括正粒子、反粒子及光量子在 Minkowski 复空间中给出一种几何联系，而式(13.4.10)正是它们通过时空量子化和非质点相格取得几何关联的数学表达式。

(2) 态函数 ϕ 和 ϕ^+ 应赋予一种相应的物理含义。如果用 ϕ 表示正粒子的态函数，则 ϕ^+ 就应为反粒子的态函数，两者具有相互厄米共轭关系。由于态函数 ϕ 和 ϕ^+ 相互复共轭，说明这两种亚核粒子与复数的性质有关，与四维 Minkowski 复空间的几何性质有关。

(3) 态函数的几率诠释 $\phi^+\phi$ 可以说是发现粒子的几率。由式(13.1.6)，几率密度写作 $c\rho=\phi^+\gamma_4\phi=\phi^+\phi$，$\rho$ 可以是正粒子或反粒子，也可能是复合粒子。就是说，态函数的几率诠释 $\phi^+\phi$ 由正粒子和反粒子共同决定，由四维时空的对称性决定，这对于高速运动粒子和低速运动粒子都是适用的。

(4) 高速运动的粒子，满足质能转换关系，质量或粒子数并不守恒。有静质量的 Dirac 正、反粒子可能相互湮灭产生光量子，也可能吸收光量子转变为其他粒子，其实这正是几率态函数归一化条件的实质所在。由式(13.4.3)和(13.4.7)，因为 $\phi_n^+\phi_m=1$ 是由方程 $\Delta X_\mu^+\Delta P_\mu=0$ 的指数化而导出，它反映了 Minkowski 空间的方向奇异性，亦即有静质量粒子通过电磁质量或质量间隙的得失并与光量子或中微子耦合发生了质量和能量的相互转变。

(5) Klein-Gordon 方程的态函数 $\psi=\phi^+\phi$，说明介子可能是一个复合粒子，具有正、反 Dirac 粒子的复合性质。经典近似时，$c\rho=\phi^+\phi$ 为低速微观粒子，满足 Schrödinger 方程，这时，时空对称性要发生简并和破缺。我们认为，满足 Schrödinger 方程的低速微观粒子，其态函数的几率诠释 $\phi^+\phi$ 所表述的微观客体应包含简并后具有正、反粒子耦合性质的物理诠释。它们均与 Minkowski 空间的复数性质相关联。

13.5　Dirac 负能“海”的探讨

Dirac 为避免“负能态电子”所引致的困难，在 1930 年给出负电子海的模型。Dirac 认为反粒子应存在于真空的背景之中，即所有的负能态皆为反电子按 Pauli 原理所填满，构成所谓的真空。这样的粒子通常是观察不到的，唯当填满的“海”中有一个电子被激起至正能态时，则“海”中的一个“洞”，代表一个有正电荷的粒子；

这个正电荷的“洞”和被激起至正能态的负电荷即通常电子，构成一对正、反粒子。Dirac 负能“海”的解释将有静质量的正、反粒子通过真空的 Fermi 子“海”与光量子取得了联系。但问题是，Dirac 虽然通过真空背景描述了正、反粒子，却没有给出有静止质量粒子所对应的几何空间，更不能通过几何性质描述它们的运动行为。

量子场论采用 Majovana 表象，正、反粒子的态函数相互分离，旋量方程具有厄米共轭关系，回避了 Dirac 的负能“海”。但也出现了一些尚未解决的问题，如无法确定正、反粒子对应区域和几何点，Dirac 方程的协变性包括时空性质本身也存在许多疑点。在本书第一、二、四以及十二章分别讨论了椭圆复数或四元数所对应的复空间和时空变换问题，由于椭圆复空间为 Euclidean 复空间，不存在与光量子或场相联系的类光区，所以在量子场论中回避 Dirac 负能“海”的问题就可以理解了。尽管在量子场论讨论粒子与真空的关联以及真空的自发破缺和真空不空问题，但并没有真正地将真空与 Minkowski 空间的类光区联系起来，更没有通过类时区与类光区的几何关联推导粒子和场的耦合问题。椭圆复空间的四维坐标变换不是 Lorentz 变换，也不可能通过相互厄米共轭的 Dirac 旋量方程来满足 Lorentz 变换的协变性条件。由于正、反粒子的耦合涉及时空间两点的几何联系，找不出正、反粒子的时空对应点就不能讨论时空的度量、距离和间隔不变量，也不能讨论正、反粒子产生和湮灭时与 Maxwell 场的几何联系。

Dirac 负能“海”虽然存在一些无法克服的矛盾，但也传达了一些信息。正、反粒子的耦合产生光量子或电磁场应该与真空的背景有关。如果有静止质量的实物粒子如电子以亚光速运动，它们应该与 Minkowski 复空间的类时区相对应，而产生的光量子应该与类光区相联系。找出类时区与类光区的几何联系就可能为微观理论的数学基础打开一个突破口。Hawking 的关注点也在这里，他想对弯曲时空的奇点进行度量和时空量子化，从而解决相对论与量子力学的数学关联，实质上也是要在奇异区解决实物粒子与场的耦合问题。

解决正、反粒子的几何对应，首先突破的障碍是时间反演和负能问题。Dirac 强调的“负能海”，关键在 “负能”。Hawking 为解决时间反演提出“虚时间”概念，也是想通过引进虚单位进行虚数化处理来消除“时间反演”和“负能”的疑惑。其实，时间反演和负能不单纯是一个物理问题，而应是时空对称性和时空理论问题，也是一个数学问题。第三章分析了 Minkowski 复空间的时间箭头是单向的，是正定的，时间反演实际上应为时空区域的复共轭变换，在四维能量动量空间也有类同的解释。正、反粒子分别位于相互负元的类时区域，它们的运动方程相互厄米共轭。四维能量动量空间中能量是正定的，所谓的能量反演实际上应为复共轭和转置的联合变换。从数学角度，正能区本身是不能定义减法的，当相互负元的时空区取直和运算时，等同于同一类时区的减法运算，负元区所对应的“负能”，在正能区通过减法运算转换为粒子跃迁时所对应的能量差值或能量增量。但是正能区特定

方向的减法联系着类光区，联系着真空和场，能量差值或能量增量对应着光量子或中微子的质量间隙，这也可能是 Dirac“负能海”所具有的几何意义。

在 Minkowski 复空间，我们可以对 Dirac 负能“海”给出一个几何解释。在 10.5 节中分析了在类时区域利用光粒子拓扑及定向相格可以描述有静质量粒子与光量子的几何联系，进一步可以表示正、反粒子的产生和湮灭以及与类光粒子的耦合关系。正、反粒子之间的耦合并不一定全部湮灭为类光粒子，电磁质量或质量间隙可以通过粒子的产生与湮灭转变为光或能量，但“机械质量”却可能保留下来并转变成其他粒子，形成所谓的粒子动物园。即真空背景是电磁质量或质量间隙与能量相互转变的平台，而正、反粒子可以在这个真空平台进行质量和能量的转变与传递，并通过 Minkowski 复空间类时区与类光区的特定方位的几何关联来描述。所强调的是，在四维能量动量空间，正、反粒子的能量均为正定的，但它们运动的动量方向相反。

传统 Dirac 旋量方程中同一个态函数混合于正、反粒子的方程之中，所以不能确定正、反粒子的时空对应点。特别是如何通过几何性质描述反粒子的运动行为到目前还无定论。有的文献认为，反粒子应位于正粒子的超光速区，但这种说法很难具有说服力。我们希望利用 Minkowski 复空间能界定出较有说服力乃至合乎逻辑的正、反粒子的时空对应点。需要强调的是，不论用何种几何空间描述正、反粒子，都应具有几个关键要素：(1)正、反粒子具有 TPQ 反演对称性，其中 TP 反演对称性应通过时空的几何性质表示出来；(2)正、反粒子的产生和湮灭与类光粒子有关，所以不仅正、反粒子具有时空对应点，类光粒子也应有时空对应区域；(3)正、反粒子与类光粒子的耦合关系应该通过 Dirac 旋量方程和 Maxwell 电磁场方程的时空性质描述出来，这涉及 Dirac 旋量方程与 Maxwell 电磁场方程的几何关联问题，在第十六章和第十七章继续讨论这个问题。

至此，在 Minkowski 复空间对正、反粒子的时空对称性有了大概了解，但还有一个不可忽略的事实，即经典近似时正、反粒子所对应的时空区域和内禀性质的转变问题。低速运动的有静质量粒子本身的运动行为可在 Cartestan 坐标中表述，但粒子通过能级跃迁而与光量子的耦合是有相对论效应的。经典近似时，Minkowski 复空间的对称性质出现破缺，量子态要发生简并，正、反粒子的时空性质和运动形态也要发生改变，但正、反粒子表现的厄米共轭关系可通过低速复合粒子保留下来。低速复合粒子可以发生电磁质量的改变，但不会发生粒子的产生和湮灭，它们可能通过粒子的能级跃迁表现为类时区与类光区的几何关联。经典近似使正、反粒子内禀性质的转变可能会通过时空破缺而表现出复合粒子的“个性”差异。

13.6 椭圆复数和正、反粒子

传统 Dirac 方程将正、反粒子的态函数耦合在一起，无法将正、反粒子相分离就不可能找到时空对应点。利用第十二章双曲型 Dirac 方程引入的 t'Hooft 矩阵，取椭圆算符形式为 $\hat{p}=-\mathrm{i}\hbar\nabla,\hat{E}=\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$ 四维动量和四维位矢分别为

$$P_\mu=P_\mu\left(\mathrm{i}\vec{p},\frac{E}{c}\right),\quad A_\mu=A_\mu(\mathrm{i}\vec{A},A_4) \tag{13.6.1}$$

满足关系

$$\gamma_\mu A_\mu=\gamma_\mu^+A_\mu^+ \tag{13.6.2}$$

$$\begin{cases}\gamma_\mu^+\hat{P}_\mu^+=-\gamma_\mu\hat{P}_\mu\\ \gamma_\mu\dfrac{\partial}{\partial X_\mu^+}=\gamma_\mu^+\dfrac{\partial}{\partial X_\mu}\end{cases} \tag{13.6.3}$$

与双曲四元数不同，在 Minkowski 复空间式(13.6.1)不能写成线性多项式形式，也不能按线性多项式的运算规则进行四则运算，因为只有在四维 Euclidean 复空间中椭圆四元数的四则运算才能满足线性多项式中各分量的混合运算。添加 t'Hooft 矩阵后的椭圆四元数虽然可以写成线性多项式形式，但式(13.6.3)为矩阵形式应该满足矩阵的运算规则。

带有电荷的 Dirac 波动方程可以写为

$$\gamma_\mu(\hat{P}_\mu+eA_\mu)\phi-m_0c\phi=0 \tag{13.6.4}$$

或

$$\gamma_\mu\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu^+}+eA_\mu\right)\phi-m_0c\phi=0 \tag{13.6.5}$$

对式(13.6.4)或(13.6.5)取厄米共轭，有

$$\gamma_\mu^+(\hat{P}_\mu^++eA_\mu^+)\phi^+-m_0c\phi^+=0 \tag{13.6.6}$$

$$\gamma_\mu^+\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu}-eA_\mu^+\right)\phi^++m_0c\phi^+=0 \tag{13.6.7}$$

由式(13.6.2)和(13.6.3)，有

$$-\gamma_\mu\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu^+}-eA_\mu\right)\phi^+-m_0c\phi^+=0 \tag{13.6.8}$$

取 $\gamma_\mu^G=-\gamma_\mu,\phi^G=\phi^+$，式(13.6.8)可以写为

$$\gamma_\mu^G\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu^+}-eA_\mu\right)\phi^G-m_0c\phi^G=0 \tag{13.6.9}$$

式(13.6.9)相当于式(13.6.5)的 CTP 反演，如果将式(13.6.5)看做正粒子的 Dirac旋量方程，式(13.6.9)应该看做反粒子的 Dirac 旋量方程，它们相互之间满足

厄米共轭关系。

图 13.1 中四元数的虚单位 j 换成 i，则在椭圆型 Minkowski 动量空间中取正粒子位于类时区 C_1，反粒子位于类时区 C_5，它们相互处于负元区也是复共轭转置区，所以在 Minkowski 动量空间引入椭圆复数也可以找到正、反粒子的时空对应点。由 Minkowski 动量空间的方向奇异性，作类光区的平行线和垂直线，线上两点之差位于类光区。将式(13.6.6)和(13.6.9)相减，可以表示正、反粒子耦合产生的光量子或电磁场位于类光区 Ξ 中。

椭圆虚单位 i 的本体空间是 Euclidean 复空间，按椭圆复数性质定义的四则运算规则与 Euclidean 复空间的几何性质是吻合的。在 Minkowski 复空间利用椭圆复数的四则运算可能会出现一些差异或矛盾。这时椭圆复函数的变换关系和粒子运动微分方程在 Minkowski 复空间就不能盲目强调几何性质和几何对应，而只能看做一种数学工具和数学方法。第十二章中椭圆型四维坐标变换普遍形式式(12.7.2)就不是 Lorentz 变换，四维动量空间的间隔不变量也不是相对论中的动量能量关系。将椭圆型 Dirac 方程作内积并不能推导出 Klein-Gordon 方程，所以介子不能确定是复合粒子，Schrödinger 粒子也是如此。但是式(12.7.8)可看做椭圆型 Lorentz 变换的普遍形式，时空间隔不变量和 Klein-Gordon 方程均可由矩阵与矩阵转置的乘积导出，这也是 Hilbert 相空间不能与 Minkowski 空间的内积运算相吻合的原因。

13.7 论反物质

1. *反物质的传统观念*

上文讨论的粒子与反粒子都是亚核粒子，即电子、反电子，质子、反质子以及中子、反中子等亚核粒子可以构成相应的原子和分子。按常识一般认为正粒子可以构成物质，反粒子可能构成的是反物质。科学家们已经由实验验证了几种反粒子的存在，每种反粒子和它相应的粒子有相同的质量，但是电荷相反，由此推测反物质是物质的镜像。但反粒子是否能构成反物质呢？通常自然界中没有发现过反物质。按照质子、中子和电子等亚核粒子与其反粒子的特点，人们想象很远的地方有一个和我们现在的世界很像的反物质世界，或者说是我们的世界在镜子里的像，它将是一个由反恒星、反房子、反食物等所有的反物质构成的反世界。但对于反物质，目前只停留在猜想阶段，无论从理论上还是实践上都没给出确切的答案。我们先按照历史发展的脉络简述一下反物质的认识过程，之后结合本书推导的结论对反物质存在的可能性作一些探讨。

1928 年，英国物理学家 Dirac 修改了 Einstein 著名的质能方程 $E = mc^2$。考虑

“m”——质量,除了正的属性外还有负属性,给出的 Dirac 的方程允许宇宙中存在反粒子,并给出负能量海的假设。1930 年 25 岁的 Carl Anderson 发现了第一个反粒子——正电子。1932 年 Patrick Blackett 和 Giuseppe Occhialini 首次看到了同时产生电子和正电子对。20 世纪 40 年代 Bichard Feynman 利用 Feynman 图表示电子和正电子的产生和湮灭。正电子看起来就像是时间箭头反过来的电子,Feynman 的时间箭头避开了 Dirac 的负能海,为正电子从理论上提供了一种全新的令人信服的解释。

20 世纪 50 年代,Murray Gell Mann 扮演了 Mendeleev 在基础化学中的角色,发明了超核——不稳定的亚核粒子,称谓奇异数。引入了夸克和反夸克,表明质子和中子由更小的夸克构成,即在质子的内部深处,反粒子总是存在的。1953 年,杨振宁和李政道提出宇称不守恒原理,即粒子和反粒子的镜像可能有缺陷。这时,科学家把普通镜子换成了另一种扩展了的镜子,这种镜子同时完成三种反射(CPT 反射),亚核世界经这种反物质镜子反射后由电子反演成正电子。1955 年,高能质子同步加速器的能量达到了反质子的阈值,Own Chamberlain 等四位科学家发现第一个反质子。1965 年 Antonino Zichichi 合成第一个反核,称为重核(由一个反质子和一个反中子组成)。反核可以像原子核一样牢固地结合起来。

从理论到实验反粒子存在是肯定的,但自然界是否存在过反物质呢?1992 年 7 月,大约有 80 位专家会聚慕尼黑的路德维希·马克西米利安大学讨论如何产生化学反物质的原子,会议开始认真考虑如何合成反氢。1995 年 9 至 10 月欧洲核子研究中心的科学家制成了第一批反氢原子,科学家利用反质子加速器将速度极高的反质子流射向氙原子核以制造反氢原子。由于反质子与氙原子核相撞后会产生正电子,刚诞生的正电子如果恰好与反质子流中另外一个反质子结合将会形成一个反氢原子。在累计 15 个小时实验中他们共记录到 9 个反氢原子存在的证据。由于反氢原子处在正物质包围之中,它们寿命极短,平均一亿分之三秒(30 ns)。1996 年位于美国 Fermi 国立加速器实验室成功制造了 7 个反氢原子,使反物质研究前进了一大步。

反氢原子的制取成功,使人类对反物质的认识从微观的反亚原子粒子提高到反原子的层次。当反氢原子和氢原子相遇时,这些等价但是相反的粒子碰撞产生爆炸,放射出纯的射线,这些射线以光速穿过爆炸点。这些产生爆炸的粒子被完全消灭,只留下其他亚原子粒子。粒子和反粒子相遇所产生的爆炸把两种粒子的质量转换成能量。科学家们相信这种方法产生的能量比任何其他推进方法产生的能量强得多。一些科学家对宇宙中的一个生动的反物质世界已开始憧憬。其实,在反粒子提出的早期人们就开始设想着反物质世界。Dirac 在获取 Nobel 奖的讲演中,最后讲到反物质构成的星球时说:“这些星球可能主要是由正电子和负质子构成的。事实上,有可能是每种星球各占一半,这两种星球的光谱完全相同,以至于

目前的天文学方法无法区分它们。”

人们推测，大爆炸产生的宇宙，创始之初会产生近乎等量的物质与反物质，两者相遇必定湮灭成光。但在我们生活四周，只见物质的存在，反物质却不见了，这又如何解释呢？20世纪60年代，前苏联物理学家，“导弹之父”Sakharor就反物质问题作了一些解释。他认为，反物质极少的原因是由于物质规律中存在微小的不对称。在大爆炸后最初的瞬间，今天所见到的各种粒子，皆融为一体，并统称为X粒子，这种粒子极重，约为氢原子的几十万亿倍。在宇宙的温度不断下降时，X粒子开始衰变，由于宇宙间的这种微小的不对称，最终变为粒子和反粒子，形成十亿零一对十亿之比，即每十亿对正、反粒子仅留下一个粒子。说明宇宙中物质比反物质多了一小部分(约十亿分之一)，因为开始的时候有更多的正粒子存在，所以现在的粒子是所有留下来的那些粒子，现在的宇宙中可能已经没有留下任何天然的反粒子。这可能是只存在物质而不存在反物质，也不会看到物质和反物质碰撞所产生光的原因。也就是说，我们今天的宇宙就是由这十亿分之一的粒子构成的，所以我们见不到反物质世界。

Sakharor的观点为许多科学家所接受，但也有一些科学家不以为然。丁肇中教授认为，我们不能排除这种可能，在大爆炸时超级火球的某个区域中，可能有利于创生更多的反物质。这样的宇宙演化的结果可能是一个“大拼盘”，这个“拼盘”中，某些空域很可能填充着反物质的星系。任何反物质恒星理应包含反核或反原子、反分子，一旦这种恒星在超新星爆发中死去，它们的反核混合物就被抛入太空，物质和反物质湮灭应突然强有力地喷发出辐射能即γ射线。如果最初的宇宙普遍含有分开的物质星团和反物质星团，那么就会在宇宙背景辐射中留下其痕迹。

为了探索反物质，丁肇中聚集了一百余名科学家，要把探测器放到太空，以消除大气层对研究反物质的干扰。1998年6月，丁肇中小组的α磁谱仪搭载美国“发现号”航天飞机，成功地在太空遨游十几天用以探测原子核和带电粒子组成的宇宙射线束，但实验仍没有取得令人满意的结果。可达到地球表面的宇宙线，甚至是在上层大气中的宇宙线，并未显示出有比反质子更重的反物质的任何迹象，现在观测的γ射线背景并没有迹象表明曾在一个大的尺度上发生过物质——反物质湮灭过程，我们所能看到的宇宙，看起来从来就没有过核反物质，我们对宇宙以及宇宙起源的理解，还需要一番重新思考。

2. 对反粒子的再认识

从20世纪初反粒子概念的提出，至今已有90年的历史，但仍有许多未解之谜。在Minkowski复几何的数学背景下讨论微观客体的运动行为和物理性质，可能为反粒子及反物质的解释带来一些新意。下面从几个方面对反粒子和反物质进行讨论，将它们的性质和特点提升一个认识高度。

（1）对态函数的几率诠释 $\psi^{+}\psi$ 可以说是发现粒子的几率应该包括反粒子，这类问题在传统量子理论中并没有给出合适的答案。13.4 节中讨论了正、反粒子态函数的几率诠释，说明了 ψ^{+} 是反粒子的几率幅，ψ 是正粒子的几率幅。几率密度 $\psi^{+}\psi$ 既包括正粒子也包括反粒子，或是它们相互耦合的复合粒子，这就给出了正、反粒子的等同关系。这种等同和对称关系还表现在正、反粒子的时空点分别位于 Minkowski 复空间相互厄米共轭的亚光速区，而传统量子力学中正、反粒子运动行为是无法通过几何空间的时空点来描述的。

（2）正、反粒子的厄米共轭实质上是 CPT 反演，它们的四维动量形式与四维坐标变换和间隔不变量相对应，说明态函数的几率诠释 $\psi^{+}\psi$ 与相对论的时空间隔和能量动量关系存在着内在的几何关联。这种对称关联刻画了正、反粒子的复数性质，可能将正、反粒子所具有的固有性质和时空性质联系起来，也为物质的构成提供了数学基础。

（3）一般认为正、反粒子间的耦合要发生湮灭，质量和能量之间要发生转变，但问题是这种质能转变的几何形式和数量关系却不得而知。通过第十四章中式(14.5.1)可以看出，正、反粒子之间湮灭的质量应该是电磁质量，而机械质量部分并不会发生质能转变关系。当粒子的速度越大，正、反粒子耦合前后静止质量的差异越大，电磁质量所占的比例也越大，这种质能转变关系的比例就会增加。反之，当粒子的速度很小时，正、反粒子耦合前后静止质量的差异很小，电磁质量所占的比例也很小，正、反粒子之间湮灭的质量所占比例也很小。就是说，不能认为正、反粒子之间产生、湮灭就全部发生了质能转变，它们有一部分静止质量是不参与质能转变的，它们可以转变为其他有静止质量的粒子。

（4）由式(13.4.1)和(14.2.8)，有关系

$$P_{\mu}=P_{\nu}+d'\vartheta_{0} \tag{13.7.1}$$

$$m_{\mu0}=m_{\nu0}+2\delta m_{0} \tag{13.7.2}$$

式(13.7.1)和(13.7.2)可以看做是具有静止质量的正粒子和反粒子耦合吸收或放出光量子的四维动量和静质量表达式，也可以看做粒子吸收或放出光量子后形成另一粒子的四维动量和静质量表达式。其中式(13.7.1)应该包含了能级关系和粒子的波粒二象性。特别是在经典近似时，由于时空对称性的破缺，正、反粒子之间的产生与湮灭可能转化为它们之间的的耦合关系，形成复合粒子或束缚状态。

（5）正、反粒子在经典近似时，可能对应着复合粒子。由上文分析 Schrödinger 方程是 Klein-Gordon 方程经典近似的产物，虽然 ψ^{+} 和 ψ 不再严格对应正、反粒子的态函数，但经典微观客体的概率密度 $\psi^{+}\psi$ 也应包含正、反粒子的禀性。即通过经典近似，Minkowski 复空间的时空性质产生破缺，创造了亚核粒子复合成原子、分子乃至物质的条件。经典粒子的量子跃迁类同于正、反粒子时空点的直和，对应着类时区的减法运算；而吸收或放出的光量子与正、反粒子耦合产生的电磁场类

同,是类时区联系着类光区的几何表现。在经典近似时发现粒子的概率对应着态函数的几率诠释,而态函数的形式类同于正、反粒子态函数的厄米共轭关系,具有经典对应性质的复合粒子可能为物质的组成提供了一个理论基础。

3. 对反物质的质疑

现在又回到反物质的原始话题,可以作一些简单提问:有反物质吗?这个世界存在过反物质吗?人为能造出反物质吗?尽管人们憧憬宇宙中可能会出现一个生动的反物质世界,但我们还是给出一个否定的答案,世界上不存在也没有存在过反物质,人们也不可能创造出反物质。这个答案看起来很主观,但希望能从道理上把它阐述明白。

所谓"反物质",是从化学上定义的物质,它组成的基本粒子是分子。首先,从宇宙的初期按 Sakharor 的解释,在大爆炸后最初的瞬间各种粒子在高温、高压下融为一体,不可能形成稳定的化学物质。当这种极重的粒子衰变,由正、反粒子耦合成类光粒子,剩余的粒子组成物质时,也没有形成反物质的条件。因为此时按 Sakharor 的解释反粒子已消耗殆尽,更没有条件和理论来说明将正、反粒子分开,各自形成物质和反物质世界。从 Dirac 负电子海的模型来说,Dirac 认为正粒子构成的物质世界是由反粒子形成了真空背景,即所有的负能态皆为反电子按 Pauli 原理所填满,构成所谓的真空。那么由对称性,反粒子构成的反物质世界,所对应真空就应由正粒子按 Pauli 原理所填满。我们可以提这样的问题,两个物质世界所对应的真空是不是一个整体,如果是一个整体,如何解释两者的矛盾,如果不是一个整体它们之间的边界是如何化分的?到目前为止,还没有一个有说服力的描述反物质的理论,也没有真正找到一个组成反物质的基本粒子——反分子。尽管科学家制造出了反氢原子,但与反氢分子有本质上的差别,因为反氢原子不能完全满足四维时空对称性,不能称为稳定的化学物质,何况实验发现反氢原子的性质和特点并没有弄清楚。

我们否认反物质的存在,就应该解释反粒子在束缚态和经典近似时的状态和性质。首先,正、反粒子的差异可能与四维时空的对称性有关。所谓的正、反粒子并不是绝对的,它们可以相互转换,正、反粒子在与光量子耦合的过程中对称性要发生改变,正、反粒子的内禀性质也要发生相应改变。在 Minkowski 复空间,由四维时空的对称性引入了 64 类 Dirac 粒子。在大自然中,我们很难发现正、反粒子的湮灭,两类 CPT 反演的粒子相碰的几率很小。其次,具有相对论效应的运动粒子,其静止质量可看做由两部分组成,一部分为电磁质量,另一部分为机械质量。电磁质量与 Minkowski 复空间的类光区有关,与电磁场所对应的光量子有关。经典近似下的束缚粒子,机械质量远远大于电磁质量,但粒子的能级跃迁,发射光量子也应该是电磁质量与能量转变的具体表现。

上文分析正、反 Dirac 粒子可以耦合成 Klein-Gordon 粒子，在经典近似时对应于 Schrödinger 粒子，则 Klein-Gordon 方程和 Schrödinger 方程均为正、反粒子耦合的产物。如果 Klein-Gordon 方程所对应的 π 介子为复合粒子，很有可能经典近似时 Schrödinger 方程所对应的经典粒子也具有复合粒子的性质。由于在粒子形成束缚态或经典近似时，四维时空的对称性产生破缺，正、反粒子的性质也要发生相应改变，如粒子数守恒，正、反粒子不再成对地产生和湮灭。束缚态粒子可通过能级跃迁来吸收或放出光量子，同时消耗掉部分电磁质量。第十一章式(11.6.21)为经典粒子的能量本征值，应该与广域 Hilbert 空间分立相格的能量分量相对应。式(11.6.24)的 Balmer 公式中光谱项 $E_{n'}=-\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n'^2}$ 和 $E_n=-\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$ 分别为分立相格的能量值，应具有粒子的特性。而光谱项的差值 $\hbar\omega = E_{n'}-E_n = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n'^2}\right)$ 与光量子的能量相对应，应具有场的特性。显然式(11.6.24)是 Minkowski 空间在经典近似时类时区与类光区取得几何关联的产物，它类同于式(13.4.1)或(13.7.1)。如果将 $E_{n'}=-\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n'^2}$ 认为带有正粒子特性，$-E_n=\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$ 则带有反粒子特性，它们分别位于类时区相互厄米共轭的分立的能量相格中。

Schrödinger 方程是微观、低速粒子对应的运动方程。微观、低速的亚核粒子是组成原子和分子的基本粒子，如果 Schrödinger 方程具有复合粒子的性质，就排除了构成反物质的反亚核粒子对应着的反 Schrödinger 方程。在经典近似时四维时空对称性要发生破缺，但 Minkowski 空间的方向奇异性得到了保留，电子能级跃迁辐射光量子类同于正、反粒子相互耦合，这种微观特性刻画了类时区与类光区的几何关联。也就是说，在经典近似时正、反粒子不能独立存在，但耦合成的复合粒子保留了正、反粒子的部分性质。我们猜测通过 Minkowski 空间的时空破缺，在内禀性质相异的亚核粒子之间产生了相互作用并形成了束缚态，从而构成原子核或原子，进而组成以分子为基本单元的物质。

物质在经典近似条件下由具有正、反粒子耦合性质的复合粒子组成，否定了由反亚核粒子组成反原子和反分子，也否定了反物质存在，这符合哲学的辩证统一思想。尽管实验观测到"短命"的反质子与反电子耦合体，可命名为"反氢原子"，但它与一个氢原子耦合时，由时空对称性应同化为具有复合性质的介子，而不能产生一个反氢分子。如果能够确定 Schrödinger 方程具有正、反粒子的复合性质，则我们这个宇宙就可能是由物质，而不是反物质构成的。也排除了两个反氢原子耦合成一个反氢分子进而组合反物质的可能性。因为无论从理论上还是实践中都没有反物质存在的理由和空间。我们相信反物质同永动机一样，可以从数学基础和物理定律的角度予以否认，这也是对自然界认识的一大进步。

第十四章 四维动量空间的物质性

四维 Minkowski 动量空间可以描述粒子的质能转换关系。将广域 Hilbert 相空间的非质点相格与正、反粒子联系起来，每一个非质点相格对应着粒子四维质量本征方程或静能本征方程。不同相格之间的几何关联对应着粒子的跃迁，涉及有静质量粒子之间的转换以及与类光粒子的耦合。通过 Minkowski 复空间的方向奇异性引入质量间隙，讨论质量重整化，能对物质的结合能和质量亏损作出相应的几何解释。

14.1 Dirac 正、反粒子的本征方程

式(12.2.2)和(12.2.3)分别对应 Dirac 正、反粒子方程。由式(13.2.1)和(13.2.2)在四维 Minkowski 动量空间相互厄米共轭的类时区取 μ 和 ν 两点，对应四维动量本征方程

$$\begin{cases}\gamma_\mu \hat{P}_\mu \phi = \gamma_\mu P_\mu \phi \\ \gamma_\nu^+ \hat{P}_\nu^+ \phi^+ = \gamma_\nu^+ P_\nu^+ \phi^+\end{cases} \tag{14.1.1}$$

式(14.1.1)也可以写为

$$\begin{cases}c\gamma_\mu \hat{P}_\mu \phi = -\mathrm{j}c\hbar\gamma_\mu \dfrac{\partial}{\partial X_\mu^+}\phi = m_{\mu 0}c^2\phi = E_{\mu 0}\phi \\ c\gamma_\nu^+ \hat{P}_\nu^+ \phi^+ = \mathrm{j}c\hbar\gamma_\nu^+ \dfrac{\partial}{\partial X_\nu}\phi^+ = m_{\nu 0}c^2\phi^+ = E_{\nu 0}\phi^+\end{cases} \tag{14.1.2}$$

其中，$E_0 = m_0 c^2 = L_2$ 为 Dirac 粒子的静能。取算符关系式

$$\begin{cases}\hat{H}_{\mu 0} = -\mathrm{j}c\hbar\gamma_\mu \dfrac{\partial}{\partial X_\mu^+} \\ \hat{H}_{\nu 0}^+ = \mathrm{j}c\hbar\gamma_\nu^+ \dfrac{\partial}{\partial X_\nu}\end{cases} \tag{14.1.3}$$

式(14.1.2)可写为 Dirac 正、反粒子静能本征方程

$$\begin{cases}\hat{H}_{\mu 0}\phi = E_{\mu 0}\phi \\ \hat{H}_{\nu 0}^+\phi^+ = E_{\nu 0}\phi^+\end{cases} \tag{14.1.4}$$

由式(5.2.3)，静能为四维动量空间的守恒量，可看做四维 Hamilton 量或四维 Lagrangian 函数，它也为四维拟距空间的拟距离。$\hat{H}_{\mu 0} = c\gamma_\mu \hat{P}_\mu$，$\hat{H}_{\nu 0}^+ = c\gamma_\nu^+ \hat{P}_\nu^+$ 分别

为正、反粒子的四维 Hamilton 算符。

式(14.1.1)至(14.1.4)的下脚标 μ 和 ν 具有双重含义，一方面可区分不同时空相格 μ 和 ν；另一方面为四元数指标 $\mu,\nu=1,2,3,4$。式(14.1.2)也可写为静止质量本征方程

$$\begin{cases}\hat{m}_{\mu0}\phi = m_{\mu0}\phi \\ \hat{m}_{\nu0}^{+}\phi^{+} = m_{\nu0}\phi^{+}\end{cases} \tag{14.1.5}$$

其中，$\hat{m}_{\mu0}^{+}$ 和 $\hat{m}_{\nu0}$ 分别为正、反粒子的静止质量算符。有关系

$$\begin{cases}\hat{m}_{\mu0} = -\mathrm{j}\,\dfrac{\hbar}{c}\gamma_{\mu}\,\dfrac{\partial}{\partial X_{\mu}^{+}} \\ \hat{m}_{\nu0}^{+} = \mathrm{j}\,\dfrac{\hbar}{c}\gamma_{\nu}^{+}\,\dfrac{\partial}{\partial X_{\nu}}\end{cases} \tag{14.1.6}$$

四维动量方程(14.1.1)和静止质量本征方程(14.1.5)是有区别的。式(14.1.1)中四维动量 P_{μ} 和 P_{ν}^{+} 是四元复数，而式(14.1.5)中静止质量 $m_{\mu0}$ 和 $m_{\nu0}$ 为实数，当它们取内积时均满足能量动量关系式(4.5.5)。由式(4.5.3)，将式(14.1.1)的第一式写成分量形式

$$\begin{cases}\hat{E}\phi = E\phi \\ \hat{p}\phi = p\phi\end{cases} \tag{14.1.7}$$

式(14.1.7)的第一式为能量本征方程，第二式为动量本征方程。

在广域 Hilbert 相空间中每一个分立相格对应一个粒子的量子态，也对应一个粒子的本征态。因此，式(14.1.4)和(14.1.5)既为 Dirac 正、反粒子的运动方程，也对应一个静止能量或静止质量本征方程，并与一个分立相格相对应。

不同分立相格对应不同的静止能量或静止质量本征方程，也对应不同的微观客体。各个微观客体之间可通过质能交换进行相互转换，相应静止能量或静止质量也发生改变。在高速粒子家族中，粒子的数量庞大，形成所谓粒子动物园，它们可能与 Minkowski 动量空间以及广域 Hilbert 相空间的能级多样化有关。

由式(14.1.7)，作为运动粒子的能量和三维动量在四维动量坐标的变换下均是变量，即能量并不是一个守恒量，它随动量变化而改变，因此能量不是系统的四维 Hamilton 量。高速粒子满足四维静能本征方程(14.1.4)，而能量和动量的本征方程(14.1.7)只能作为静能本征方程的能量分量和动量分量。四维动量空间高速粒子的能量不是守恒量，当经典近似时，$v \ll c, m \approx m_0$ 或 $E_k \ll E \approx E_0$，粒子的能量为守恒量，成为系统的 Hamilton 量。

14.2　质量间隙、中微子以及 Higgs 粒子

在四维 Minkowski 动量空间 $H(p_0,\mathrm{j}\vec{p}) = H\left(\frac{E}{c},\mathrm{j}\vec{p}\right)$，取四维动量为四维线性多项式形式

$$P_\mu = p_0 + \mathrm{j}\vec{p} = \frac{E}{c} + \mathrm{j}\vec{p} \tag{14.2.1}$$

由式(14.1.1)，取内积可建立能量动量关系式

$$P_\mu^+ P_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2 \tag{14.2.2}$$

静能是四维动量坐标变换不变量，因此将 H_0、H_0^+ 看做系统的四维 Hamilton 量是合理的。

双曲复空间具有方向奇异性，如图 13.2。当 P_μ、P_ν 为四维双曲动量空间同一类时区不同的分立相格时，过 P_μ 及 P_ν 两相格的直线平行或垂直于类光区 Ξ，参照式(13.4.1)，有

$$P_\mu - P_\nu = P_c = d'\vartheta_0 \in \Xi \tag{14.2.3}$$

其中，P_c 为类光粒子的四维动量。式(14.2.3)说明在四维 Minkowski 动量空间每一个具有静质量的微观粒子在类时区都有时空相格相对应，类时区中两个分立相格在特定方位上的差与类光粒子的分立相格取得了几何联系。式(14.2.3)也可以写为

$$P_\mu = P_\nu \pm P_c = P_\nu \pm d'\vartheta_0 \tag{14.2.4}$$

式(14.2.3)和(14.2.4)具有重要的几何意义和物理意义。四维 Minkowski 动量空间具有奇异性，每一个类时区的时空相格都涉及类光区的奇点问题。类光区是以光速运动的，如光量子或中微子等类光粒子的对应区域，类时区中不同的相格通过与类光区的几何联系可以描述实物粒子与类光粒子的耦合。有静止质量粒子与类光粒子的联系发生了质量和能量的相互转变，使平直的四维 Minkowski 动量空间具有了物质性。令 ϑ_0 为四维动量空间类光区的单位类光因子，d 为实域中的系数，如 $d = 1$，四维动量可写为

$$\delta P = \mathrm{j}\delta\vec{p} + \frac{\delta E}{c} = \mathrm{j}p_c + \frac{E_c}{c} = \mathrm{j}\,\frac{h}{\lambda} + \frac{h\nu}{c} \tag{14.2.5}$$

作内积，满足关系式

$$\vartheta_0^* \vartheta_0 = \left(-\mathrm{j}p_c + \frac{E_c}{c}\right)\left(\mathrm{j}p_c + \frac{E_c}{c}\right) = \frac{h^2}{\lambda^2} - \frac{h^2}{\lambda^2} = 0 \tag{14.2.6}$$

将式(14.1.1)的第一式分写成 μ 相格和 ν 相格的本征方程并相减，注意到式(8.5.15)，取 $\phi_\mu = \phi_\nu = \phi$，有

$$\gamma_\mu(\hat{P}_\mu - \hat{P}_\nu)\phi = \gamma_\mu(P_\mu - P_\nu)\phi = c(m_{\mu 0} - m_{\nu 0})\phi \qquad (14.2.7)$$

令

$$\delta m_0 = \frac{m_{\mu 0} - m_{\nu 0}}{2} = b\vartheta_0 \in \Xi \qquad (14.2.8)$$

δm_0 与类时区特定方位的四维动量差值有关，命名为质量间隙。在动量能量空间，质量间隙也是沟通类时区与类光区的桥梁，是连接质量和能量转换的重要物理量。由于 μ 和 ν 对应于类光区不同的分立相格，满足式(14.2.3)条件，所以质量间隙可看做有静质量粒子与真空的质量差值，对应于类光区的分立相格，是粒子作量子跃迁时静止质量发生改变并与真空中能量发生交换的物理量。一般将质量间隙分为两类：一类是电子与光子的耦合，质量间隙与电磁场相对应，称为电磁质量；一类是介子或强子与中微子的耦合，质量间隙可能与弱相互作用或强相互作用相对应。在第十六章和第十七章的讨论中可以看到质量间隙在推导 Yang-Mills 方程和 Maxwell 方程中起到了重要作用，它参与了粒子和场的弱相互作用、电磁相互作用以及强相互作用。

由式(14.2.7)和(14.2.8)，取

$$\gamma_\mu \delta\hat{P}_\mu = \frac{\gamma_\mu \hat{P}_\mu - \gamma_\nu \hat{P}_\nu}{2} = \gamma_\mu \hat{P}_c \in \Xi \qquad (14.2.9)$$

在式(10.3.2)和(10.3.3)中，类光区对应的动量算符为 $\hat{p}_c = -\mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial x_c}$，$\hat{E}_c = -\mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial t}$，$x_c = ct$，$p_c = \frac{E_c}{c}$。由式(14.2.8)和(14.2.9)可以将式(14.2.7)写成

$$\gamma_\mu \delta\hat{P}_\mu \phi = c\delta m_{\mu 0}\phi \qquad (14.2.10)$$

或

$$\begin{cases} \gamma_\mu \hat{P}_c \phi = c\delta m_{\mu 0}\phi \\ \gamma_\mu^+ \hat{P}_c^+ \phi^+ = c\delta m_{\mu 0}\phi^+ \end{cases} \qquad (14.2.11)$$

式(14.2.11)与 Dirac 方程(14.1.1)类同为线性关系式，可能是具有 $\frac{1}{2}$ 自旋的中微子。由于式(14.2.11)是类光区对应的方程，说明中微子以光速运动，静止质量等于零。式(14.2.10)由同一类时区两个 Dirac 本征方程的减法构成，也是两个相互负元的类时区中分别对应正、反 Dirac 粒子本征方程的直和。质子或中子等强子相互耦合时发生了质能转变，产生了中微子也产生了质量间隙，使类时区与类光区发生了几何关联。质量间隙作为类光粒子的质量，应该弥散于真空中。Weyl 曾提出一个二分量的方程来描写自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米子。它的特点是：(1)该粒子的静止质量为零；(2)对空间反射不具有对称性。式(14.2.11)应该具有这两种特性，两

个方程可写作

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi = \pm \gamma \nabla_c \phi \tag{14.2.12}$$

式(14.2.12)为无静止质量的中微子所对应的方程，与(14.2.11)具有类同的形式。

将式(14.2.11)两式作内积，有

$$\gamma_\mu^+ \gamma_\mu \hat{P}_c^+ \hat{P}_c \psi = \hat{P}_c^+ \hat{P}_c \psi = (c\delta m_{\mu 0})^2 \psi \tag{14.2.13}$$

式(14.2.13)是类光区所对应的 Klein-Gordon 方程，我们猜测它可能是 Higgs 粒子方程。由于式(14.2.13)联系着质量间隙，在特定条件下由真空的激发可能产生带有静止质量的正、反粒子，所以式(14.2.13)可看做是四维动量空间中由类光区的能量转变为类时区质量的关联式。由于广域 Hilbert 相空间的非质点相格的多样性，正、反 Dirac 粒子本征方程也具有多样性，所以 Higgs 粒子联系着的质量间隙和可能激发的带有静止质量的正、反粒子应是各种各样的，这可能也是 Higgs 粒子的神秘之处，但目前还没有产生 Higgs 粒子的实验验证。

14.3　四维空间中厄米算符本征函数的正交性

方程(14.1.4)和(14.1.5)可分别看做四维动量空间的静能本征方程和静止质量本征方程。方程中的态函数 ϕ 为本征函数，所有的本征函数构成完全集，一般态函数 ψ 可以由本征函数的线性组合表示：

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i \tag{14.3.1}$$

式(14.3.1)满足广域正交归一条件

$$\int_0^\infty \psi_\mu^+ \psi_\nu \mathrm{d}\tau = \delta_{\mu\nu} \tag{14.3.2}$$

取

$$\int_\mu^\nu \phi_\mu^+ \phi_\nu \mathrm{d}\tau = 0, \quad (\mu \neq \nu) \tag{14.3.3}$$

称为本征函数的广域正交条件。在四维时空中本征函数应为厄米算符，满足式(14.3.3)并与 Minkowski 动量空间的方向奇异性有关。

图 13.2 的类时区中，同一连线上两个非质点相格 μ 和 ν 的差值联系着类光区，说明两个物理事件可用光信号取得因果联系。由式(8.5.15)，当满足相干条件时，相位中波数 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 和角频率 $\bar{\omega} = 2\pi\nu$，满足条件 $k\lambda = \frac{\bar{\omega}}{\nu} = 2\pi$。取 $x_\mu = x_\nu + \delta$，$t_\mu = t_\nu + \delta$，两个非质点相格 μ 和 ν 的本征态函数相等：

$$\phi_\mu = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(kx_\mu - \bar{\omega}t_\mu)} = a^* a\phi_\nu = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[(kx_\nu + k\delta) - (\bar{\omega}t_\nu + \bar{\omega}\delta)]} = \phi_\nu = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(kx_\nu - \bar{\omega}t_\nu)} = \phi \tag{14.3.4}$$

其中，$a^* a = e^{-\frac{i}{\hbar}\omega t} e^{\frac{i}{\hbar}\omega t} = 1$。对非质点相格 μ 和 ν 的本征方程作减法，满足式(14.2.7)和(14.2.8)的本征值不相等，但本征值的增量与类光区相关联。考虑四维时空的特性可证明厄米算符本征函数的广域正交性。

四维空间取 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n, \cdots$，为厄米算符 $\hat{F}$ 的本征函数，对应本征元数分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$，有本征方程

$$\hat{F}\phi_\mu = \lambda_\mu \phi_\mu, \quad \hat{F}\phi_\nu = \lambda_\nu \phi_\nu \tag{14.3.5}$$

λ_μ, λ_ν 为四元数。当 $\mu \neq \nu$ 时，有 $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$，如方程(14.3.5)中两式在四维时空的连线平行或垂直类光区，满足关系

$$\hat{F}(\phi_\mu - \phi_\nu) \in \Xi \tag{14.3.6}$$

则

$$\hat{F}^+ (\phi_\mu^+ - \phi_\nu^+) \hat{F}(\phi_\mu - \phi_\nu) = 0$$

有关系

$$\phi_\mu = \phi_\nu = \phi, \quad \int_\mu^\nu \phi_\mu^+ \phi_\nu \mathrm{d}\tau = 1, \quad (\mu \neq \nu)$$

如不满足式(14.3.6)条件，则 $\hat{F}(\phi_\mu - \phi_\nu) \in C$，本征值为实数，满足 $\lambda_\mu = \lambda_\mu^*$，$\lambda_\nu = \lambda_\nu^*$。对式(14.3.5)的第一式取复共轭 $(\hat{F}\phi_\mu)^* = \lambda_\mu \phi_\mu^*$，左乘 ϕ_ν^* 并积分；对式(14.3.5)的第二式右乘 ϕ_μ^*，积分，有

$$\int (\hat{F}\phi_\mu)^* \phi_\nu \mathrm{d}\tau = \lambda_\mu \int \phi_\mu^* \phi_\nu \mathrm{d}\tau, \quad \int \phi_\mu^* \hat{F}\phi_\nu \mathrm{d}\tau = \lambda_\nu \int \phi_\mu^* \phi_\nu \mathrm{d}\tau$$

由厄米算符定义，两式相减有

$$(\lambda_\mu - \lambda_\nu) \int \phi_\mu^* \phi_\nu \mathrm{d}\tau = 0$$

因 $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$，则满足式(14.3.3)正交条件。

14.4 质量重整化

质量间隙与类光区有关，它可以看做是在质能转换过程中实物粒子的静能转变成能量的部分。取

$$m = \frac{m_{\mu 0} + m_{\nu 0}}{2} \tag{14.4.1}$$

其中，m 命名为机械质量或固有质量。由式(14.2.8)和(14.4.1)联立，有关系

$$\begin{cases} m_{\mu 0} = m + \delta m_0 \\ m_{\nu 0} = m - \delta m_0 \end{cases} \tag{14.4.2}$$

式(14.4.2)中的 $m_{\mu 0}$ 和 $m_{\nu 0}$ 分别对应四维 Minkowski 动量空间的时空点 μ 和 ν 的静质量，如图 13.1。其中，$m_{\mu 0}$ 命名为装载质量，$m_{\nu 0}$ 命名为卸载质量。对电子而言，可理解为实物粒子在 ν 点处放出光量子，部分静质量转变为电磁质量；粒子在点 μ 处吸收光量子，电磁质量转变为 μ 点处的部分静质量，故有卸载质量和装载质量之分。对强子和中微子的耦合对应质量间隙，也可作类同的解释。

电子的能级跃迁与光量子或电磁场有关，在实验中所观察到的电子的质量是电子的全部质量。实验并不能区分所观察的质量哪一部分是电子的固有质量或机械质量，哪一部分是电子的电磁质量，亦即与电磁场相互作用而产生的电子自能。因此，式(14.4.2)将电子的固有质量和电磁质量合并起来，作为由实验所观察到的电子的静止质量。从静质量的角度给出了四维动量空间 μ 和 ν 点质能转换关系，说明电子的静止质量虽然在坐标变换中是一个不变量，但并不是一个固定量。也就是说，电子在某个量子态时对不同参照系而言静止质量或静能是不变量，但两个不同的量子态涉及量子跃迁，涉及时空中的两点问题，静止质量就是一个可以与能量相互转变的物理量。式(14.4.2)如表示强子间的相互作用，静止质量发生改变产生质量间隙与中微子有关。在四维动量相空间，每一个分立相格对应的实物粒子静止质量不同，或每一个四维本征方程对应的质量本征值也不同。不同本征态之间的能级跃迁，产生和湮灭的光量子或中微子是质量与能量相互转变的产物，目前发现了几百种基本粒子可能与不同本征态相互进行质能交换，产生不同质量间隙的结果。式(14.4.2)描述了静质量、电磁质量(质量间隙)和固有质量的关联，为旋量粒子与场的相互作用提供了一种定量关系。

由式(14.4.2)可以讨论静质量的改变引起粒子能量和动量发生的变化。分别对 μ 和 ν 点的四维动量取内积，令 $P_\mu = P_\mu\left(\frac{E_2}{c}, \mathrm{j}p_2\right), P_\nu = P_\nu\left(\frac{E_1}{c}, \mathrm{j}p_1\right)$，有

$$P_\mu^* P_\mu = \frac{E_2^2}{c^2} - p_2^2 = m_{\mu 0}^* m_{\mu 0} c^2 = m_{\mu 0}^2 c^2 \tag{14.4.3}$$

$$P_\nu^* P_\nu = \frac{E_1^2}{c^2} - p_1^2 = m_{\nu 0}^* m_{\nu 0} c^2 = m_{\nu 0}^2 c^2 \tag{14.4.4}$$

由式(14.2.3)，有关系

$$\left(\frac{E_2}{c} + \mathrm{j}p_2\right) - \left(\frac{E_1}{c} + \mathrm{j}p_1\right) \in \Xi \tag{14.4.5}$$

令 $\delta E = E_2 - E_1, \delta p = p_2 - p_1$，对式(14.4.5)取内积，有

$$\left(\frac{\delta E}{c}\right)^2 - (\delta p)^2 = \left(\frac{\delta E}{c} - \delta p\right)\left(\frac{\delta E}{c} + \delta p\right) = 0 \tag{14.4.6}$$

即

$$\left|\frac{\delta E}{c}\right| = \pm |\delta p|$$

上式取正号时满足式(10.1.12)，一般情况，有

$$\left(\frac{E_2}{c}-\frac{E_1}{c}\right)=\pm(p_2-p_1) \tag{14.4.7}$$

由式(14.4.3)和(14.4.4)，取

$$\begin{cases}m_{\mu0}^2=m^2+\Delta m_0^2\\ m_{\nu0}^2=m^2-\Delta m_0^2\end{cases} \tag{14.4.8}$$

由式(14.4.8)有关系

$$\Delta m_0^2=\frac{m_{\mu0}^2-m_{\nu0}^2}{2} \tag{14.4.9}$$

$$m^2=\frac{m_{\mu0}^2+m_{\nu0}^2}{2} \tag{14.4.10}$$

其中，$m_{\mu0}^2$ 和 $m_{\nu0}^2$ 分别对应四维动量空间中 μ 和 ν 点的静质量的平方。m^2 为机械质量平方，Δm_0^2 为静止质量平方的改变量。

式(14.4.8)至(14.4.10)均为实数的二次形式。由式(14.4.3)、(14.4.4)、(14.4.7)和(14.4.10)，得

$$m^2=\frac{1}{2}\left(\frac{E_2^2}{c^2}-p_2^2+\frac{E_1^2}{c^2}-p_1^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{E_2}{c}-p_2\right)\left(\frac{E_2}{c}+\frac{E_1}{c}+p_2+p_1\right) \tag{14.4.11}$$

$$\Delta m_0^2=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{E_2^2}{c^2}-p_2^2\right)-\left(\frac{E_1^2}{c^2}-p_1^2\right)\right]=\frac{1}{c^2}(E_2-E_1)(E_2-cp_2) \tag{14.4.12}$$

式(14.4.12)可写作

$$\Delta E_0^2=c^2(E_2-E_1)(E_2-cp_2) \tag{14.4.13}$$

将式(14.4.11)和(14.4.12)联立，得

$$\Delta m_0^2=\frac{2m^2(E_2-E_1)}{E_1+E_2+c(p_1+p_2)} \tag{14.4.14}$$

例 14.1　取 $\frac{E_2}{c}+\mathrm{j}p_2=12+\mathrm{j}5$，$\frac{E_1}{c}+\mathrm{j}p_1=8+\mathrm{j}$，有 $\frac{E_2}{c}-\frac{E_1}{c}=p_2-p_1=4$，$\frac{E_2}{c}-p_2=\frac{E_1}{c}-p_1=7$，则 $m_{20}^2=12^2-5^2=119$，$m_{10}^2=8^2-1=63$。而由式(14.4.11)至(14.4.14)，有 $\Delta m_0^2=\frac{119-63}{2}=(12-8)(12-5)=28$，$m^2=\frac{119+63}{2}=\frac{(12-5)(12+8+5+1)}{2}=91$

例 14.2　取 $\Delta m_0=(12+5\mathrm{j})-(8+\mathrm{j})=4+4\mathrm{j}$，由式(14.4.10)和(14.4.14)，得

$$m^2=\frac{(12-5\mathrm{j})(12+5\mathrm{j})+(8-\mathrm{j})(8+\mathrm{j})}{2}$$

$$=\frac{(12-5\mathrm{j})(8+\mathrm{j})+(8-\mathrm{j})(12+5\mathrm{j})}{2}=91$$

在平直的四维双曲 Minkowski 空间，利用方向奇异性讨论物质性是一项开创性工作。传统的相对论中，只有在广义相对论的弯曲时空中其时空性质才与物质性相联系，但人们一直想在四维时空中描述电磁场以及场与粒子的耦合，只是数学工具的局限性，没有可能表现平直时空的物质性。双曲平直空间的物质性，体现了数学的几何空间与微观客体物理性质具有深层次的因果联系，双曲平直空间奇异性刻画了质能转变的几何性质，即有静质量粒子和电磁场的几何关联。

14.5　能量和质量转换关系

Compton 散射为微观客体的量子跃迁以及与光量子相互关联的物理诠释提供了实验验证。我们可能提出这样一个问题，Compton 散射的能量动量分别守恒，与 Newton 经典力学中的能量守恒定律和动量守恒定律有何区别和联系。显然两者之间具有本质上的差异，因为 Compton 散射具有相对论效应，对应着四维动量间隔等于零。实物粒子与光的耦合过程中，它们的动量和能量可以相互转化，并且在转化过程中保持守恒。这种守恒关系与 Newton 力学的动量和能量守恒、狭义相对论的能量动量关系以及 Maxwell 场方程的能量动量关系均有区别。

在 Newton 经典力学中，时间坐标与空间坐标相互独立，描述低速运动的宏观物体可抽象为质点，分别遵守动量守恒定律和能量守恒定律。由于质点的运动规律是在三维 Euclidean 空间中描述的，决定了空间性质只能对应低速运动的宏观物体。对于低速或高速运动的微观客体，通过第六章的分析与 Minkowski 空间相对应，处于类时区的微观客体，本身的运动规律以及实物粒子间的相互作用对应类时区的类时间隔。粒子作高速运动时对应 Lorentz 变换，满足相对论的能量动量关系式；在经典近似时 ($v\ll c$) 粒子本身运动规律遵守 Galilei 变换，分别满足能量守恒和动量守恒，这类同于 Newton 经典力学。微观客体与光的耦合与 Minkowski 空间的分立结构有关，通过类时区与类光区的几何关联使实物粒子与场建立起能量和动量的转换关系。Minkowski 空间的时间坐标与空间坐标并不是独立的，粒子和场的耦合是通过类时区的方向奇异性，通过四维时空间隔等于零建立起的一种等量关系。也就是说，这种能量守恒和动量守恒实质上是实物客体与场的一种对等的转换联系。

在 Minkowski 空间，四维相格的这种能量守恒和动量守恒实质上也是能量和质量的一种转换关系。由式(14.4.9)和(14.4.10)，取

$$\begin{cases} m^2c^2 = \dfrac{m_{\mu0}^2c^2 + m_{\nu0}^2c^2}{2} \\ \Delta m_0^2c^2 = \dfrac{m_{\mu0}^2c^2 - m_{\nu0}^2c^2}{2} \end{cases} \tag{14.5.1}$$

由式(14.4.7)，满足关系

$$p_c = \pm \frac{E_c}{c^2} \tag{14.5.2}$$

其中，p_c 和 E_c 分别为光子的动量和能量，具有二分量性质。由于光子的静止质量为零，所以实物粒子，如电子，在量子跃迁时吸收或放出光量子，质量和能量发生了转换。

由 Einstein-de Broglie 关系式(7.4.2)可写作

$$\begin{cases} E_\mu = E_\nu + h\nu \\ p_\mu = p_\nu + \dfrac{h}{\lambda} \end{cases} \tag{14.5.3}$$

将式(14.5.3)代入式(10.1.6)中的第二式，有

$$\frac{(E_\nu + h\nu)^2}{c^2} - \left(p_\nu + \frac{h}{\lambda}\right)^2 = m_{\mu0}^2c^2 \tag{14.5.4}$$

展开式(14.5.4)，注意到式(10.1.6)的第一式和式(14.5.1)的第二式，考虑到光波满足关系 $\nu\lambda = c$，有

$$\Delta m_0^2c^2 = \frac{1}{2}(m_{\mu0}^2 - m_{\nu0}^2)c^2 = \frac{h}{\lambda}\left(\frac{E_\nu}{c} - p_\nu\right) \tag{14.5.5}$$

取 $E_\nu = m_\nu c^2, p_\nu = m_\nu v_\nu$，则式(14.5.5)可写为

$$\Delta m_0^2c^2 = \frac{1}{2}(m_{\mu0}^2 - m_{\nu0}^2)c^2 = \frac{hm_\nu}{\lambda}(c - v_\nu) \tag{14.5.6}$$

由式(14.4.7)，对式(14.5.5)写为

$$\Delta m_0^2c^2 = \frac{1}{2}(m_{\mu0}^2 - m_{\nu0}^2)c^2 = \frac{h}{\lambda}\left(\frac{E_\mu}{c} - p_\mu\right) \tag{14.5.7}$$

取 $E_\mu = m_\mu c^2, p_\mu = m_\mu v_\mu$，同理有

$$\Delta m_0^2c^2 = \frac{1}{2}(m_{\mu0}^2 - m_{\nu0}^2)c^2 = \frac{hm_\mu}{\lambda}(c - v_\mu) \tag{14.5.8}$$

经典近似情况下，如取 $p_\nu = 0$，由式(10.1.6)，则 $E_\nu = m_{\nu0}c^2$。如果满足 $m_{\mu0} + m_{\nu0} \approx 2m_\mu \gg m_{\mu0} - m_{\nu0}$，则式(14.5.5)可简写成

$$m_{\mu0} - m_{\nu0} = \frac{h}{\lambda c} \tag{14.5.9}$$

式(14.5.9)类同于式(7.2.12)中 Compton 波长的表达式。式(14.5.9)也可写为

$$(m_{\mu0} - m_{\nu0})c^2 = m_c c^2 = p_c c = \frac{hc}{\lambda} = h\nu \tag{14.5.10}$$

m_c、p_c 分别为光量子的质量和动量，取 E_c 为光子的能量，则式(14.5.10)可写为

$$E_\mu - E_\nu = E_c = m_c c^2 \tag{14.5.11}$$

式(14.5.11)与式(14.5.3)类同，可看做实物粒子在量子跃迁时吸收或放出光量子发生了质量与动量以及质量与能量的转变。

式(14.5.11)虽然是式(14.5.5)的特例，但式(14.5.11)对应着质能关系，可解释物质的结合能和质量亏损，也对应着质量间隙。现作以下几点说明：

(1) 质能关系式(14.5.11)与 Minkowski 四维能量动量空间的方向奇异性有关，相空间中的定向相格描述了实物粒子与光子耦合时发生了质量和能量的转换。

(2) 式(14.5.11)不仅适用于高速粒子，也适用于低速粒子。实物粒子与光子耦合前后静止质量发生改变，即对于不同相格和能级的粒子静止质量是有差别的。

(3) 复合粒子在能级发生改变时需要吸收或放出光量子，相应的结合能也发生改变，而粒子的静止质量要产生亏损。

(4) Minkowski 复空间可以描述粒子之间能量和质量之间的转变关系，说明平直的 Minkowski 复空间也具有物质性，这与传统理论中只有弯曲空间才具有物质性是有区别的。

14.6　质能关系和结合能的几何解释

广域 Hilbert 相空间中，每一个分立相格对应一个具有一定静止质量粒子的量子态和本征态。对电子而言，跃迁时吸收或放出光量子；对强子间耦合或能量跃迁生成中微子。取粒子跃迁前后分别对应 μ 相格和 ν 相格，两者的连线平行或垂直于类光区。式(14.2.3)可写成

$$\frac{\Delta E}{c} + \mathrm{j}\Delta p = \frac{E_c}{c} + \mathrm{j}p_c = d'\vartheta_0 \tag{14.6.1}$$

将 Einstein-de Broglie 关系式(7.4.2)代入式(14.6.1)，有关系

$$h\left(\frac{\nu}{c} + \mathrm{j}\frac{1}{\lambda}\right) = d'\vartheta_0 \tag{14.6.2}$$

式(14.6.2)中可取 $d' = h$，$\vartheta_0 = \frac{\nu}{c} + \mathrm{j}\frac{1}{\lambda}$，可解释为微观粒子在进行量子跃迁时实物粒子和耦合的场共同遵守能量守恒、动量守恒以及质量守恒。从实物粒子角度，在吸收或放出光量子或中微子前后，实物粒子本身的能量、动量以及静止质量均发生了改变。由于光量子或中微子的静止质量等于零，所以实物粒子与类光粒子耦合发生了质量和能量的转变应该满足质能守恒。由式(14.2.8)，则式(14.5.10)和(14.5.11)满足

$$2\delta E_0 = 2\delta m_0 c^2 = h\nu \tag{14.6.3}$$

式(14.6.3)中，δE_0 为粒子量子跃迁时产生的静能间隙，同时伴随质量间隙 δm_0，

而 $h\nu$ 为产生的光量子或中微子的能量，说明电子与电磁场相互作用应该满足质能守恒。在经典近似时，粒子的质量等于静止质量，虽然 Schrödinger 方程不考虑静能的影响，但能量和动量均有质量的因素。束缚态的电子作能级跃迁产生光量子也应看做类时区与类光区的联系，电子与光子发生了质量和能量的转变。这时电子的质量可能不再是常数，应是随着能级不同而变化的物理变量，而通常认为电子的静止质量为常量，应该是电离态自由电子的统计平均值。

例 14.3 电子进行能级跃迁所对应公式为 $E_2 - E_1 = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$，氢原子 Balmer 系第一条谱线 $\lambda = 6.563\times10^{-7}\,\text{m}$，取 $h = 6.626\times10^{-34}$，电子的静止质量为 $m_e = 9.109\,382\,6(16)\times10^{-31}\,\text{kg}$，则光子的能量 $2\delta mc^2 = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$。由式(14.2.8)，得电磁质量为 $2\delta m = m_2 - m_1 = \frac{h}{c\lambda} \approx 3.36\times10^{-36}\,\text{kg}$，即电子静止质量的改变量约为静止质量的 10^{-5} 量级。

δm_0 是实物粒子进行量子跃迁时静止质量的差异或质量间隙，它与吸收或放出类光粒子有关。对电子而言，在束缚态时通过吸收光量子可跃迁到高能级的激发态。当电子电离时形成自由电子，在电离过程中电子从吸收的光子中获取能量。考虑相对论效应，四维时空的类时区与类光区产生了几何关联，电子与光量子耦合使光量子的部分能量转变为电子的静质量或静能，因此自由运动的电子其能量和静止质量要大于束缚态的电子。描述电子束缚能级的改变过程中并没有考虑电子质量的参与，但也不能排斥电子的质量没有改变，只是关注点在电子与光量子的耦合满足能量和动量分别守恒，并没有考虑质量的变化情况。我们猜测只要参与类时区与类光区的几何关联，电子与光量子的耦合就可能发生电子质量的改变。

静止质量的改变也应体现在 Compton 散射中。式(7.2.5)中如果 $p_1 \neq 0$，则(7.2.6)可以写为

$$\begin{cases}\vec{p}_3 = \vec{p}_1 + \vec{p}_{c0} - \vec{p}_c \\ E_3 = E_1 + E_{c0} - E_c = E_1 + h\nu_0 - h\nu\end{cases} \tag{14.6.4}$$

式(7.2.7)改写为

$$E_3^2 - p_3^2c^2 = m'^2_0c^4 \tag{14.6.5}$$

将式(14.6.4)代入式(14.6.5)，有

$$(E_1 + h\nu_0 - h\nu)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_{c0} - \vec{p}_c)^2c^2 = m'^2_0c^4 \tag{14.6.6}$$

如初态满足能量动量关系

$$E_1^2 - p_1^2c^2 = m_0^2c^4 \tag{14.6.7}$$

展开式(14.6.6)，并与式(14.6.7)联立，有

$$(m_0c^2 + h\nu_0 - h\nu)^2 - (\vec{p}_{c0} - \vec{p}_c)^2c^2 = m'^2_0c^4 - \eta \tag{14.6.8}$$

其中，$\eta \approx 2h\,|(E_1 - p_1c - m_0c^2)(\nu_0 - \nu)|$。当 $p_1 = 0$ 时 $\eta = 0$。将式(7.2.9)代入

式(14.6.6)的展开式，有关系

$$\nu = \frac{\nu_0 - \dfrac{\eta}{2hm_0c^2}}{1 + \dfrac{h\nu_0}{m_0c^2}(1-\cos\theta)} \tag{14.6.9}$$

将式(14.6.8)与式(7.2.8)相比较，满足

$$m_0'^2c^4 = m_0^2c^4 + \eta \tag{14.6.10}$$

或

$$E_{\mu 0}^2 - E_{\nu 0}^2 = (\delta E_0)^2 = (\delta m_0)^2c^4 \tag{14.6.11}$$

由式(14.6.10)和(14.6.11)得知，在一般情况下，Compton 散射中电子初态和末态的静止质量或静能发生了改变，或者说发生了静止质量和能量的转换关系。

其实电子静止质量是变量很容易理解，对光量子而言，$E_c = h\nu = p_c c = \dfrac{h}{\lambda}c$，或 $h\nu_0 - h\nu = p_{c0}c - p_c c$。将式(14.6.5)或(14.6.7)左边两项分别相加或相减，相同的物理量必然涉及右边物理量的改变。式(14.6.4)是一次方程，而式(14.6.6)和(14.6.7)是二次方程，它们同时成立的条件也要求式(14.6.6)和(14.6.7)右边不相同，而 $p_1 = 0$ 时只是一种特例。利用 Minkowski 动量空间的奇异性可以对式(7.2.8)给出相应的几何解释。将式(14.2.4)写成

$$P_3 = P_1 + P_c \tag{14.6.12}$$

取 $\delta E = h\nu_0 - h\nu, \delta\vec{p} = \vec{p}_{c0} - \vec{p}_c, P_c = \dfrac{\delta E}{c} + \mathrm{j}\delta\vec{p}$，代入式(14.6.11)，有关系

$$\frac{E_3}{c} + \mathrm{j}\vec{p}_3 = \left(\frac{E_1}{c} + \frac{\delta E}{c}\right) + \mathrm{j}(\vec{p}_1 + \delta\vec{p}) \tag{14.6.13}$$

对式(14.6.13)取内积，满足式(14.6.6)，当取 $p_1 = 0$ 时对应给出式(7.2.8)。

粒子在不同能级对应不同的静止质量以及实物粒子在束缚态的质量小于自由态的质量也体现在核能的改变。即实物粒子质量和能量的改变应体现在核子的结合能以及正、反粒子的产生和湮灭。在核聚变和核裂变中，原子核的质量要小于构成它的核子的总质量，原子的分裂与聚合使亚核粒子的能级重新分布。以 m_X 表示原子核 ${}_Z^AX$ 的质量，原子核中 Z 个质子的质量为 Zm_p，N 个中子的质量为 Nm_n，质量亏损 δm 可表示为

$$\delta m = Zm_p + Nm_n - m_X \tag{14.6.14}$$

或结合能

$$\delta E_b = \delta mc^2 = (Zm_p + Nm_n - m_X)c^2 \tag{14.6.15}$$

式(14.6.14)和(14.6.15)中的 δm 和 δE_b 也分别为原子核的质量间隙和能量间隙。显然，原子核中的核子对应于不同的能级具有不同的质量，核子通过能级跃迁使质量发生改变。在核聚变和核裂变中，正是由于原子核的重新组合使核子的能

级发生改变并以结合能形式表现出来。核子的量子跃迁和束缚能的改变伴随着质量的改变,伴随着质量间隙和能量进行等量转换,释放出的结合能应该是质量和能量的转变而产生了质量亏损。在 Minkowski 复空间中质量亏损和结合能也应该是类时区与类光区相互关联的几何表现,第十六章和第十七章推导的 Yang-Mills 方程、Maxwell 方程以及强相互作用方程均与质量间隙有关,说明粒子和粒子以及粒子和场的相互作用都可能产生质能转变。

第十五章　粒子的作用量原理

静能作为四维动量坐标变换不变量可抽象为双曲度量空间的拟距离，也为系统的 Hamilton 量。粒子的能量是四维动量空间的一个坐标分量，不是不变量，也不是守恒量，它随三维动量分量的变化而变化。将作用量方程引入广域 Hilbert 相空间，用类时区的非质点相格描述实物粒子的作用量方程，类光区的非质点相格描述光量子的作用量方程。当粒子和场耦合时能量和动量分别守恒，量子化的场和粒子在分立的 Minkowski 复空间中具有了几何背景。静能和静止质量作为 Hamilton 量或 Lagrangian 函数，使相对论量子力学和场论的物理规律和表现形式相吻合并具有了个体决定性的因果解释。

15.1　粒子的作用量方程

由式(5.1.1)，在 Minkowski 复空间取最小作用量方程，其中 $b=-m_0c$ 有方程

$$S=-\int m_0c\mathrm{d}s \tag{15.1.1}$$

$\mathrm{d}s$ 为不变量，参照式(5.1.2)，取

$$\mathrm{d}s=-\sqrt{\mathrm{d}X_\mu^+\mathrm{d}X_\mu} \tag{15.1.2}$$

由式(4.1.13)和(4.5.3)，将式(15.1.2)代入式(15.1.1)，有

$$S=\int m_0c\sqrt{\mathrm{d}X_\mu^+\mathrm{d}X_\mu}=\int c\sqrt{\frac{m_0\mathrm{d}X_\mu^+}{\mathrm{d}\tau}\frac{m_0\mathrm{d}X_\mu}{\mathrm{d}\tau}}\mathrm{d}\tau=\int c\sqrt{P_\mu^+P_\mu}\mathrm{d}\tau \tag{15.1.3}$$

式(15.1.3)与(5.2.2)相同。由式(5.2.3)，Lagrangian 函数可以写为

$$L_2=H_0=m_0c^2=c\sqrt{P_\mu^+P_\mu} \tag{15.1.4}$$

式(15.1.4)的算符表示为

$$\hat{H}_0=\hat{L}_2=c\sqrt{\hat{P}_\mu^+\hat{P}_\mu} \tag{15.1.5}$$

式(15.1.5)为 Dirac 正、反粒子耦合时所对应的 Hamilton 算符或 Lagrangian 算符。上一章中分析了在四维动量空间中静能乃至静止质量为不变量，而能量和动量作为四维动量矢量的分量均为变量。对式(15.1.3)取变分，有

$$\delta S=\int c\delta\sqrt{P_\mu^+P_\mu}\mathrm{d}\tau=0 \tag{15.1.6}$$

注意到式(14.2.8)，则式(15.1.6)可以写为

$$\int \delta L_2 \mathrm{d}\tau = \int c^2 \delta m_0 \mathrm{d}\tau = \int c^2 \frac{m_{\mu 0} - m_{\nu 0}}{2} \mathrm{d}\tau \tag{15.1.7}$$

因 $L_2 = m_0 c^2$ 为不变量，则 $\delta L_2 = 0$，由式(15.1.4)和(4.1.14)，有

$$\delta L_2 = c\delta(P_\mu^+ P_\mu)/2\sqrt{P_\mu^+ P_\mu} = \frac{1}{2m_0}\delta(P_\mu^+ P_\mu) = 0 \tag{15.1.8}$$

或

$$P_\mu^+ \delta P_\mu + P_\mu \delta P_\mu^+ = 0 \tag{15.1.9}$$

式(15.1.9)的算符表示为

$$\hat{P}_\mu^+ \delta \hat{P}_\mu + \hat{P}_\mu \delta \hat{P}_\mu^+ = 0 \tag{15.1.10}$$

将式(24.4.11)和(24.4.12)代入式(15.1.10)，满足

$$\left(\mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial X_\mu}\right)\delta\left(-\mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial X_\mu^+}\right) + \left(-\mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial X_\mu^+}\right)\delta\left(\mathrm{j}\hbar \frac{\partial}{\partial X_\mu}\right) = 0 \tag{15.1.11}$$

Dirac 粒子的 Lagrangian 函数由式(5.2.7)可改写为

$$L_2 = \tilde{\omega}_\mu P_\mu^+ = P_\mu \frac{\partial L_2}{\partial P_\mu} \tag{15.1.12}$$

由式(15.1.4)，系统 Hamilton 函数满足关系

$$P_\mu \frac{\partial H_0}{\partial P_\mu} - H_0 = 0 \tag{15.1.13}$$

因 $\tilde{\omega}_\mu = \frac{\mathrm{d}X_\mu}{\mathrm{d}\tau}, F_\mu^+ = \frac{\mathrm{d}P_\mu^+}{\mathrm{d}\tau}$，则 $\tilde{\omega}_\mu \mathrm{d}P_\mu^+ = F_\mu^+ \mathrm{d}X_\mu$。由式(5.2.12)和(5.2.13)，对式(15.1.12)取变分，有

$$\delta L_2 = \tilde{\omega}_\mu \delta P_\mu^+ + P_\mu^+ \delta \tilde{\omega}_\mu \tag{15.1.14}$$

或

$$\delta L_2 = F_\mu^+ \tilde{\omega}_\mu \delta\tau + \tilde{\omega}_\mu^+ F_\mu \delta\tau \tag{15.1.15}$$

如 $L_2 = L_2(P_\mu, P_\mu^+)$，取变分，

$$\delta L_2 = \frac{\partial L_2}{\partial P_\mu^+}\delta P_\mu^+ + \frac{\partial L_2}{\partial P_\mu}\delta P_\mu = \frac{\partial L_2}{\partial P_\mu^+} F_\mu^+ \delta\tau + \frac{\partial L_2}{\partial P_\mu} F_\mu \delta\tau \tag{15.1.16}$$

比较式(15.1.15)和(15.1.16)，有

$$\frac{\partial L_2}{\partial P_\mu^+} = \tilde{\omega}_\mu, \quad \frac{\partial L_2}{\partial P_\mu} = \tilde{\omega}_\mu^+ \tag{15.1.17}$$

如 $L_2 = L_2(X_\mu, X_\mu^+)$，取变分，

$$\delta L_2 = \frac{\partial L_2}{\partial X_\mu^+}\delta X_\mu^+ + \frac{\partial L_2}{\partial X_\mu}\delta X_\mu = \frac{\partial L_2}{\partial X_\mu^+}\tilde{\omega}_\mu^+ \delta\tau + \frac{\partial L_2}{\partial X_\mu}\tilde{\omega}_\mu \delta\tau \tag{15.1.18}$$

比较式(15.1.15)和(15.1.18)，有

$$\frac{\partial L_2}{\partial X_\mu^+} = F_\mu, \quad \frac{\partial L_2}{\partial X_\mu} = F_\mu^+ \tag{15.1.19}$$

式(15.1.17)和(15.1.19)称为 Dirac 粒子四维正则方程。由式(15.1.17)和(15.1.19)，给

出式(5.2.16)所示的四维双曲型 Lagrangian 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{X}_\mu}\right)-\frac{\partial L_2}{\partial X_\mu}=0$$

15.2　质量积分的几何诠释

量子电动力学中质量无穷大的物理效应表现为电子自能的改变。电子与电磁场相互作用使电子的自能或静质量发生改变，而电磁场的无穷多自由度和电子抽象为点电荷具有无穷大的自能的困难造成了质量积分的发散。在广域 Hilbert 相空间中，类时区与类光区的几何关联将类时区分割成无穷多个分立相格，用每一个分立相格对应一个非质点的实物粒子如电子(或核子等)，电子不再为点电荷。电子在与电磁场相互作用时自能或静质量发生改变，而静质量改变来源于粒子发生了量子跃迁，这伴随着分立相格的改变。每个分立相格静止质量不同，动量空间的间隔不变量也不同，由电子自能或静质量的变化产生的电磁能或电磁质量对应的四维动量间隔等于零。在动量空间类时区中沿平行或垂直于类光区的方向，也就是光量子在 Minkowski 空间的运行方向积分具有特殊的几何意义和物理意义，可以消除对电子静质量的积分累计，这为解决质量重整化的发散问题找到了一个突破口。

正、反粒子 Dirac 旋量方程写为式(14.1.2)，对第一式作内积，有

$$c^2\hat{P}_\mu^+\hat{P}_\mu\phi_\mu^+\phi_\mu=E_{\mu0}^2\phi_\mu^+\phi_\mu \tag{15.2.1}$$

满足相对论能量动量关系

$$c^2P_\mu^+P_\mu=E_\mu^2-p_\mu^2c^2=E_{\mu0}^2 \tag{15.2.2}$$

同理式(14.1.2)的第二式满足

$$c^2\hat{P}_\nu^+\hat{P}_\nu\phi_\nu^+\phi_\nu=E_{\nu0}^2\phi_\nu^+\phi_\nu \tag{15.2.3}$$

有能量动量关系

$$c^2P_\nu^+P_\nu=E_\nu^2-p_\nu^2c^2=E_{\nu0}^2 \tag{15.2.4}$$

式(15.2.1)和(15.2.3)分别为分立相格 μ 和 ν 所对应的 Klein-Gordon 方程。如果非质点相格 μ 和 ν 的实物粒子可以用光信号取得联系，由式(8.5.15)，两个量子态的态函数相同 $\phi_\mu=\phi_\nu=\phi$。

式(5.2.10)将静能定义为粒子的 Hamilton 函数或 Lagrangian 函数。取正、反粒子在分立相格 μ 和 ν 的耦合中 Lagrangian 函数改变量

$$\delta L=L_\mu-L_\nu=m_{\mu0}c^2-m_{\nu0}c^2=E_{\mu0}-E_{\nu0} \tag{15.2.5}$$

由式(14.6.3)，电磁场能量在类光区中也对应一个分立相格，有

$$\delta L=2\delta E_0=\hbar\bar{\omega}=L_c \tag{15.2.6}$$

式(15.2.6)中 $\hbar\bar{\omega}=L_c$ 为光量子的能量和 Lagrangian 函数，即 Dirac 正、反粒子耦合时静能的改变所产生的光量子的能量为不变量或守恒量。由式(14.2.8)，电磁能与电磁质量相对应 $\delta m_0=\frac{1}{2}(m_{\mu0}-m_{\nu0})=\frac{\delta E_0}{c^2}$，称为质量间隙。

将式(14.1.2)的第一式左乘 ϕ^+，有

$$-\mathrm{j}\hbar c\gamma_\mu\phi^+\frac{\partial}{\partial X_\mu^+}\phi=m_{\mu0}c^2\phi^+\phi=E_{\mu0}\phi^+\phi \tag{15.2.7}$$

将式(14.1.2)的第二式右乘 ϕ，有

$$\mathrm{j}\hbar c\gamma_\nu^+\phi^+\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial X_\nu}\phi=m_{\nu0}c^2\phi^+\phi=E_{\nu0}\phi^+\phi \tag{15.2.8}$$

注意到 $\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial X_\mu^+}=\gamma_\mu^+\frac{\partial}{\partial X_\mu}$，因 $\gamma_\mu=\gamma_\nu$，将式(15.2.7)和(15.2.8)相减，有

$$\mathrm{j}\hbar c\gamma_\mu^+\phi^+\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial X_\mu}+\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial X_\mu}\right)\phi=\mathrm{j}\hbar c\frac{\mathrm{d}(\phi^+\gamma_\mu^+\phi)}{\mathrm{d}X_\mu}=\mathrm{j}\hbar c\frac{\mathrm{d}J_\mu^+}{\mathrm{d}X_\mu}=-2\delta E_0\phi^+\phi=-\delta L\phi^+\phi \tag{15.2.9}$$

对式(15.2.9)取积分，积分线沿平行或垂直类光区的分立相格 μ 到 ν 的路径，有

$$\mathrm{j}\hbar c\int_\mu^\nu\frac{\mathrm{d}J_\mu^+}{\mathrm{d}X_\mu}\mathrm{d}\tau=-\int_\mu^\nu\delta L\phi^+\phi\mathrm{d}\tau=\int_\mu^\nu c^2(m_{\nu0}-m_{\mu0})\phi^+\phi\mathrm{d}\tau \tag{15.2.10}$$

将式(15.2.10)左边微分与积分抵消，右边利用 δ 函数积分，有关系

$$J_\mu^+=\mathrm{j}\frac{2c}{\hbar}\delta m_0 \tag{15.2.11}$$

式(15.2.11)为正、反粒子耦合时四维几率密度与产生的质量间隙的对应关系式。

式(15.2.10)中 δL 联系着质量间隙，如果不考虑类时区与类光区的几何关联，式(15.2.10)右边每一项积分都可能发散，但积分是沿着与类光区平行或垂直的路径进行，积分的结果与过程无关，只与初末态物理量的差值有关(参见第二十章20.2节)。类时区的方向奇异性使类时区的定向积分转移到类光区的取值，化解了积分发散问题。物理中粒子间的耦合和量子跃迁与真空发生了能量交换，使静质量两项之差不会发生积分发散或出现无穷大情况。所以，Minkowski 空间的定向积分并不是电磁场所对应无穷多自由度的累计，也不是质量无穷大的物理效应，而是电信号联系的个体电子自能改变与真空能量交换的描述，传统量子场论与 Minkowski 空间的时空性质相脱离可能是出现质量积分发散的结症所在。

15.3 类光粒子的作用量方程

式(15.2.11)中的质量间隙与类光区相对应，类光区的中微子以及 Higgs 粒子等类光粒子，它们的运动方程为式(14.2.3)至(14.2.13)。以中微子为例，由式

(15.2.6)取 $L_c = E_c = \hbar\bar{\omega}$ 为中微子的能量，也为守恒量。式(15.2.11)可写为

$$L_c = \hbar\bar{\omega} = \mathrm{j}\hbar c J_\mu^+ = \mathrm{j}\hbar I_\mu^+ \tag{15.3.1}$$

其中，$I_\mu = cJ_\mu$ 为四维场流密度，以光速传播。式(15.3.1)满足作用量方程

$$S_c = \int L_c \mathrm{d}\tau = \mathrm{j}\hbar \int I_\mu \mathrm{d}\tau \tag{15.3.2}$$

中微子的动量和能量分别为 $p_c = m_c c = \dfrac{h}{\lambda}$，$E_c = m_c c^2 = \hbar\bar{\omega} = h\nu$，由式(14.2.6)，四维动量为

$$P_{q\mu} = \frac{E_c}{c} + \mathrm{j}p_c \tag{15.3.3}$$

对式(15.3.3)取内积，有

$$P_{q\mu}^+ P_{q\mu} = \frac{E_c^2}{c^2} - p_c^2 = 0 \tag{15.3.4}$$

对式(15.3.2)取变分，可将式(15.1.6)和(15.3.2)改写为

$$\delta S_c = \int \delta L_c \mathrm{d}\tau = \mathrm{j}\hbar \int \delta I_\mu \mathrm{d}\tau = \int c\delta\sqrt{P_{q\mu}^+ P_{q\mu}}\,\mathrm{d}\tau = 0 \tag{15.3.5}$$

式(15.3.5)为类光粒子的最小作用量原理。

由式(10.4.2)和(10.4.3)，类光粒子满足四维算符关系

$$\hat{P}_{q\mu} = -\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial X_{q\mu}}, \quad \hat{P}_{q\mu}^+ = \mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial X_{q\mu}^+} \tag{15.3.6}$$

因此，式(15.1.12)可写作

$$L_2 = \bar{\omega}_\mu P_\mu^+ = \frac{1}{\alpha^2}(c + \mathrm{j}v)\left(\frac{m_0 c^2}{c} - \mathrm{j}m_0 v\right) = \frac{m_0 c^2}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{15.3.7}$$

当 $v = c$ 时，式(15.3.7)中 m_0 改为 m_c，可将类光粒子的 Lagrangian 函数写为

$$L_c = m_c c^2 = \bar{\omega}_{q\mu} P_{q\mu}^+ = P_{q\mu}\frac{\partial L_c}{\partial P_{q\mu}} \tag{15.3.8}$$

由式(15.3.1)和(15.3.8)，系统 Hamilton 函数满足关系

$$P_{q\mu}\frac{\partial H_c}{\partial P_{q\mu}} - H_c = 0 \tag{15.3.9}$$

取 $\bar{\omega}_{q\mu} = \dfrac{\mathrm{d}X_{q\mu}}{\mathrm{d}\tau}$，$m_c\bar{\omega}_{q\mu} = P_{q\mu}$，$F_{q\mu}^+ = \dfrac{\mathrm{d}P_{q\mu}^+}{\mathrm{d}\tau}$，则 $\bar{\omega}_{q\mu}\mathrm{d}P_{q\mu}^+ = F_{q\mu}^+\mathrm{d}X_{q\mu}$，对式(15.3.8)取变分，有

$$\delta L_c = \bar{\omega}_{q\mu}\delta P_{q\mu}^+ + P_{q\mu}^+\delta\bar{\omega}_{q\mu} \tag{15.3.10}$$

或

$$\delta L_c = F_{q\mu}^+\bar{\omega}_{q\mu}\delta\tau + \bar{\omega}_{q\mu}^+ F_\mu\delta\tau \tag{15.3.11}$$

如 $L_c = L_c(P_{q\mu}, P_{q\mu}^+)$，取变分，

$$\delta L_c=\frac{\partial L_c}{\partial P_{q\mu}^{+}}\delta P_{q\mu}^{+}+\frac{\partial L_c}{\partial P_{q\mu}}\delta P_{q\mu}=\frac{\partial L_c}{\partial P_{q\mu}^{+}}F_{q\mu}^{+}\delta\tau+\frac{\partial L_c}{\partial P_{q\mu}}F_{q\mu}\delta\tau \tag{15.3.12}$$

比较式(15.3.10)和(15.3.11)，有

$$\frac{\partial L_c}{\partial P_{q\mu}^{+}}=\tilde{\omega}_{q\mu},\quad \frac{\partial L_c}{\partial P_{q\mu}}=\tilde{\omega}_{q\mu}^{+} \tag{15.3.13}$$

如 $L_c=L_c(X_{q\mu},X_{q\mu}^{+})$，取变分，

$$\delta L_c=\frac{\partial L_c}{\partial X_{q\mu}^{+}}\delta X_{q\mu}^{+}+\frac{\partial L_c}{\partial X_{q\mu}}\delta X_{q\mu}=\frac{\partial L_c}{\partial X_{q\mu}^{+}}\tilde{\omega}_{q\mu}^{+}\delta\tau+\frac{\partial L_c}{\partial X_{q\mu}}\tilde{\omega}_{q\mu}\delta\tau \tag{15.3.14}$$

比较式(15.3.12)和(15.3.14)，有

$$\frac{\partial L_c}{\partial X_{q\mu}^{+}}=F_{q\mu},\quad \frac{\partial L_c}{\partial X_{q\mu}}=F_{q\mu}^{+} \tag{15.3.15}$$

式(15.3.13)和(15.3.15)称为类光粒子的四维正则方程。四维 Lagrangian 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L_c}{\partial \dot{X}_{q\mu}}\right)-\frac{\partial L_c}{\partial X_{q\mu}}=0 \tag{15.3.16}$$

15.4 Dirac 旋量方程与 Lagrangian 函数

将 Dirac 方程(14.1.2)第一式左乘 ϕ^{+}，可以写作

$$\phi^{+}\left(\mathrm{j}\hbar\gamma_{\mu}c\frac{\partial}{\partial X_{\mu}^{+}}+m_{\mu0}c^{2}\right)\phi=0 \tag{15.4.1}$$

取 Lagrangian 函数为

$$L=\phi^{+}\left(\mathrm{j}\hbar\gamma_{\mu}c\frac{\partial}{\partial X_{\mu}^{+}}+m_{\mu0}c^{2}\right)\phi \tag{15.4.2}$$

注意到 $\gamma_{\mu}^{+}\gamma_{\mu}=1$，参照式(5.1.7)，设

$$\begin{cases}P_{\phi\mu}=\gamma_{\mu}^{+}m_{0}c\phi\\ \omega_{\phi\mu}^{+}=\gamma_{\mu}c\phi^{+}\end{cases} \tag{15.4.3}$$

则式(15.4.2)可以写为

$$H=\omega_{\phi\mu}^{+}P_{\phi\mu}-L \tag{15.4.4}$$

其中，$\hat{H}=-c\phi^{+}\gamma_{\mu}\hat{P}_{\mu}\phi$，与式(14.1.3)类同。式(15.4.1)至(15.4.4)与传统的 Dirac 粒子的作用量方程具有类同的形式。但是，由于式(15.4.1)的右边等于零，则式(15.4.2)的 Lagrangian 函数 $L=0$。

为了在 Minkowski 复空间或广域 Hilbert 相空间建立 Dirac 粒子的作用量方程，取

$$L_{3}=-\mathrm{j}\hbar c\gamma_{\mu}\phi^{+}\frac{\partial}{\partial X_{\mu}^{+}}\phi=m_{\mu0}c^{2}\phi^{+}\phi=E_{\mu0}\phi^{+}\phi \tag{15.4.5}$$

其中，L_3 命名为第三类 Lagrangian 函数，有

$$L_3 = L_2\phi^+\phi \tag{15.4.6}$$

式(15.4.6)中 L_2 为系统的静能，是四维动量变换不变量，而 $\phi^+\phi$ 也为不变量，并且隐含了四维时空间隔不变量和四维动量间隔不变量，所以 L_3 也为不变量或守恒量。由式(15.4.3)，将式(15.4.5)写成

$$L_3 = H_{\phi 0} = \omega_{\phi\mu}^+ P_{\phi\mu} \tag{15.4.7}$$

比较式(15.4.5)和(15.4.7)，有

$$P_{\phi\mu} = m_0\bar{\omega}_{\phi\mu} = -\mathrm{j}\hbar\frac{\partial\phi}{\partial X_\mu^+} \tag{15.4.8}$$

对式(15.4.7)取微分，有

$$\frac{\partial L_3}{\partial\bar{\omega}_{\phi\mu}^+} = P_{\phi\mu},\quad \frac{\partial L_3}{\partial P_{\phi\mu}} = \omega_{\phi\mu}^+ \tag{15.4.9}$$

将式(15.4.9)代入式(15.4.7)，满足

$$L_3 = \omega_{\phi\mu}^+\frac{\partial L_3}{\partial\omega_{\phi\mu}^+} = P_{\phi\mu}\frac{\partial L_3}{\partial P_{\phi\mu}} \tag{15.4.10}$$

L_3 为系统的不变量或守恒量，取 $L_3 = H_\phi$ 是粒子的 Hamilton 函数，式(15.4.10)可以写作

$$P_{\phi\mu}\frac{\partial H_\phi}{\partial P_{\phi\mu}} - H_\phi = 0 \tag{15.4.11}$$

取

$$\bar{\omega}_{\phi\mu}^+ = \frac{\mathrm{d}X_{\phi\mu}^+}{\mathrm{d}\tau},\quad F_{\phi\mu} = \frac{\mathrm{d}P_{\phi\mu}}{\mathrm{d}\tau} \tag{15.4.12}$$

则 $\bar{\omega}_{\phi\mu}^+\mathrm{d}P_{\phi\mu} = F_{\phi\mu}\mathrm{d}X_{\phi\mu}^+$。对式(15.4.7)取变分，有

$$\delta L_3 = P_{\phi\mu}\delta\omega_{\phi\mu}^+ + \omega_{\phi\mu}^+\delta P_{\phi\mu} \tag{15.4.13}$$

因为 $P_{\phi\mu}\delta\omega_{\phi\mu}^+ = \omega_{\phi\mu}\delta P_{\phi\mu}^+ = \omega_{\phi\mu}F_{\phi\mu}^+\delta\tau$，则

$$\delta L_3 = (F_{\phi\mu}\omega_{\phi\mu}^+\delta\tau + F_{\phi\mu}^+\omega_{\phi\mu}\delta\tau) \tag{15.4.14}$$

设函数 $L_3 = L_3(\omega_{\phi\mu}^+, P_{\phi\mu})$，取变分

$$\delta L_3 = \frac{\partial L_3}{\partial\omega_{\phi\mu}^+}\delta\omega_{\phi\mu}^+ + \frac{\partial L_3}{\partial P_\phi}\delta P_\phi \tag{15.4.15}$$

比较式(15.4.13)和(15.4.15)，可以得到式(15.4.9)的结果。

设 $L_3 = L_3(X_{\phi\mu}, X_{\phi\mu}^+)$，取变分

$$\delta L_3 = \frac{\partial L_3}{\partial X_{\phi\mu}^+}\delta X_{\phi\mu}^+ + \frac{\partial L_3}{\partial X_{\phi\mu}}\delta X_{\phi\mu} = \frac{\partial L_3}{\partial X_{\phi\mu}^+}\bar{\omega}_{\phi\mu}^+\delta\tau + \frac{\partial L_2}{\partial X_{\phi\mu}}\bar{\omega}_{\phi\mu}\delta\tau \tag{15.4.16}$$

比较式(15.4.14)和(15.4.16)，有

$$\frac{\partial L_3}{\partial X_{\phi\mu}^+} = F_{\phi\mu},\quad \frac{\partial L_3}{\partial X_{\phi\mu}} = F_{\phi\mu}^+ \tag{15.4.17}$$

式(15.4.9)和(15.4.17)中关系式为

$$\frac{\partial L_3}{\partial P_{\phi\mu}} = \omega_{\phi\mu}^{+},\quad \frac{\partial L_3}{\partial X_{\phi\mu}} = F_{\phi\mu}^{+} \tag{15.4.18}$$

式(15.4.18)为 Dirac 粒子四维正则方程。由式(15.4.18)也可导出与式(15.3.19)相同的 Lagrangian 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L_3}{\partial \dot{X}_{\phi\mu}}\right) - \frac{\partial L_3}{\partial X_{\phi\mu}} = 0 \tag{15.4.19}$$

如将式(15.4.5)写成

$$L_3 = -\mathrm{j}\hbar c\gamma_\mu \phi \frac{\partial \phi^+}{\partial X_\mu} = m_{\mu 0}c^2\phi^+\phi = E_{\mu 0}\phi^+\phi \tag{15.4.20}$$

对式(15.4.20)取微分,有

$$\frac{\partial L_3}{\partial\left(\frac{\partial \phi^+}{\partial X_\mu}\right)} = -\mathrm{j}\hbar c\gamma_\mu\phi,\quad \frac{\partial L_3}{\partial \phi^+} = m_{\mu 0}c^2\phi \tag{15.4.21}$$

满足 Lagrangian 方程

$$\frac{\partial}{\partial X_\mu^+}\left[\frac{\partial L_3}{\partial\left(\frac{\partial \phi^+}{\partial X_\mu}\right)}\right] - \frac{\partial L_3}{\partial \phi^+} = 0 \tag{15.4.22}$$

将式(15.4.21)代入式(15.4.22),满足 Dirac 方程(14.1.2)。

15.5 电磁场中 Dirac 粒子的作用量方程

由式(13.2.7)和(13.2.8),电子在电磁场中可将四维动量空间 P_μ 扩展为 $P_\mu + eA_\mu$。取电子在电磁场中满足 Dirac 方程

$$\gamma_\mu c(P_\mu + eA_\mu)\phi = \gamma_\mu c\left(-\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu^+} + eA_\mu\right)\phi = m_{0\mu}c^2\phi \tag{15.5.1}$$

或取 $\bar{P}_\mu = P_\mu + eA_\mu$,将上节中 P_μ 换成 $\bar{P}_\mu$,则所有的方程都成立。

式(15.5.1)左乘 ϕ^+,可以写作

$$c\gamma_\mu\phi^+\left[\left(-\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu^+} + eA_\mu\right) + m_{\mu 0}c^2\right]\phi = 0 \tag{15.5.2}$$

取

$$L_3 = c\gamma_\mu\phi^+(\hat{P}_\mu + eA_\mu)\phi \tag{15.5.3}$$

或

$$L_3 = c\gamma_\mu\phi^+\left(-\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu^+} + eA_\mu\right)\phi = m_{\mu 0}c^2\phi^+\phi \tag{15.5.4}$$

设

$$\begin{cases}\bar{P}_{\phi_\mu} = \gamma_\mu^+ m_0 c\phi \\ \bar{\omega}_{\phi_\mu}^+ = \gamma_\mu c\phi^+\end{cases} \tag{15.5.5}$$

将式(15.5.4)写成

$$\bar{L}_3 = \bar{\omega}_{\phi_\mu}^+ \bar{P}_{\phi_\mu} \tag{15.5.6}$$

比较式(15.5.4)和(15.5.6)，有

$$\bar{P}_{\phi_\mu} = m_0 \bar{\omega}_{\phi_\mu} = -\mathrm{j}\hbar \frac{\partial\phi}{\partial X_\mu^+} + eA_\mu \tag{15.5.7}$$

对式(15.5.6)取微分，有

$$\frac{\partial \bar{L}_3}{\partial \bar{\omega}_{\phi_\mu}^+} = \bar{P}_{\phi_\mu}, \quad \frac{\partial \bar{L}_3}{\partial \bar{P}_{\phi_\mu}} = \bar{\omega}_{\phi_\mu}^+ \tag{15.5.8}$$

满足

$$\bar{L}_3 = \bar{\omega}_{\phi_\mu}^+ \frac{\partial \bar{L}_3}{\partial \bar{\omega}_{\phi_\mu}^+} = \bar{P}_{\phi_\mu} \frac{\partial \bar{L}_3}{\partial \bar{P}_{\phi_\mu}} \tag{15.5.9}$$

按式(15.4.12)至(15.4.18)的推导过程可以导出

$$\frac{\partial L_3}{\partial (P_\mu + eA_\mu)} = \bar{\omega}_\mu^+ + \frac{e}{m_0} A_\mu^+ \tag{15.5.10}$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial X_\mu} = F_\mu^+ + e\frac{\mathrm{d}A_\mu^+}{\mathrm{d}\tau} \tag{15.5.11}$$

式(15.5.10)和(15.5.11)为 Dirac 带电粒子的四维正则方程，满足式(15.4.19)的 Lagrangian 方程。

由式(15.1.4)，在电磁场中 Dirac 粒子第二类 Lagrangian 函数也可以写作

$$L_2 = c\sqrt{(P_\mu^+ + eA_\mu^+)(P_\mu + eA_\mu)} \tag{15.5.12}$$

式(15.5.12)的算符表示为

$$\hat{H}_0 = \hat{L}_2 = c\sqrt{(\hat{P}_\mu^+ + eA_\mu^+)(\hat{P}_\mu + eA_\mu)} \tag{15.5.13}$$

将式(15.5.12)代入式(15.1.3)有

$$S = \int c\sqrt{(P_\mu^+ + eA_\mu^+)(P_\mu + eA_\mu)}\,\mathrm{d}\tau \tag{15.5.14}$$

为电磁场中 Dirac 粒子所对应的作用量方程。对式(15.5.14)取变分有

$$\delta S = \int \delta L_2 \mathrm{d}\tau = \int c\delta\sqrt{(P_\mu^+ + eA_\mu^+)(P_\mu + eA_\mu)}\,\mathrm{d}\tau \tag{15.5.15}$$

由式(15.1.8)，有

$$\delta L_2 = \frac{1}{2m_0}\delta[(P_\mu^+ + eA_\mu^+)(P_\mu + eA_\mu)] \tag{15.5.16}$$

或

$$\delta L_2 = \frac{1}{2m_0}[(P_\mu^+ + eA_\mu^+)\delta(P_\mu + eA_\mu) + \delta(P_\mu^+ + eA_\mu^+)(P_\mu + eA_\mu)] \tag{15.5.17}$$

式(15.5.17)代入式(15.5.15)，有

$$\delta S = \int \frac{1}{2m_0}[(P_\mu^+ + eA_\mu^+)\delta(P_\mu + eA_\mu) + \delta(P_\mu^+ + eA_\mu^+)(P_\mu + eA_\mu)]\mathrm{d}\tau$$

$$= \int c^2 \delta m_0 \mathrm{d}\tau = 0 \tag{15.5.18}$$

在电磁场中 Dirac 粒子的 Lagrangian 函数由式(5.1.12)可改写为

$$L_2 = \left(\bar{\omega}_\mu + \frac{e}{m_0}A_\mu\right)(P_\mu^+ + eA_\mu^+) = (P_\mu + eA_\mu)\frac{\partial L_2}{\partial(P_\mu + eA_\mu)} \tag{15.5.19}$$

有

$$(P_\mu + eA_\mu)\frac{\partial H_0}{\partial(P_\mu + eA_\mu)} - H_0 = 0 \tag{15.5.20}$$

将式(15.1.15)改为

$$\delta L_2 = \left(F_\mu^+ + e\frac{\mathrm{d}A_\mu^+}{\mathrm{d}\tau}\right)\left(\bar{\omega}_\mu + \frac{e}{m_0}A_\mu\right)\delta\tau + \left(\bar{\omega}_\mu^+ + \frac{e}{m_0}A_\mu^+\right)\left(F_\mu + e\frac{\mathrm{d}A_\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)\delta\tau \tag{15.5.21}$$

如取 $L_2 = L_2(P_\mu, P_\mu^+)$，取全微分

$$\mathrm{d}L_2 = \frac{\partial L_2}{\partial P_\mu^+}\mathrm{d}P_\mu^+ + \frac{\partial L_2}{\partial P_\mu}\mathrm{d}P_\mu = \frac{\partial L_2}{\partial P_\mu^+}F_\mu^+\mathrm{d}\tau + \frac{\partial L_2}{\partial P_\mu}F_\mu\mathrm{d}\tau \tag{15.5.22}$$

比较式(15.5.21)和(15.5.22)，在电磁场中有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_2}{\partial(P_\mu^+ + eA_\mu^+)} = \bar{\omega}_\mu + \dfrac{e}{m_0}A_\mu \\ \dfrac{\partial L_2}{\partial(P_\mu + eA_\mu)} = \bar{\omega}_\mu^+ + \dfrac{e}{m_0}A_\mu^+ \end{cases} \tag{15.5.23}$$

如取 $L_2 = L_2(X_\mu, X_\mu^+)$，取微分

$$\delta L_2 = \frac{\partial L_2}{\partial X_\mu^+}\delta X_\mu^+ + \frac{\partial L_2}{\partial X_\mu}\delta X_\mu = \frac{\partial L_2}{\partial X_\mu^+}\bar{\omega}_\mu^+\delta\tau + \frac{\partial L_2}{\partial X_\mu}\bar{\omega}_\mu\delta\tau \tag{15.5.24}$$

比较式(15.5.21)和(15.5.24)，在电磁场中有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_2}{\partial X_\mu^+} = F_\mu + e\dfrac{\mathrm{d}A_\mu}{\mathrm{d}\tau} \\ \dfrac{\partial L_2}{\partial X_\mu} = F_\mu^+ + e\dfrac{\mathrm{d}A_\mu^+}{\mathrm{d}\tau} \end{cases} \tag{15.5.25}$$

式(15.5.23)和(15.5.25)称为电磁场中 Dirac 粒子四维正则方程。由式(15.5.23)和(15.5.25)可给出式(15.1.20)的四维双曲型 Lagrangian 方程。

15.6　标量粒子的作用量方程

1. 复标量粒子

介子等标量粒子的运动方程为 Klein-Gordon 方程，满足关系式(13.3.4)或(13.3.6)。由式(13.3.1)和(13.3.4)也可以写成

$$\left(\hbar^2 \frac{\partial}{\partial X_\mu^+} \frac{\partial}{\partial X_\mu} + m_0^2 c^2\right)\psi = 0 \tag{15.6.1}$$

在 Minkowski 复空间中如将介子看做由正、反 Dirac 粒子耦合的复合粒子。标量粒子的态函数 ψ 可看做是复数，则式(15.6.1)为复 Klein-Gordon 方程。由式(15.4.6)取 $L_3 = L_2\psi = m_0 c^2 \psi, L_3^+ = m_0 c^2 \psi^+$。由式(13.3.1)和(13.3.2)，复标量粒子的Lagrangian 函数可写作

$$L_k = c^2 P_\mu \psi P_\mu^+ \psi^+ = -\hbar^2 c^2 \frac{\partial \psi}{\partial X_\mu^+} \frac{\partial \psi^+}{\partial X_\mu} = m_0^2 c^4 \psi^+ \psi \tag{15.6.2}$$

有

$$\frac{\partial L_k}{\partial\left(\frac{\partial \psi}{\partial X_\mu^+}\right)} = -\hbar^2 c^2 \frac{\partial \psi^+}{\partial X_\mu}, \quad \frac{\partial L_k}{\partial\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial X_\mu}\right)} = -\hbar^2 c^2 \frac{\partial \psi}{\partial X_\mu^+} \tag{15.6.3}$$

$$\frac{\partial L_k}{\partial \psi} = m_0^2 c^4 \psi^+, \quad \frac{\partial L_k}{\partial \psi^+} = m_0^2 c^2 \psi \tag{15.6.4}$$

式(15.6.3)和(15.6.4)满足 Lagrangian 方程

$$\frac{\partial}{\partial X_\mu}\left[\frac{\partial L_k}{\partial\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial X_\mu}\right)}\right] - \frac{\partial L_k}{\partial \psi^+} = 0 \tag{15.6.5}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial X_\mu^+}\left[\frac{\partial L_k}{\partial\left(\frac{\partial \psi}{\partial X_\mu^+}\right)}\right] - \frac{\partial L_k}{\partial \psi} = 0 \tag{15.6.6}$$

将式(15.6.3)和(15.6.4)代入式(15.6.5)或(15.6.6)，与式(15.6.1)相同。由式(15.4.6)和(15.6.2)，取

$$L_k = L_3^+ L_3 = m_0^2 c^4 \psi^+ \psi \tag{15.6.7}$$

由式(15.4.3)可以将式(15.6.7)分写为

$$P_k = P_{\psi\mu}^+ P_{\psi\mu} = m_0^2 c^2 \psi, \quad V_k^+ = \bar{\omega}_{\psi\mu}^+ \bar{\omega}_{\psi\mu} = c^2 \psi^+ \tag{15.6.8}$$

则

$$L_k = V_k^+ P_k \tag{15.6.9}$$

取微分，有

$$\frac{\partial L_k}{\partial V_k^+} = P_k, \quad \frac{\partial L_k}{\partial P_k} = V_k^+ \tag{15.6.10}$$

由式(15.6.2)，L_k 是守恒量或不变量，也可取为粒子的 Hamilton 量 $L_k = H_{0k}$。有关系

$$\frac{\partial H_{0k}}{\partial P_k} - H_{0k} = 0 \tag{15.6.11}$$

2. 实标量粒子

取 $\psi = \phi^+ \phi = \psi^+$ 为实标量粒子的态函数，是由旋量粒子态函数的几率密度构成。式(15.6.2)可以改写成

$$L_k = \frac{1}{2}c^2 (P_\mu \psi)^2 = -\frac{1}{2}\hbar^2 c^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial X_\mu}\right)^2 = \frac{1}{2}m_0^2 c^4 \psi^2 \tag{15.6.12}$$

满足关系

$$\frac{\partial L_k}{\partial\left(\frac{\partial \psi}{\partial X_\mu}\right)} = -\hbar^2 c^2 \frac{\partial \psi}{\partial X_\mu}, \quad \frac{\partial L_k}{\partial \psi} = m_0^2 c^4 \psi \tag{15.6.13}$$

对应的 Lagrangian 方程为

$$\frac{\partial}{\partial X_\mu^+}\left[\frac{\partial L_k}{\partial\left(\frac{\partial \psi}{\partial X_\mu}\right)}\right] - \frac{\partial L_k}{\partial \psi} = 0 \tag{15.6.14}$$

式(15.6.13)代入式(15.6.14)，满足式(15.6.1)。式(15.6.7)可以改写成

$$L_k = \frac{1}{2}L_3^2 = \frac{1}{2}m_0^2 c^4 \psi^2 \tag{15.6.15}$$

取

$$P_k = m_0^2 c^2 \psi, \quad V_k = c^2 \psi, \quad L_k = V_k P_k \tag{15.6.16}$$

有

$$\frac{\partial L_k}{\partial V_k} = P_k, \quad \frac{\partial L_k}{\partial P_k} = V_k \tag{15.6.17}$$

满足式(15.6.11)。

第十六章　Yang-Mills 方程和 Maxwell 方程的几何表述

Minkowski 动量空间具有物质性，实物粒子与类光粒子之间相互耦合产生质量间隙并与真空中场的能量发生相互转换。正、反粒子的运动规律用 Dirac 旋量方程表述，正、反粒子的产生和湮灭使实物粒子和场之间发生了质能转变。Dirac 方程与场方程之间应存在深层次的逻辑关联，在四维 Minkowski 动量空间可用 Feynman 图表示。在场论中，Yang-Mills 方程和 Maxwell 方程是重要的场方程，两者都能表示正、反 Dirac 粒子与类光粒子的耦合关系，找出两者的联系可能对相对论量子力学和场论带来重要影响。在 Minkowski 复空间以及广域 Hilbert 相空间中，通过数学运算规则从正、反 Dirac 旋量方程入手，导出带有质量项的 Yang-Mills 方程和 Maxwell 方程，为相对论量子力学和场论的几何关联奠定了理论基础。

16.1　带质量项的 Yang-Mills 方程

四维 Minkowski 动量空间中沿平行或垂直类光区的连线方向取两个非质点相格 μ 和 ν，可写出相应的正、反粒子 Dirac 旋量方程

$$\begin{cases}\gamma_\mu\left(\hat{P}_\mu+\dfrac{1}{e}A_\mu\right)\phi_\mu=\gamma_\mu\left(-\mathrm{j}\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial X_\mu^+}+\dfrac{1}{e}A_\mu\right)\phi_\mu=cm_{\mu0}\phi_\mu\\ \gamma_\mu^+\left(\hat{P}_\mu^++\dfrac{1}{e}A_\mu^+\right)\phi_\mu^+=\gamma_\mu^+\left(\mathrm{j}\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial X_\mu}+\dfrac{1}{e}A_\mu^+\right)\phi_\mu^+=cm_{\mu0}\phi_\mu^+\end{cases}\tag{16.1.1}$$

$$\begin{cases}\gamma_\nu\left(\hat{P}_\nu+\dfrac{1}{e}A_\nu\right)\phi_\nu=\gamma_\nu\left(-\mathrm{j}\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial X_\nu^+}+\dfrac{1}{e}A_\nu\right)\phi_\nu=cm_{\nu0}\phi_\nu\\ \gamma_\nu^+\left(\hat{P}_\nu^++\dfrac{1}{e}A_\nu^+\right)\phi_\nu^+=\gamma_\nu^+\left(\mathrm{j}\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial X_\nu}+\dfrac{1}{e}A_\nu^+\right)\phi_\nu^+=cm_{\nu0}\phi_\nu^+\end{cases}\tag{16.1.2}$$

如相格 μ 和 ν 用光信号联系，由式(8.5.15)满足条件 $\phi_\mu=\phi_\nu=\phi$。Klein-Gordon 方程(13.3.6)为介子所对应的运动方程，是由正、反粒子 Dirac 旋量方程取内积而得到的。对式(16.1.1)和(16.1.2)取交叉内积运算，满足关系

$$\left[\gamma_\nu^+\left(\hat{P}_\nu^++\frac{1}{e}A_\nu^+\right)\phi^+\right]\left[\gamma_\mu\left(\hat{P}_\mu+\frac{1}{e}A_\mu\right)\phi\right]=c^2m_{\nu0}m_{\mu0}\phi^+\phi\tag{16.1.3}$$

$$\left[\gamma_\mu^+\left(\hat{P}_\mu^++\frac{1}{e}A_\mu^+\right)\phi^+\right]\left[\gamma_\nu\left(\hat{P}_\nu+\frac{1}{e}A_\nu\right)\phi\right]=c^2m_{\mu0}m_{\nu0}\phi^+\phi\tag{16.1.4}$$

式(16.1.3)和(16.1.4)是正、反 Dirac 粒子旋量方程的乘积，类同于 Klein-Gordon 方程(13.3.4)，其中 $\psi=\phi^+\phi$ 为介子的态函数，静止质量满足交换关系 $m_{\mu0}m_{\nu0}=m_{\nu0}m_{\mu0}$。因为

$$\gamma_\nu\hat{P}_\nu=-\gamma_\nu^+\hat{P}_\nu^+,\quad \gamma_\nu^+A_\nu^+=\gamma_\nu A_\nu \tag{16.1.5}$$

将式(16.1.3)和(16.1.4)相减并取积分，对带电粒子有

$$\begin{aligned}0&=\int_\mu^\nu(m_{\mu0}m_{\nu0}-m_{\nu0}m_{\mu0})\phi^+\phi c^2\mathrm{d}\tau\\&=\int_\mu^\nu\Big\{\Big[\Big(\hat{P}_\mu^++\frac{1}{e}A_\mu^+\Big)\phi^+\gamma_\mu^+\Big]\Big[\gamma_\nu\Big(\hat{P}_\nu+\frac{1}{e}A_\nu\Big)\phi\Big]-\Big[\Big(\hat{P}_\nu^++\frac{1}{e}A_\nu^+\Big)\phi^+\gamma_\nu^+\Big]\\&\quad\Big[\gamma_\mu\Big(\hat{P}_\mu+\frac{1}{e}A_\mu\Big)\phi\Big]\Big\}\mathrm{d}\tau=\int_\mu^\nu\Big[\Big(\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu}+\frac{1}{e}A_\mu^+\Big)\phi^+\Big]\Big[\Big(-\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\nu^+}+\frac{1}{e}A_\nu\Big)\phi\Big]\\&\quad-\Big[\Big(\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\nu}+\frac{1}{e}A_\nu^+\Big)\phi^+\Big]\Big[\Big(-\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu^+}+\frac{1}{e}A_\mu\Big)\phi\Big]\mathrm{d}\tau\\&=\int_\mu^\nu\Big[\hbar^2\Big(\frac{\partial\phi^+}{\partial X_\nu}\frac{\partial\phi}{\partial X_\mu^+}-\frac{\partial\phi^+}{\partial X_\mu}\frac{\partial\phi}{\partial X_\nu^+}\Big)-\mathrm{j}\frac{\hbar}{e}\Big(\frac{\partial\phi^+}{\partial X_\nu}A_\mu\phi-\frac{\partial\phi^+}{\partial X_\mu}A_\nu\phi\Big)\\&\quad+\frac{1}{e^2}(A_\mu^+A_\nu-A_\nu^+A_\mu)\phi^+\phi+\mathrm{j}\frac{\hbar}{e}\Big(A_\nu^+\phi^+\frac{\partial\phi}{\partial X_\mu^+}-A_\mu^+\phi^+\frac{\partial\phi}{\partial X_\nu^+}\Big)\Big]\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{16.1.6}$$

式(16.1.6)为四个正、反 Dirac 粒子波动方程的关联式。因为对复合函数微分满足

$$\frac{\partial(A_\nu\phi^+\phi)}{\partial X_\mu}=\frac{\partial(\phi^+\phi A_\nu)}{\partial X_\mu}=A_\nu\phi^+\frac{\partial\phi}{\partial X_\mu}+\frac{\partial\phi^+}{\partial X_\mu}A_\nu\phi+\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu}\phi^+\phi \tag{16.1.7}$$

则

$$\begin{cases}A_\nu\phi^+\dfrac{\partial\phi}{\partial X_\mu}+\dfrac{\partial\phi^+}{\partial X_\mu}A_\nu\phi=\dfrac{\partial(A_\nu\phi^+\phi)}{\partial X_\mu}-\dfrac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu}\phi^+\phi\\A_\nu^+\dfrac{\partial}{\partial X_\mu^+}=A_\nu\dfrac{\partial}{\partial X_\mu}\end{cases}\tag{16.1.8}$$

将式(16.1.8)代入式(16.1.6)，有

$$\begin{aligned}&\int_\mu^\nu\Big[\hbar^2\Big(\frac{\partial\phi^+}{\partial X_\nu}\frac{\partial\phi}{\partial X_\mu^+}-\frac{\partial\phi^+}{\partial X_\mu}\frac{\partial\phi}{\partial X_\nu^+}\Big)+\mathrm{j}\frac{\hbar}{e}\Big(\frac{\partial(A_\nu\phi^+\phi)}{\partial X_\mu}-\frac{\partial(A_\mu\phi^+\phi)}{\partial X_\nu}\Big)\Big]\mathrm{d}\tau\\&+\int_\mu^\nu\Big[\mathrm{j}\frac{\hbar}{e}\Big(\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu}\Big)+\frac{1}{e^2}(A_\mu^+A_\nu-A_\nu^+A_\mu)\Big]\phi^+\phi\mathrm{d}\tau=0\end{aligned}\tag{16.1.9}$$

将式(16.1.1)的第一式乘以 $\phi^+\gamma_\mu^+$，并对 X_ν 偏微分，有

$$-\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\nu}\Big(\phi^+\frac{\partial\phi}{\partial X_\mu^+}\Big)+\frac{1}{e}\frac{\partial(A_\mu\phi^+\phi)}{\partial X_\nu}=c\frac{\partial(m_{\mu0}\phi^+\gamma_\mu^+\phi)}{\partial X_\nu}\tag{16.1.10}$$

式(16.1.2)的第一式乘以 $\phi^+\gamma_\nu^+$，并对 X_μ^+ 偏微分，有

$$-\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu}\left(\phi^+\frac{\partial\phi}{\partial X_\nu^+}\right)+\frac{1}{e}\frac{\partial(A_\nu\phi^+\phi)}{\partial X_\mu}=c\frac{\partial(m_\nu\phi^+\gamma_\nu^+\phi)}{\partial X_\mu}\tag{16.1.11}$$

将式(16.1.10)和(16.1.11)相减，有

$$-\frac{1}{e}\left[\frac{\partial(A_\mu\phi^+\phi)}{\partial X_\nu}-\frac{\partial(A_\nu\phi^+\phi)}{\partial X_\mu}\right]+\mathrm{j}\hbar\left[\frac{\partial}{\partial X_\nu}\left(\phi^+\frac{\partial\phi}{\partial X_\mu^+}\right)-\frac{\partial}{\partial X_\mu}\left(\phi^+\frac{\partial\phi}{\partial X_\nu^+}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{c}\left(\gamma_\nu^+\frac{\partial E_{\nu0}}{\partial X_\mu}-\gamma_\mu^+\frac{\partial E_{\mu0}}{\partial X_\nu}\right)\phi^+\phi\tag{16.1.12}$$

因为 $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial X_\mu^+\partial X_\nu}=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial X_\nu^+\partial X_\mu}$，有

$$\frac{\partial}{\partial X_\nu}\left(\phi^+\frac{\partial\phi}{\partial X_\mu^+}\right)-\frac{\partial}{\partial X_\mu}\left(\phi^+\frac{\partial\phi}{\partial X_\nu^+}\right)=\frac{\partial\phi^+}{\partial X_\nu}\frac{\partial\phi}{\partial X_\mu^+}-\frac{\partial\phi^+}{\partial X_\mu}\frac{\partial\phi}{\partial X_\nu^+}\tag{16.1.13}$$

将式(16.1.12)和(16.1.13)代入式(16.1.9)，有

$$\int_\mu^\nu\left[\frac{1}{e^2}(A_\nu^+A_\mu-A_\mu^+A_\nu)+\mathrm{j}\frac{\hbar}{e}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right)\right]\phi^+\phi\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_\mu^\nu\mathrm{j}\frac{\hbar}{c}\left(\gamma_\nu^+\frac{\partial E_{\nu0}}{\partial X_\mu}-\gamma_\mu^+\frac{\partial E_{\mu0}}{\partial X_\nu}\right)]\phi^+\phi\mathrm{d}\tau\tag{16.1.14}$$

利用 δ 函数积分，式(16.1.14)可以写成微分形式

$$\mathrm{j}e\hbar\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right)-(A_\mu^+A_\nu-A_\nu^+A_\mu)=\frac{\mathrm{j}\hbar e^2}{c}\left(\gamma_\nu^+\frac{\partial E_{\nu0}}{\partial X_\mu}-\gamma_\mu^+\frac{\partial E_{\mu0}}{\partial X_\nu}\right)\tag{16.1.15}$$

式(16.1.15)可看做双曲 Minkowski 空间的一般 Yang-Mills 方程，它右边带有的静能或静止质量的差值项为静能间隙或质量间隙。因为式(16.1.10)和(16.1.11)是正、反 Dirac 粒子在 Minkowski 动量空间相互耦合的方程，它将正、反粒子间的质量间隙和真空的联系用类时区与类光区的几何关联表示出来，为带质量项的 Yang-Mills 方程提供了一种几何解释。取

$$F'_{\mu\nu}=\mathrm{j}e\hbar\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right)-(A_\mu^+A_\nu-A_\nu^+A_\mu)\tag{16.1.16}$$

式(16.1.16)并没有给出式(16.1.15)右边包含电磁质量与能量转变的关系。如果方程组(16.1.1)的第一式写成

$$\gamma_\mu(\hat{P}_\mu+eA_\mu)\phi_\mu=\gamma_\mu\left(-\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu^+}+eA_\mu\right)\phi_\mu=cm_{\mu0}\phi_\mu\tag{16.1.17}$$

则式(16.1.16)可改写为

$$F'_{\mu\nu}=\mathrm{j}e\hbar\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu^+}-\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu^+}\right)+e^2(A_\mu^+A_\nu-A_\nu^+A_\mu)\tag{16.1.18}$$

式(16.1.18)类同于传统形式的 Yang-Mills 方程。

式(16.1.15)中 $\dfrac{\partial E_{\mu0}}{\partial X_\nu}$ 和 $\dfrac{\partial E_{\nu0}}{\partial X_\mu}$ 分别为 P_μ 及 P_ν 两点在与光量子耦合中静能的改变量。由式(14.2.8)，取

$$\begin{cases}\delta E_{\nu0} = E_{\nu0} - E_{\mu0} = \dfrac{\partial E_{\nu0}}{\partial X_\mu}\delta X_\mu = 2\delta m_0 c^2 \\ \delta E_{\mu0} = E_{\mu0} - E_{\nu0} = \dfrac{\partial E_{\mu0}}{\partial X_\nu}\delta X_\nu = -2\delta m_0 c^2\end{cases} \tag{16.1.19}$$

式(16.1.19)表示进行量子跃迁的实物粒子，其能量差值与耦合光量子的能量有关。将式(16.1.19)代入式(16.1.15)，有

$$F'_{\mu\nu} = \mathrm{j}e\hbar\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right) - (A_\mu^+ A_\nu - A_\nu^+ A_\mu) = 2\mathrm{j}\hbar e^2 c\delta m_0\left(\frac{\gamma_\nu^+}{\delta X_\mu} + \frac{\gamma_\mu^+}{\delta X_\nu}\right) \tag{16.1.20}$$

式(16.1.20)为正、反粒子耦合激发光量子以及电磁质量与能量发生相互转化时所对应的带质量项的 Yang-MilLs 方程，显然与质量间隙有关。式(16.1.20)左边第一项与电磁相互有关，第二项可能与弱相互作用有关。

16.2 强相互作用和电磁相互作用的统一方程

对式(16.1.14)取变分，有

$$\int_\mu^\nu \delta\left[(A_\nu^+ A_\mu - A_\mu^+ A_\nu) + \mathrm{j}e\hbar\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right)\right]\phi^+ \phi \mathrm{d}\tau = \int_\mu^\nu \frac{\mathrm{j}\hbar e^2}{c}\delta\left(J_\nu^+ \frac{\partial E_{\nu0}}{\partial X_\mu} - J_\mu^+ \frac{\partial E_{\mu0}}{\partial X_\nu}\right)\mathrm{d}\tau \tag{16.2.1}$$

式(16.2.1)左边的积分利用 δ 函数，右边的微分和积分相互抵消，可写成微分关系式

$$\delta\left[(A_\nu^+ A_\mu - A_\mu^+ A_\nu) + \mathrm{j}e\hbar\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right)\right] = \frac{\mathrm{j}\hbar e^2}{c}\left(J_\nu^+ \frac{\partial E_{\nu0}}{\partial X_\mu} - J_\mu^+ \frac{\partial E_{\mu0}}{\partial X_\nu}\right) \tag{16.2.2}$$

对式(16.2.2)左边分别取 X_μ 和 X_ν 的变分，并注意到式(16.1.20)，有

$$\begin{aligned}&\mathrm{j}e\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right)\delta X_\mu + \mathrm{j}e\hbar\frac{\partial}{\partial X_\nu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right)\delta X_\nu \\ &- \frac{\partial}{\partial X_\mu}(A_\mu^+ A_\nu - A_\nu^+ A_\mu)\delta X_\mu - \frac{\partial}{\partial X_\nu}(A_\mu^+ A_\nu - A_\nu^+ A_\mu)\delta X_\nu \\ =& 2\mathrm{j}\hbar e^2 c\delta m_0\left(\frac{J_\nu^+}{\delta X_\mu} + \frac{J_\mu^+}{\delta X_\nu}\right)\end{aligned} \tag{16.2.3}$$

由于四维时空的时间流动性，在类时间隔中不同的空间分量不可能对应相同的时间分量，式(16.2.3)应满足规范条件

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\mu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial X_\nu} = 0 \tag{16.2.4}$$

对于变分 δX_μ 和 δX_ν，式(16.2.3)可分写成

$$\mathrm{j}e\hbar \frac{\partial}{\partial X_\mu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right) - \frac{\partial}{\partial X_\mu}(A_\mu^+ A_\nu - A_\nu^+ A_\mu) = \mathrm{j}\frac{2\hbar c e^2 \delta m_0}{\delta X_\mu \delta X_\mu} J_\nu^+ \tag{16.2.5}$$

$$\mathrm{j}e\hbar \frac{\partial}{\partial X_\nu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right) - \frac{\partial}{\partial X_\nu}(A_\mu^+ A_\nu - A_\nu^+ A_\mu) = \mathrm{j}\frac{2\hbar c e^2 \delta m_0}{\delta X_\nu \delta X_\nu} J_\mu^+ \tag{16.2.6}$$

将式(16.2.6)中 μ 和 ν 互换，有

$$\mathrm{j}e\hbar \frac{\partial}{\partial X_\mu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right) - \frac{\partial}{\partial X_\mu}(A_\mu^+ A_\nu - A_\nu^+ A_\mu) = -\mathrm{j}\frac{2\hbar c e^2 \delta m_0}{\delta X_\mu \delta X_\mu} J_\nu^+ \tag{16.2.7}$$

式(16.2.5)和(16.2.7)可合写成

$$\mathrm{j}e\hbar \frac{\partial}{\partial X_\mu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right) - \frac{\partial}{\partial X_\mu}(A_\mu^+ A_\nu - A_\nu^+ A_\mu) = \pm\mathrm{j}\frac{2\hbar c e^2 \delta m_0}{\delta X_\mu \delta X_\mu} J_\nu^+ \tag{16.2.8}$$

式(16.2.8)表示两种不同的正、反粒子所形成的四维几率流密度方向相反。或可看做式(16.2.5)和(16.2.6)右边的四维几率流密度方向相同，而左边正、反粒子形成的电磁场变化方向相反。

式(16.2.5)至(16.2.8)左边第二项可能与强相互作用有关。当不考虑式(16.2.8)的左边第一项时，可改写为

$$\frac{\partial}{\partial X_\mu}(A_\nu^+ A_\mu - A_\mu^+ A_\nu)\delta X_\mu \delta X_\mu = \pm \mathrm{j}2\hbar c e^2 \delta m_0 J_\nu^+ \tag{16.2.9}$$

式(16.2.9)可能为强相互作用方程，而式(16.2.8)为强相互作用和电磁相互作用的统一方程。

当不考虑式(16.2.5)的左边第二项时，对应正、反电子与电磁场的耦合关系，可写成

$$\frac{\partial}{\partial X_\mu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right)\delta X_\mu \delta X_\mu = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial X_\mu}\delta X_\mu \delta X_\mu = \pm 2ce\delta m_0 J_\nu^+ \tag{16.2.10}$$

其中反对称矩阵张量

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu} \tag{16.2.11}$$

将式(16.2.10)中 $\delta X_\mu \delta X_\mu$ 看做 μ 和 ν 的时空间隔不变量，当取

$$\delta X_\mu \delta X_\mu = \frac{\lambda^2}{4} \tag{16.2.12}$$

代入式(16.2.10)，有

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial X_\mu} = \pm \frac{8ce\delta m_0}{\lambda^2} J_\nu^+ \tag{16.2.13}$$

如果是正、反电子对湮灭产生电磁场，取 $\delta m_0 = m_e$ 为电子静止质量，$\lambda = \lambda_c$ 为 Compton 波长，$c^2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$，式(16.2.13)可改写成

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial X_\mu} = \pm \frac{8c^2 m_e \varepsilon_0}{\lambda_c^2} ec\mu_0 J_\nu^+ \tag{16.2.14}$$

式(16.2.14)可看做与质量有关的电磁场方程，或者为正、反电子产生或湮灭时与电磁场的质能转换关系。满足

$$\frac{8c^2 m_e \varepsilon_0}{\lambda_c^2} = \frac{8\times 9.109\times 10^{-31}\times 3^2\times 10^{16}\times 8.854\times 10^{-12}}{2.426^2\times 10^{-24}} = 0.987 \approx 1 \tag{16.2.15}$$

令

$$ecJ_\nu = I_\nu, \quad I_\nu = \mathrm{j}\vec{I} + c\rho \tag{16.2.16}$$

其中，I_ν 为四维电流密度，$\rho = eJ_4$ 为电荷密度，$\vec{I} = ec\vec{J}$ 为电流密度。式(16.2.14)可改写成

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial X_\mu} = \pm \mu_0 I_\nu^+ \tag{16.2.17}$$

式(16.2.17)为四维 Maxwell 方程。方程左边表示电磁场的变化，右边 I_ν^+ 为四维电流密度。但式(16.2.17)为式(16.2.8)的特例，因为式(16.2.8)不仅包含电磁场相互作用，也包含强相互作用。两者的关联可能更能体现正、反粒子的相互耦合状况。

16.3　Maxwell 方程组

四维 Maxwell 方程(16.2.17)可分写成 Maxwell 方程组。因为反对称矩阵张量式(16.2.11)满足 $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$，为四维矢势 A_μ 的旋度。$F_{\mu\nu}$ 的反对称矩阵形式可写成

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & \mathrm{j}\frac{1}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & \mathrm{j}\frac{1}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & \mathrm{j}\frac{1}{c}E_3 \\ -\mathrm{j}\frac{1}{c}E_1 & -\mathrm{j}\frac{1}{c}E_2 & -\mathrm{j}\frac{1}{c}E_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{16.3.1}$$

其中，

$$E_i = -\mathrm{j}c\left(\frac{\partial A_i}{\partial X_4} - \frac{\partial A_4}{\partial X_i}\right), \quad i = 1,2,3 \tag{16.3.2}$$

$$B_i = \frac{\partial A_k}{\partial X_j} - \frac{\partial A_j}{\partial X_k},\quad i,j,k = 1,2,3 \tag{16.3.3}$$

式(16.2.17)为 Maxwell 方程中第一和第四两个方程

$$\begin{cases} \nabla\cdot \vec{D} = \pm\rho \\ \nabla\times \vec{H} - \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \pm \vec{I} \end{cases} \tag{16.3.4}$$

其中，$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$。由式(16.2.11)满足关系式

$$\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial X_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial X_\nu} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial X_\lambda} = 0 \tag{16.3.5}$$

式(16.3.5)可分写成

$$\begin{cases} \nabla\cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla\times \vec{E} + \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{cases} \tag{16.3.6}$$

式(16.3.6)为 Maxwell 方程的第二和第三两个方程。

例 16.1　由式(16.2.17)证明式(16.3.4)。

当式(16.2.17)中下脚标取 $\nu = 1$，注意到式(16.3.1)至(16.3.3)，有

$$\pm \mathrm{j}\mu_0 I_1 = \frac{\partial}{\partial X_\mu} F_{\mu 1}$$

取正号时，展开上式，

$$\mathrm{j}\mu_0 I_1 = -\mathrm{j}\left(\frac{\partial F_{21}}{\partial X_2} + \frac{\partial F_{31}}{\partial X_3}\right) + \frac{\partial F_{41}}{\partial X_4} = -\mathrm{j}\left(\frac{\partial B_2}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial y}\right) - \mathrm{j}\,\frac{1}{c}\,\frac{\partial E_1}{\partial (ct)}$$

则

$$\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial E_1}{\partial t} = \mu_0 I_1$$

或

$$\frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{\partial D_1}{\partial t} = I_1$$

同理，$\nu = 2,3$ 时对应另两个分量方程，所以可证得式(16.3.4)的第二式成立。

式(16.2.17)中如取 $\nu = 4$ 时，有

$$\begin{aligned} -\mu_0 c\varphi &= \frac{\partial F_{\mu 4}}{\partial X_\mu} = -\mathrm{j}\left(\frac{\partial F_{14}}{\partial X_1} + \frac{\partial F_{24}}{\partial X_2} + \frac{\partial F_{34}}{\partial X_3}\right) \\ &= -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}\right) = -\frac{1}{c}\,\nabla\cdot \vec{E} \end{aligned}$$

满足 $\nabla\cdot \vec{D} = \rho$，则式(16.3.4)第一式得证。

例 16.2　由式(16.3.5)证明式(16.3.6)。

对式(16.3.5)中 μ,ν,λ 取 1,2,3，而不取 4 时，例取 $\mu = 2, \nu = 3, \lambda = 1$，有

$$\mathrm{j}\left(\frac{\partial F_{23}}{\partial X_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial X_2}+\frac{\partial F_{12}}{\partial X_3}\right)=\mathrm{j}\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}+\frac{\partial B_3}{\partial z}\right)=\mathrm{j}\,\nabla\cdot\vec{B}=0$$

为式(16.3.6)的第二式。当 μ,ν,λ 中有一个取为 4 时，例 $\mu=2,\nu=4,\lambda=1$ 时，有

$$\mathrm{j}\left(\frac{\partial F_{24}}{\partial X_1}+\frac{\partial F_{41}}{\partial X_2}\right)+\frac{\partial F_{12}}{\partial X_4}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_2}{\partial x}-\frac{\partial E_1}{\partial y}\right)+\frac{1}{c}\frac{\partial B_3}{\partial t}=0$$

为式(16.3.6)第一式中的一个分量，将各分量组可合成式(16.3.6)的第一式。

16.4　Minkowski 复空间的 Feynman 图

利用正、反 Dirac 粒子的旋量方程和 Klein-Gordon 方程推导出 Yang-Mills 方程和 Maxwell 方程，使在 Minkowski 复空间从运动微分方程的角度建立了有静止质量粒子与电磁场的几何关联。正、反 Dirac 粒子处于相互厄米共轭的类时区中，它们之间的产生和湮灭与类光区的 Maxwell 场相关联，讨论类时区与类光区的几何联系就可画出与 Minkowski 复空间奇异性质相联系的 Feynman 图。

在 Minkowski 复空间的类时区中，两物理事件的类光间隔使这两个有静质量的微观客体通过光信号发生了因果联系。也就是说，两物理事件在相互交换类光粒子时产生了质量和能量的转换。在四维双曲动量空间，$H(E,\mathrm{j}\vec{p})$ 取四维动量 P_μ 和 P_ν，因 Minkowski 复空间的方向奇异性，当 P_μ 和 P_ν 为四维双曲动量空间同一类时区不同的时空点时，过 P_μ 及 P_ν 两点的直线平行或垂直于类光区 Ξ，满足式(14.2.3)。其中，四维动量坐标 P_μ 和 $-P_\nu$ 的微分方程可看做与式(14.1.2)相对应的正、反 Dirac 粒子，而式(14.2.3)为式(14.1.2)中正、反粒子对应的 Dirac 旋量方程的直和。第十三章已经分析，如果 P_μ 位于 Minkowski 复空间中第一象限(如 C_1 区)，则 $-P_\nu$ 位于第三象限(如 C_5 区)，复数的直和可看做同一象限(如 C_1 区)中两个复数的减法。$d'\vartheta_0$ 与光量子相关联，式(14.2.3)是 Minkowski 复空间中给出的有静质量的正、反粒子与光量子的耦合关系，它使正、反粒子的产生与湮灭以及与光量子耦合在 Minkowski 复空间中给出了一种几何诠释。

方程(16.2.17)是 Maxwell 方程的一般形式，满足式(16.2.15)的条件。正、反粒子耦合时要发生质能转变，而激发的电磁场伴随着粒子的产生和湮灭而发生变化，式(16.2.15)看做粒子质量和电磁场能量相互转换的等量关系式。在 Minkowski 复空间，式(16.2.17)是由四个正、反粒子 Dirac 旋量方程导出的，Maxwell 方程与正、反 Dirac 粒子的几何关联使在四维 Minkowski 复空间中可以引入 Feynman 图。

如果将 X_μ 看做正粒子位于类时区的时空点，在动量空间中质量算符 $\hat{m}_\mu(\hat{P}_\mu)\Rightarrow m_\mu(\mathrm{j}\vec{p},E/c)$；$-X_\nu$ 为反粒子位于类时区的时空点，质量算符 $\hat{m}_\nu^+(\hat{P}_\nu^+)\Rightarrow m_\nu^+(-\mathrm{j}\vec{p},E/c)$，式(14.1.5)为静止质量的本征方程。正粒子和反粒子的

耦合可吸收或放出光量子产生 Maxwell 电磁场，位于类光区域 Ξ，满足式(16.2.17)。图 16.1 定性地描述了正、反粒子与光量子耦合的 Feynman 图。

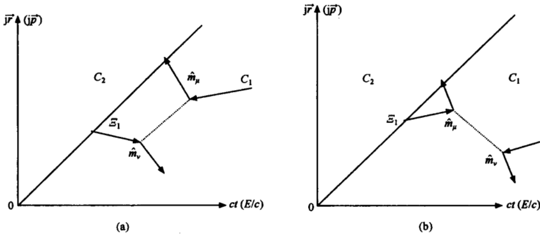


图 16.1 Minkowski 空间中的 Feynman 图

在图 16.1 中，类时区 C_1 中时空相格 μ 和 ν 的连线平行或垂直类光区 Ξ_1，分别处于分立相格 μ 和 ν 的正、反粒子发生耦合时产生 Maxwell 电磁场。式(16.2.13)应该是微观客体与电磁场耦合的关联式。方程的左边为电磁场方程，与产生的光量子有关；方程的右边与正、反 Dirac 粒子在耦合过程中静质量与能量的转变以及形成的几率流密度有关。Dirac 粒子的静质量包含了电磁质量和机械质量，其中电磁质量可以转变为电磁场能量。式(16.2.13)中右边静能改变的差值应该就是电磁质量与电磁能量的定量关联式，称为质量间隙，也是 Minkowski 复空间类时区与类光区的几何表示。所以，Feynman 图 16.1 是正、反Dirac粒子与电磁场发生质能转变的关联图。

在 Minkowski 复空间画出 Feynman 图具有重要的数学、物理及哲学意义。Minkowski 复空间抽象出广域 Hilbert 相空间的非质点相格对应正、反 Dirac 旋量粒子，而正、反粒子的相互作用生成的电磁场可用正、反 Dirac 旋量方程推导出的 Maxwell 方程来描述。传统量子场论中 Feynman 图不能与几何空间联系起来，重要原因是正、反 Dirac 粒子无法找到时空对应点。由于传统量子力学的数学基础为 Hilbert 空间，而其原空间为 Euclidean 几何。Hilbert 空间与 Minkowski 空间的错位，以及相对论量子力学中正、反 Dirac 粒子态函数难以区分，使正、反 Dirac 粒子和电磁场耦合的几何对应一直是悬而未决的问题。广域 Hilbert 相空间与 Minkowski 复空间相吻合，通过类时区与类光区的几何关联画出的 Feynman 图，赋予了正、反粒子 Dirac 旋量方程和 Maxwell 方程耦合的数学背景。在这个背景下，非欧几何、代数以及泛函分析等各分支得到和谐的联系，物理中狭义相对论、量

子力学和场论也得到了逻辑上的关联。

16.5 对 Maxwell 方程性质的分析

在 Minkowski 复空间描述正、反 Dirac 粒子与电磁场耦合应满足量子化条件，即广域 Hilbert 空间的不同分立相格决定着正、反粒子耦合的时空间隔和能量时间的不确定关系。如将式(16.2.13)写作

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial X_\mu} = \pm \frac{8c^2\varepsilon_0\delta m_0}{\lambda^2} ec\mu_0 J_\nu^+ \tag{16.5.1}$$

式(16.5.1)可看做含质量项的 Maxwell 方程。由式(16.2.15)可将式(16.5.1)变换成式(16.2.17)形式。其中式(16.2.15)满足

$$\frac{8c^2\delta m_0\varepsilon_0}{\lambda^2} = 1 \tag{16.5.2}$$

式(16.5.2)为新引入的常数，它隐含了许多新的物理含义。首先，式(16.5.2)的引入使式(16.2.17)和(16.5.1)建立了一种等价关系。如果将式(16.5.1)看做四个正、反 Dirac 粒子耦合关联式，δm_0 为电子的静止质量，则式(16.2.17)为电磁场方程。这包含了正、反电子耦合过程中静止质量与能量的转换关系，包含了正、反电子的产生和湮灭时与电磁场的联系。

其次，式(16.5.2)的引入，使 Maxwell 方程具有了时空量子化的形式，这种量子化是客观存在的，而不是由主观或人为因素进行的所谓二次量子化。Maxwell 方程的量子化与 Minkowski 复空间的方向奇异性有关，与类时区与类光区的定向关联有关。将式(16.5.2)改写为

$$2\delta m_0 c^2\varepsilon_0 = \left(\frac{\lambda_c}{2}\right)^2 \tag{16.5.3}$$

式(16.5.3)可看做正、反电子产生或湮灭时质量和能量的转换关系，也是相对论量子力学中所对应的波粒二象性。式(16.5.3)中取 Compton 波长 $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$，如设 $\delta m_0 = m_e$ 为电子的质量，$\delta E_0 = m_e c^2$ 为能量间隙，$\delta\tau$ 为时间间隔。可将 Compton 衍射效应与 Minkowski 复空间建立起几何关联。在静止参照系中取

$$\delta E_0 \delta\tau = \frac{h}{2} \tag{16.5.4}$$

式(16.5.3)也可写为

$$2\varepsilon_0 m_e \delta E_0^2 = \frac{h^2}{4} \tag{16.5.5}$$

式(16.5.4)和(16.5.5)联立，有

$$\delta\tau = \sqrt{2\varepsilon_0 m_e} \approx 3.94 \times 10^{-20}\,\mathrm{s} \tag{16.5.6}$$

如果式(16.5.3)表示正、反电子湮灭转变为电磁场的关联式，则式(16.5.6)为质能转换的时间间隔。式(16.5.4)使不确定关系、能级理论等量子力学一系列基本原理与 Maxwell 方程在广域 Hilbert 相空间中建立起一种因果联系。将式(16.5.4)改写为

$$c\delta\tau\frac{\delta E}{c}=\delta x_c\delta p_c=\frac{\hbar}{2} \tag{16.5.7}$$

式(16.5.7)为坐标改变量和动量改变量之间所遵守的量子化条件。式(16.5.5)和(16.5.7)隐含于式(16.2.17)中，说明微观客体的分立性质和量子化条件是 Maxwell 电磁场所遵守的固有性质。式(16.5.5)和(16.5.7)也可看做不确定关系的最小条件。在分立的广域 Hilbert 相空间中，将 Maxwell 方程进行量子化，满足不确定关系为

$$\begin{cases}\delta E\delta\tau\geqslant\dfrac{h}{2}\\[2ex]\delta x\delta p_x\geqslant\dfrac{h}{2}\end{cases} \tag{16.5.8}$$

或

$$\delta x\delta p_x=x_c p_c\geqslant\frac{h}{2} \tag{16.5.9}$$

式(16.5.9)中，δx 和 δp_x 为实物粒子在吸收或放出光量子前后所对应的一维空间间隔和动量间隔，x_c 和 p_c 为光量子或电磁场所对应的空间线度和动量。

16.6 椭圆型 Yang-Mills 方程和 Maxwell 方程

利用双曲复变函数可以由 Dirac 旋量方程导出 Yang-Mills 方程和 Maxwell 方程。而传统的 Minkowski 空间中由于找不到 Dirac 粒子的时空对应点，所以也画不出与时空奇异性相联系的 Feynman 图，究其原因还是椭圆虚单位与 Minkowski 空间的错位造成的。传统狭义相对论的时空间隔不变量是复时空矢量的乘积缩并，限制了复变矢量与 Minkowski 空间的几何关联，也限制了粒子和场运动方程的逻辑关联。Minkowski 空间的时空映射需要复矢量按分量写成线性多项式形式，Lorentz 变换的普遍形式也要求按多项式中各分量的交叉混合项运算。引入了 γ_μ 旋量矩阵后，Dirac 方程的协变性需要满足矩阵的乘积运算，Yang-Mills 方程和 Maxwell 方程的推导也需要 Dirac 方程间的交叉项运算。在 Minkowski 空间满足这些乘法混合项运算规则的只有双曲复数，而椭圆复数只能在 Euclidean 复空间才能满足这些乘法运算规则。

在椭圆型 Minkowski 空间引入 t'Hooft 的 γ_μ 矩阵，可以将椭圆四元数和四维算符写成线性多项式形式。但是，椭圆虚单位与 Minkowski 空间的错位关系不能

将正、反粒子与时空性质相对应，即在类时区无法确定正、反粒子的时空对应点。在不追求几何联系的情况下，可将椭圆型粒子方程作为一种数学或物理方法，按椭圆复函数形式导出相应的粒子和场的方程。由于复函数可以分解成实部和虚部组成的二元实数函数，在 Minkowski 空间中双曲复变函数和椭圆复变函数的实部和虚部组成的二元实数函数具有相同的形式，由 Dirac 旋量方程推导出的 Yang-Mills 方程和 Maxwell 方程也应有类同的结果。

由椭圆虚单位对应的 Dirac 方程可以写作

$$\gamma_\mu \hat{P}_\mu \phi = \gamma_\mu \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial X_\mu^+}\phi = cm_{\mu0}\phi \tag{16.6.1}$$

将式(16.6.1)取矩阵转置后乘式(16.6.1)，有

$$\gamma_\mu^\sim \gamma_\mu \hat{P}_\mu^\sim \hat{P}_\mu \psi = m_0^2 c^2 \psi \tag{16.6.2}$$

或

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0 \tag{16.6.3}$$

式(16.6.3)为 Klein-Gordon 方程。式(16.6.3)并不能确定是由正、反粒子方程复合而成，在 Minkowski 空间也不能给出相应的时空对应。为了推导出 Yang-Mills 方程和 Maxwell 方程，可以不追求椭圆型正、反粒子的 Dirac 方程与介子方程的复合性质。取带电粒子的 Dirac 方程可以写作

$$\gamma_\mu\left(\hat{P}_\mu + \frac{1}{e}A_\mu\right)\phi = \gamma_\mu\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu^+} + \frac{A_\mu}{e}\right)\phi = cm_{\mu0}\phi \tag{16.6.4}$$

$$\gamma_\nu\left(\hat{P}_\nu + \frac{1}{e}A_\nu\right)\phi = \gamma_\nu\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\nu^+} + \frac{A_\nu}{e}\right)\phi = cm_{\nu0}\phi \tag{16.6.5}$$

其中，

$$A_\mu = A_\mu(\mathrm{i}\vec{A}, A_4), \quad \gamma_\mu^+ A_\mu^+ = \gamma_\mu A_\mu \tag{16.6.6}$$

由式(16.6.4)和(16.6.5)构造积分方程：

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\mu^\nu (m_{\mu0}m_{\nu0} - m_{\nu0}m_{\mu0})c^2\phi^+\phi\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_\mu^\nu \left\{\left[\left(\hat{P}_\mu^+ + \frac{A_\mu^+}{e}\right)\phi^+\gamma_\mu^+\right]\left[\gamma_\nu\left(\hat{P}_\nu + \frac{A_\nu}{e}\right)\phi\right] - \left[\left(\hat{P}_\nu^+ + \frac{A_\nu^+}{e}\right)\phi^+\gamma_\nu^+\right]\left[\gamma_\mu\left(\hat{P}_\mu + \frac{A_\mu}{e}\right)\phi\right]\right\}\mathrm{d}\tau \\
&= \int_\mu^\nu \left[-\hbar^2\left(\frac{\partial\phi^+}{\partial X_\nu}\frac{\partial\phi}{\partial X_\mu^+} - \frac{\partial\phi^+}{\partial X_\mu}\frac{\partial\phi}{\partial X_\nu^+}\right) + \mathrm{i}\frac{\hbar}{e}\left(\frac{\partial\phi^+}{\partial X_\nu}A_\mu\phi - \frac{\partial\phi^+}{\partial X_\mu}A_\nu\phi\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{e^2}(A_\nu^+A_\mu - A_\mu^+A_\nu)\phi^+\phi - \mathrm{i}\frac{\hbar}{e}\left(A_\nu^+\phi^+\frac{\partial\phi}{\partial X_\mu^+} - A_\mu^+\phi^+\frac{\partial\phi}{\partial X_\nu^+}\right)\right]\mathrm{d}\tau
\end{aligned} \tag{16.6.7}$$

由式(16.1.7)和(16.1.8)，可将式(16.6.7)写为

$$\int_{\mu}^{\nu}\left[-\hbar^2\left(\frac{\partial\phi^+}{\partial X_\nu}\frac{\partial\phi}{\partial X_\mu^+}-\frac{\partial\phi^+}{\partial X_\mu}\frac{\partial\phi}{\partial X_\nu^+}\right)+\mathrm{i}\frac{\hbar}{e}\left(\frac{\partial(A_\mu\phi^+\phi)}{\partial X_\nu}-\frac{\partial(A_\nu\phi^+\phi)}{\partial X_\mu}\right)\right]\mathrm{d}\tau$$

$$-\int_{\mu}^{\nu}\left[\mathrm{i}\frac{\hbar}{e}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu}\right)+\frac{1}{e^2}(A_\nu^+A_\mu-A_\mu^+A_\nu)\right]\phi^+\phi\mathrm{d}\tau=0 \quad (16.6.8)$$

将式(16.6.4)乘以 $\phi^+\gamma_\mu^+$，并对 X_ν 偏微分，有

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\nu}\left(\phi^+\frac{\partial\phi}{\partial X_\mu^+}\right)+\frac{1}{e}\frac{\partial(A_\mu\phi^+\phi)}{\partial X_\nu}=c\frac{\partial(m_{\mu0}\phi^+\gamma_\mu^+\phi)}{\partial X_\nu} \quad (16.6.9)$$

式(16.6.5)乘以 $\phi^+\gamma_\nu^+$，并对 X_μ 偏微分，有

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu}\left(\phi^+\frac{\partial\phi}{\partial X_\nu^+}\right)+\frac{1}{e}\frac{\partial(A_\nu\phi^+\phi)}{\partial X_\mu}=c\frac{\partial(m_\nu\phi^+\gamma_\nu^+\phi)}{\partial X_\mu} \quad (16.6.10)$$

将式(16.6.9)和(16.6.10)相减，有

$$\frac{1}{e}\left[\frac{\partial(A_\mu\phi^+\phi)}{\partial X_\nu}-\frac{\partial(A_\nu\phi^+\phi)}{\partial X_\mu}\right]+\mathrm{i}\hbar\left[\frac{\partial}{\partial X_\nu}\left(\phi^+\frac{\partial\phi}{\partial X_\mu^+}\right)-\frac{\partial}{\partial X_\mu}\left(\phi^+\frac{\partial\phi}{\partial X_\nu^+}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{c}\left(\gamma_\nu^+\frac{\partial E_{\nu0}}{\partial X_\mu}-\gamma_\mu^+\frac{\partial E_{\mu0}}{\partial X_\nu}\right)\phi^+\phi \quad (16.6.11)$$

由式(16.1.13)，有

$$\int_{\mu}^{\nu}\left[\frac{1}{e^2}(A_\mu^+A_\nu-A_\nu^+A_\mu)+\mathrm{i}\frac{\hbar}{e}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right)\right]\phi^+\phi\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{\mu}^{\nu}\frac{\mathrm{i}\hbar}{c}\left(\gamma_\nu^+\frac{\partial E_{\nu0}}{\partial X_\mu}-\gamma_\mu^+\frac{\partial E_{\mu0}}{\partial X_\nu}\right)\phi^+\phi\mathrm{d}\tau \quad (16.6.12)$$

利用 δ 函数积分，式(16.6.12)可以写成微分形式

$$\mathrm{i}e\hbar\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right)+(A_\mu^+A_\nu-A_\nu^+A_\mu)=\frac{\mathrm{i}\hbar e^2}{c}\left(\gamma_\nu^+\frac{\partial E_{\nu0}}{\partial X_\mu}-\gamma_\mu^+\frac{\partial E_{\mu0}}{\partial X_\nu}\right) \quad (16.6.13)$$

或

$$\mathrm{i}e\hbar\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right)+(A_\mu^+A_\nu-A_\nu^+A_\mu)=\mathrm{i}\hbar e^2c\left(\gamma_\nu^+\frac{\partial m_{\nu0}}{\partial X_\mu}-\gamma_\mu^+\frac{\partial m_{\mu0}}{\partial X_\nu}\right) \quad (16.6.14)$$

由式(16.1.19)，有关系

$$F'_{\mu\nu}=\mathrm{i}e\hbar\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right)+(A_\mu^+A_\nu-A_\nu^+A_\mu)=2\mathrm{i}\hbar e^2c\delta m_0\left(\frac{\gamma_\nu^+}{\delta X_\mu}+\frac{\gamma_\mu^+}{\delta X_\nu}\right) \quad (16.6.15)$$

对式(16.6.12)取变分，有

$$\int_{\mu}^{\nu}\delta\left[(A_\mu^+A_\nu-A_\nu^+A_\mu)+\mathrm{i}e\hbar\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right)\right]\phi^+\phi\mathrm{d}\tau=\int_{\mu}^{\nu}\frac{\mathrm{i}\hbar e^2}{c}\delta\left(J_\nu^+\frac{\partial E_{\nu0}}{\partial X_\mu}-J_\mu^+\frac{\partial E_{\mu0}}{\partial X_\nu}\right)\mathrm{d}\tau \quad (16.6.16)$$

式(16.6.16)左边利用 δ 函数积分，右边的微分和积分相互抵消，有关系

$$\delta\left[(A_\mu^+A_\nu - A_\nu^+A_\mu) + \mathrm{i}e\hbar\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right)\right] = \frac{\mathrm{i}\hbar e^2}{c}\left(J_\mu^+\frac{\partial E_{\nu 0}}{\partial X_\mu} - J_\nu^+\frac{\partial E_{\mu 0}}{\partial X_\nu}\right) \tag{16.6.17}$$

对式(16.6.17)左边取 X_μ 和 X_ν 的变分，有

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}e\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right)\delta X_\mu + \mathrm{i}e\hbar\frac{\partial}{\partial X_\nu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right)\delta X_\nu \\ &+ \frac{\partial}{\partial X_\mu}(A_\mu^+A_\nu - A_\nu^+A_\mu)\delta X_\mu + \frac{\partial}{\partial X_\nu}(A_\mu^+A_\nu - A_\nu^+A_\mu)\delta X_\nu \\ &= 2\mathrm{i}\hbar e^2 c\,\delta m_0\left(\frac{J_\nu^+}{\delta X_\mu} + \frac{J_\mu^+}{\delta X_\nu}\right)\end{aligned} \tag{16.6.18}$$

式(16.6.18)可写成

$$\mathrm{i}e\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right) + \frac{\partial}{\partial X_\mu}(A_\mu^+A_\nu - A_\nu^+A_\mu) = \pm\frac{2\mathrm{i}\hbar e^2 c\,\delta m_0}{\delta X_\mu \delta X_\mu}J_\nu^+ \tag{16.6.19}$$

式(16.6.19)为椭圆虚单位表示的强电统一方程。

当取 $\delta X_\mu \delta X_\mu = \frac{\lambda^2}{4}$，式(16.6.19)不考虑左边第二项，有

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial X_\mu} = \pm\frac{8c^2\varepsilon_0\delta m_0}{\lambda^2}ec\mu_0 J_\nu^+ \tag{16.6.20}$$

反对称张量矩阵可写为

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_3 & B_2 & \mathrm{i}\frac{1}{c}E_1 \\ B_3 & 0 & -B_1 & \mathrm{i}\frac{1}{c}E_2 \\ -B_2 & B_1 & 0 & \mathrm{i}\frac{1}{c}E_3 \\ -\mathrm{i}\frac{1}{c}E_1 & -\mathrm{i}\frac{1}{c}E_2 & -\mathrm{i}\frac{1}{c}E_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{16.6.21}$$

其中，

$$B_i = \frac{\partial A_k}{\partial X_j} - \frac{\partial A_j}{\partial X_k}, \quad (i,j,k = 1,2,3) \tag{16.6.22}$$

$$E_i = \mathrm{i}c\left(\frac{\partial A_i}{\partial X_4} - \frac{\partial A_4}{\partial X_i}\right), \quad (i = 1,2,3) \tag{16.6.23}$$

注意到式(16.2.16)和(16.2.1)，有关系

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial X_\mu} = \pm\mu_0 I_\nu^+ \tag{16.6.24}$$

式(16.6.24)为四维 Maxwell 方程。满足 Maxwell 方程组

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\mp\rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{H}-\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\mp\vec{I}\end{cases} \tag{16.6.25}$$

第十七章　强相互作用方程

强相互作用是自然界物质四种基本作用形式之一，是微观理论重要组成部分。但是，目前量子场论和色动量子力学关于强相互作用的描述还局限在经验和半经验的唯象理论中，严格讲还没有给出具体表达强相互作用的数学关系式。Yang-Mills 方程是连接电磁作用和弱相互作用的方程式，近期人们发现它可能也与强相互作用有关。但传统的 Yang-Mills 方程本身是有缺陷的，它不包含质量项，也就不能完整地刻画粒子之间的强相互作用。在色动量子力学中，强相互作用所描述的粒子应该具有“味”和“色”的物理性质，这是检验强相互作用方程正确性的一块试金石，也为强相互作用方程限定了一个理论范畴。由双曲 Minkowski 空间的方向奇异性和复数的运算规则可以推导出 Dirac 旋量方程和 Klein-Gordon 方程，进而利用多项式的交叉运算推导出带有质量项的 Yang-Mills 方程。对 Yang-Mills 方程进行微分可得到强相互作用和电磁作用的统一方程。由于三维几率密度和非交换的矢势变化率分别具有所谓“味”和“色”的性质，为微分后的 Yang-Mills 方程包含强相互作用性质奠定了理论基础。

17.1　强电统一方程的矩阵形式

由方程(16.2.9)有

$$\frac{\partial}{\partial X_\mu}(A_\nu^+ A_\mu - A_\mu^+ A_\nu) = \pm \mathrm{j}\, \frac{2\hbar c e^2 \delta m_0}{\delta X_\mu \delta X_\mu} J_\nu^+ \tag{17.1.1}$$

式(17.1.1)可能与强相互作用有关。注意到式(16.2.12)，则式(17.1.1)可以写为

$$\frac{\partial}{\partial X_\mu}(A_\nu^+ A_\mu - A_\mu^+ A_\nu) = \pm \mathrm{j}\, \frac{8\hbar c e^2 \delta m_0}{\lambda^2} J_\nu^+ \tag{17.1.2}$$

由式(17.1.2)，令

$$G_{\mu\nu} = A_\mu^+ A_\nu - A_\nu^+ A_\mu \tag{17.1.3}$$

取

$$\begin{cases} C_k = (A_i A_j - A_j A_i), & i,j,k = 1,2,3 \\ N_i = (A_i A_4 + A_4 A_i), & i = 1,2,3 \end{cases} \tag{17.1.4}$$

则有反对称矩阵形式

$$G_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0&-C_3&C_2&-\mathrm{j}N_1\\C_3&0&-C_1&-\mathrm{j}N_2\\-C_2&C_1&0&-\mathrm{j}N_3\\\mathrm{j}N_1&\mathrm{j}N_2&\mathrm{j}N_3&0\end{bmatrix}\tag{17.1.5}$$

由式(4.5.3)取

$$E_\mu=m_0\bar{\omega}_\mu=\frac{E}{c}+\mathrm{j}\vec{p}\tag{17.1.6}$$

则由式(16.1.14)取

$$H_{\mu\nu}=\gamma_\mu^+\frac{\partial E_{\mu0}}{\partial X_\nu}-\gamma_\nu^+\frac{\partial E_{\nu0}}{\partial X_\mu}\tag{17.1.7}$$

$$M_i=-\mathrm{j}c\left(\gamma_i^+\frac{\partial E_i}{\partial X_4}-\gamma_4^+\frac{\partial E_4}{\partial X_i}\right),\quad i=1,2,3\tag{17.1.8}$$

$$D_i=\gamma_k^+\frac{\partial E_k}{\partial X_j}-\gamma_j^+\frac{\partial E_j}{\partial X_k},\quad i,j,k=1,2,3\tag{17.1.9}$$

有矩阵形式

$$H_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0&D_3&-D_2&\mathrm{j}\frac{M_1}{c}\\-D_3&0&D_1&\mathrm{j}\frac{M_2}{c}\\D_2&-D_1&0&\mathrm{j}\frac{M_3}{c}\\-\mathrm{j}\frac{M_1}{c}&-\mathrm{j}\frac{M_2}{c}&-\mathrm{j}N_3\frac{M_3}{c}&0\end{bmatrix}\tag{17.1.10}$$

由式(16.3.1)、(17.1.5)和(17.1.10)，可以将式(16.1.14)写成矩阵形式

$$\mathrm{j}e\hbar F_{\mu\nu}-G_{\mu\nu}=-\mathrm{j}\frac{\hbar e^2}{c}H_{\mu\nu}\tag{17.1.11}$$

式(17.1.11)为双曲 Minkowski 空间中一般 Yang-Mills 方程的矩阵表示。

将式(16.2.8)写成

$$\mathrm{j}e\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right)+\frac{\partial}{\partial X_\mu}(A_\nu^+A_\mu-A_\mu^+A_\nu)=\pm\mathrm{j}\frac{8\hbar ce^2\delta m_0}{\lambda^2}J_\nu^+\tag{17.1.12}$$

式(17.1.12)中 $J_\nu^+=\phi^+\gamma_\nu^+\phi$ 为四维几率流密度。由式(13.1.5)和(13.1.6)有

$$J_\nu=\phi^+\gamma_\nu\phi=\mathrm{j}J_i+J_4\tag{17.1.13}$$

满足

$$J_\nu^+J_\nu=J_\nu J_\nu^+=1\tag{17.1.14}$$

$$J_i=J_i^+,\quad J_4=J_4^+\tag{17.1.15}$$

[参照第十九章中式(19.3.4)]，式(17.1.12)也可写为矩阵形式

$$\mathrm{j}c\hbar\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial X_\mu}-\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial X_\mu}=\pm\mathrm{j}\frac{8\hbar ce^2\delta m_0}{\lambda^2}\Phi^+\gamma_\nu^+\Phi \tag{17.1.16}$$

式(17.1.16)可看做强相互作用和电磁相互作用的统一方程。

17.2　强相互作用方程

方程(17.1.16)不考虑左边第一项，可以写成

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial X_\mu}=\mp\mathrm{j}\frac{8\hbar ce^2\delta m_0}{\lambda^2}J_\nu^+ \tag{17.2.1}$$

当式(17.2.1)中下脚标取 $\nu=1$ 时，有

$$\frac{\partial G_{\mu1}}{\partial X_\mu}=\mp\mathrm{j}\frac{8\hbar ce^2\delta m_0}{\lambda^2}\phi^+\gamma_1^+\phi \tag{17.2.2}$$

由式(17.1.1)和(17.1.13)展开式(17.2.2)，有

$$\mp\mathrm{j}\frac{8\hbar ce^2\delta m_0}{\lambda^2}\phi^+\gamma_1^+\phi=\mathrm{j}\left(\frac{\partial G_{21}}{\partial y}+\frac{\partial G_{31}}{\partial z}\right)+\frac{\partial G_{41}}{\partial ct}=\mathrm{j}\left(\frac{\partial C_3}{\partial y}-\frac{\partial C_2}{\partial z}\right)+\mathrm{j}\frac{\partial N_1}{\partial(ct)} \tag{17.2.3}$$

或

$$\mp\frac{8\hbar ce^2\delta m_0}{\lambda^2}\phi^+\gamma_1^+\phi=\frac{\partial C_3}{\partial y}-\frac{\partial C_2}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial N_1}{\partial t} \tag{17.2.4}$$

同理，$\nu=2,3$ 时对应另两个分量方程。可推导式(17.2.4)所对应的矢量关系式

$$\nabla\times\vec{C}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{N}}{\partial t}=\mp\frac{8\hbar ce^2\delta m_0}{\lambda^2}\phi^+\vec{\gamma}^+\phi \tag{17.2.5}$$

其中 $\vec{\gamma}^+=\gamma_1^+\vec{n}_1+\gamma_2^+\vec{n}_2+\gamma_3^+\vec{n}_3$。由式(17.1.4)，可将式(17.2.5)写为

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{A})+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{N}}{\partial t}=\mp\frac{8\hbar ce^2\delta m_0}{\lambda^2}\phi^+\vec{\gamma}^+\phi \tag{17.2.6}$$

式(17.2.1)中如取 $\nu=4$ 时，有

$$\pm\mathrm{j}\frac{8\hbar ce^2\delta m_0}{\lambda^2}J_4^+=\frac{\partial G_{\mu4}}{\partial X_\mu}=\mathrm{j}\left(\frac{\partial G_{14}}{\partial x}+\frac{\partial G_{24}}{\partial y}+\frac{\partial G_{34}}{\partial z}\right)=-\nabla\cdot\vec{N} \tag{17.2.7}$$

或

$$\nabla\cdot\vec{N}=\mp\mathrm{j}\frac{8\hbar e^2\delta m_0}{\lambda^2}\phi^+\phi \tag{17.2.8}$$

式(17.2.6)和(17.2.8)组成强相互作用第一方程组

$$\begin{cases}\nabla\times(\vec{A}\times\vec{A})+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{A}A_4+A_4\vec{A})=\pm\mathrm{j}\dfrac{8\hbar ce^2\delta m_0}{\lambda^2}\phi^+\gamma\phi & (17.2.9\mathrm{a})\\ \nabla\cdot(\vec{A}A_4+A_4\vec{A})=\mp\mathrm{j}\dfrac{8\hbar e^2\delta m_0}{\lambda^2}\phi^+\phi & (17.2.9\mathrm{b})\end{cases}$$

将 Maxwell 方程(16.3.4)的第二式写为

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\pm\mu_0 ce\phi^+\vec{\gamma}^+\phi \tag{17.2.10}$$

式(17.2.6)和(17.2.10)组合成

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}+\frac{e}{\hbar}\vec{A}\times\vec{A}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}+\frac{e}{\hbar}\vec{N}\right)=\pm\frac{8\delta m_0 ce}{\lambda^2}\phi^+\vec{\gamma}^+\phi \tag{17.2.11}$$

式(17.2.11)看做三维强相互作用和电磁相互作用统一方程，其中强相互作用方程(17.2.6)和 Maxwell 方程(17.2.10)分别为式(17.2.11)的特例。

由式(17.1.3)，如满足关系式

$$\frac{\partial G_{\nu\lambda}}{\partial X_\mu}+\frac{\partial G_{\lambda\mu}}{\partial X_\nu}+\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial X_\lambda}=0 \tag{17.2.12}$$

式(17.2.12)可分写成

$$\begin{cases}\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{A})=0\\ \nabla\times\vec{N}-\dfrac{\partial(\vec{A}\times\vec{A})}{\partial ct}=0\end{cases} \tag{17.2.13}$$

式(17.2.13)可看做强相互作用第二方程组。因为对式(17.2.12)中 μ,ν,λ 取 1,2,3，而不取 4 时，例取 $\mu=2,\nu=3,\lambda=1$，有

$$\mathrm{j}\left(\frac{\partial G_{23}}{\partial X_1}+\frac{\partial G_{31}}{\partial X_2}+\frac{\partial G_{12}}{\partial X_3}\right)=-\mathrm{j}\left(\frac{\partial C_1}{\partial x}+\frac{\partial C_2}{\partial y}+\frac{\partial C_3}{\partial z}\right)=-\mathrm{j}\,\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{A})=0 \tag{17.2.14}$$

式(17.2.14)为式(17.2.13)中第一式。当 μ,ν,λ 中有一个取为 4 时，例 $\mu=2,\nu=4,\lambda=1$ 时，有

$$\mathrm{j}\left(\frac{\partial G_{24}}{\partial x}+\frac{\partial G_{41}}{\partial y}\right)+\frac{\partial G_{12}}{\partial ct}=-\left(\frac{\partial N_2}{\partial x}-\frac{\partial N_1}{\partial y}\right)+\frac{\partial C_3}{\partial ct}=0 \tag{17.2.15}$$

将各分量组合可合成式(17.2.13)的第二式。

17.3　强相互作用方程的性质分析

强相互作用描述质子、中子等强子间的作用，是基本粒子组成物质的重要理论。长期以来，人们对强相互作用的具体表达式并不清楚，只是通过实验所总结出来的唯象理论来分析强相互作用的性质。在色动量子力学中一般认为描述夸克的强相互作用应该具有“三色”和“三味”，但“色”和“味”对应粒子哪些物理量不得而知。如果将式(17.2.6)认定为强相互作用方程，它是否具有“三色”和“三味”，对应的物理量具有什么性质是有必要讨论的课题。

将第十九章中 t′Hooft 矩阵(19.3.4)代入式(17.1.13)，满足关系

$$\begin{cases} J_1 = \mathrm{j}\phi^+ \gamma_1 \phi = \mathrm{j}(\phi_4^+ \phi_1 + \phi_3^+ \phi_2 - \phi_2^+ \phi_3 - \phi_1^+ \phi_4) & (17.3.1\text{a}) \\ J_2 = \mathrm{j}\phi^+ \gamma_2 \phi = \mathrm{j}(-\phi_3^+ \phi_1 + \phi_4^+ \phi_2 + \phi_1^+ \phi_3 - \phi_2^+ \phi_4) & (17.3.1\text{b}) \\ J_3 = \mathrm{j}\phi^+ \gamma_3 \phi = \mathrm{j}(\phi_2^+ \phi_1 - \phi_1^+ \phi_2 + \phi_4^+ \phi_3 - \phi_3^+ \phi_4) & (17.3.1\text{c}) \\ J_4 = \phi^+ \gamma_4 \phi = \phi_1^+ \phi_1 + \phi_2^+ \phi_2 + \phi_3^+ \phi_3 + \phi_4^+ \phi_4 = \phi^+ \phi & (17.3.1\text{d}) \end{cases}$$

注意到式(12.3.1)，由四维时空的对称性和遍历性，当 t′Hooft 矩阵 γ_ν 取不同形式时四维几率流密度 J_ν 也具有不同形式。当式(17.1.2)右边取正号时，四维几率流密度 J_ν 可以有四种形式：

$$J_\nu^1(J_1, J_2, J_3, J_4), J_\nu^2(-J_1, J_2, J_3, J_4),$$
$$J_\nu^3(J_1, -J_2, J_3, J_4), J_\nu^4(J_1, J_2, -J_3, J_4) \qquad (17.3.2)$$

当式(17.1.2)右边取负号时，四维几率流密度 J_ν 也可以有四种形式：

$$J_\nu^5(-J_1, -J_2, -J_3, -J_4), J_\nu^6(J_1, -J_2, -J_3, -J_4),$$
$$J_\nu^7(-J_1, J_2, -J_3, -J_4), J_\nu^8(-J_1, -J_2, J_3, -J_4) \qquad (17.3.3)$$

强相互作用方程(17.2.6)中右边三维几率流密度 $\mathrm{j}\vec{J} = \phi^+ \vec{\gamma}\phi$，看做四维几率流密度的空间坐标分量。一般来讲，三个坐标分量是相互独立的，当不考虑三个分量相互独立性时，取

$$\begin{cases} \mathrm{j}J_1 = \phi^+ \gamma_1 \phi = u = -\phi^+ \gamma_1^+ \phi = -\bar{u} \\ \mathrm{j}J_2 = \phi^+ \gamma_2 \phi = d = -\phi^+ \gamma_2^+ \phi = -\bar{d} \\ \mathrm{j}J_3 = \phi^+ \gamma_3 \phi = s = -\phi^+ \gamma_3^+ \phi = -\bar{s} \end{cases} \qquad (17.3.4)$$

有

$$u\bar{u} = d\bar{d} = s\bar{s} = J_{\mathrm{kg}} \qquad (17.3.5)$$

其中，J_{kg}为 Klein-Gordon 方程中态函数的概率密度，它应与介子有关。如不考虑坐标独立分量的关系，将式(17.3.2)中的三维关系式改为

$$J_i^2(\bar{u}, d, s), J_i^3(u, \bar{d}, s), J_i^4(u, d, \bar{s}) \qquad (17.3.6)$$

式(17.3.3)中的三维关系式改为

$$J_i^6(u, \bar{d}, \bar{s}), J_i^7(\bar{u}, d, \bar{s}), J_i^8(\bar{u}, \bar{d}, s) \qquad (17.3.7)$$

式(17.3.6)相当于传统强相互作用中正夸克的“味”，而式(17.3.7)当对应于反夸克的“味”。如果考虑坐标独立分量的性质，式(17.3.6)和(17.3.7)需要分别添加 $J_i^1(u, d, s)$ 和 $J_i^5(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$，则正、反夸克就分别为“四味”，并具有 $SU(3)$ 的对称性。

由于 $J_\nu = \phi^+ \gamma_\mu \phi$ 为 Dirac 粒子的四维几率密度，所以式(17.2.9a)应该为自旋为 $\frac{1}{2}$ 粒子的作用方程。方程(17.2.9a)具有式(17.3.6)和(17.3.7)“味”的性质，说明 γ_μ 的时空遍历性与夸克的“味”相吻合。这一方面说明式(17.2.9a)具有强相

互作用的特点，另一方面也说明“味”与四维时空的对称性相联系。粒子的“三味”与空间的三个独立分量有关，这可能为夸克禁闭提供一条证据；但夸克的分数电荷可能类同于自由能均分定理，每一个独立分量由 $\pm\frac{1}{3}e$ 以及它的倍数来表示。

式(17.1.2)左边考虑规范条件式(16.2.4)和非交换条件，对式(17.2.6)左边展开，可包含下列三类形式：

$$\begin{cases} A_i\dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}-\dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}A_i=-\left(\dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}A_i-A_i\dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}\right) & (17.3.8a) \\ \dfrac{\partial A_i}{\partial x_j}A_j-\dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}A_i & (17.3.8b) \\ A_i\dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}-A_j\dfrac{\partial A_i}{\partial x_j},\quad (i,j=1,2,3) & (17.3.8c) \end{cases}$$

式(17.3.8)可能相当于传统强相互作用中夸克的“色”。

17.4 椭圆型强相互作用方程

第十六章中由椭圆虚单位导出的强电统一方程(16.6.19)，如不考虑左边第一项，将式(16.2.12)代入，有

$$\frac{\partial}{\partial X_\mu}(A_\mu^+A_\nu-A_\nu^+A_\mu)=\pm 8\mathrm{i}\hbar e^2\delta m_0 c\frac{J_\nu^+}{\lambda^2} \tag{17.4.1}$$

令

$$G_{\mu\nu}=A_\mu^+A_\nu-A_\nu^+A_\mu$$

取

$$\begin{cases} C_i=(A_jA_k-A_kA_j), & (i,j,k=1,2,3) \\ N_i=(A_iA_4+A_4A_i), & (i=1,2,3) \end{cases}$$

则有反对称矩阵形式

$$G_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & C_3 & -C_2 & -\mathrm{i}N_1 \\ -C_3 & 0 & C_1 & -\mathrm{i}N_2 \\ C_2 & -C_1 & 0 & -\mathrm{i}N_3 \\ \mathrm{i}N_1 & \mathrm{i}N_2 & \mathrm{i}N_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{17.4.2}$$

式(17.4.1)可写为

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial X_\mu}=\pm 8\mathrm{i}\hbar e^2 c\delta m_0\frac{J_\nu^+}{\lambda^2} \tag{17.4.3}$$

当式(17.4.3)中下脚标取 $\nu=1$ 时，有

$$\frac{\partial G_{\mu 1}}{\partial X_\mu}=\pm\mathrm{i}\frac{8\hbar e^2 c\delta m_0}{\lambda^2}\phi^+\gamma_1^+\phi \tag{17.4.4}$$

展开式(17.4.4),有

$$\pm \mathrm{i}\,\frac{8\hbar e^2 c\delta m_0}{\lambda^2}\phi^+\,\gamma_1^+\phi = \left(\frac{\partial G_{21}}{\partial X_2}+\frac{\partial G_{31}}{\partial X_3}\right)+\frac{\partial G_{41}}{\partial X_4} = \mathrm{i}\left(\frac{\partial C_2}{\partial z}-\frac{\partial C_3}{\partial y}\right)+\mathrm{i}\,\frac{\partial N_1}{\partial (ct)} \tag{17.4.5}$$

由式(17.4.2),有

$$\pm\frac{8\hbar e^2 c\delta m_0}{\lambda^2}\phi^+\,\gamma_1\phi = \frac{\partial C_3}{\partial y}-\frac{\partial C_2}{\partial z}-\frac{1}{c}\,\frac{\partial N_1}{\partial t} \tag{17.4.6}$$

同理,$\nu = 2,3$ 时对应另两个分量方程。可推导式(17.4.2)所对应的矢量关系式

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}-\frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{N}}{\partial t}=\pm\frac{8\hbar e^2 c\delta m_0}{\lambda^2}\phi^+\,\vec{\gamma}\phi$$

或

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{A})-\frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{N}}{\partial t}=\pm\frac{8\hbar e^2 c\delta m_0}{\lambda^2}\phi^+\,\vec{\gamma}\phi \tag{17.4.7}$$

类同于式(17.3.4)至(17.3.7),将式(17.4.7)中右边几率流密度写为

$$\begin{cases}\phi^+\,\gamma_1\phi = u = -\phi^+\,\gamma_1^-\phi = -\bar{u}\\ \phi^+\,\gamma_2\phi = d = -\phi^+\,\gamma_2^-\phi = -\bar{d}\\ \phi^+\,\gamma_3\phi = s = -\phi^+\,\gamma_3^-\phi = -\bar{s}\end{cases} \tag{17.4.8}$$

满足关系

$$u\bar{u} = d\bar{d} = s\bar{s} = J_{\mathrm{kg}} \tag{17.4.9}$$

式(17.3.9)为 Klein-Gordon 方程态函数的几率密度。式(17.4.7)中的三个坐标分量是相互独立的,当不考虑独立性时,取

$$(\bar{u},d,s),(u,\bar{d},s),(u,d,\bar{s}),(u,\bar{d},\bar{s}),(\bar{u},d,\bar{s}),(\bar{u},\bar{d},s) \tag{17.4.10}$$

式(17.4.10)相当于传统强相互作用中正、反夸克的"味"。对式(17.4.7)左边第一项展开,有式(17.3.8)的形式,相当于传统强相互作用中夸克的"色"。

17.5　四维作用力

将式(14.1.1)对固有时 $\mathrm{d}\tau = \alpha\mathrm{d}t$ 微分,有

$$\begin{cases}\gamma_\mu\hat{F}_\mu\phi = \gamma_\mu\,\dfrac{\mathrm{d}\hat{P}_\mu}{\mathrm{d}\tau}\phi = \gamma_\mu\,\dfrac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau}\phi\\ \gamma_\nu^+\hat{F}_\nu^+\phi^+ = \gamma_\nu^+\,\dfrac{\mathrm{d}\hat{P}_\nu^+}{\mathrm{d}\tau}\phi^+ = \gamma_\nu^+\,\dfrac{\mathrm{d}P_\nu^+}{\mathrm{d}\tau}\phi^+\end{cases} \tag{17.5.1}$$

如果类时区中 μ 和 ν 点的连线平行或垂直类光区,将式(17.5.1)中两式相减,有

$$\hat{F}_{q\mu}^+\phi^+ = (\gamma_\mu^+\hat{F}_\mu^+ - \gamma_\nu^+\hat{F}_\nu^+)\phi^+ = \left(\gamma_\mu^+\,\frac{\mathrm{d}P_\mu^+}{\mathrm{d}\tau}-\gamma_\mu^+\,\frac{\mathrm{d}P_\nu^+}{\mathrm{d}\tau}\right)\phi^+ = c\left(\gamma_\mu^+\,\frac{\mathrm{d}m_{\mu 0}}{\mathrm{d}\tau}-\gamma_\nu^+\,\frac{\mathrm{d}m_{\nu 0}}{\mathrm{d}\tau}\right)\phi^+$$

$$= \frac{1}{c}\left(\gamma_{\mu}^{+}\frac{\mathrm{d}E_{\mu 0}}{\mathrm{d}\tau} - \gamma_{\nu}^{+}\frac{\mathrm{d}E_{\nu 0}}{\mathrm{d}\tau}\right)\phi^{+} = F_{\alpha\mu}^{+}\phi^{+} \tag{17.5.2}$$

式(17.5.2)中 $F_{\alpha\mu}^{+} \in \Xi$ 对应类光区的四维电磁力。

由式(16.1.17)，不考虑式(16.1.15)的第二项，Yang-Mills 方程可写成

$$ec\left(\frac{\partial A_{\nu}}{\partial X_{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial X_{\nu}}\right) = \left(\gamma_{\nu}^{+}\frac{\partial E_{\nu 0}}{\partial X_{\mu}} - \gamma_{\mu}^{+}\frac{\partial E_{\mu 0}}{\partial X_{\nu}}\right) = \left(\gamma_{\nu}^{+}\frac{\delta E_{\nu 0}}{\bar{\omega}_{\mu}\delta\tau} - \gamma_{\mu}^{+}\frac{\delta E_{\mu 0}}{\bar{\omega}_{\nu}\delta\tau}\right) \tag{17.5.3}$$

其中，$\bar{\omega}_{\nu}$ 和 $\bar{\omega}_{\mu}$ 为四维速度，满足关系

$$\bar{\omega}_{\mu} = \frac{\mathrm{d}X_{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\delta X_{\mu}}{\delta\tau} = \frac{1}{\alpha}(c + \mathrm{j}\vec{v}) = \frac{V_{\mu}}{\alpha} \tag{17.5.4}$$

$\alpha = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 为相对论因子，代入式(17.5.3)并注意到式(16.2.11)，有

$$eV_{\mu}F_{\mu\nu} = \alpha\frac{1}{c}\left(\gamma_{\nu}^{+}\frac{\delta E_{\nu 0}}{\delta\tau} - \gamma_{\mu}^{+}\frac{\delta E_{\mu 0}}{\delta\tau}\right) \tag{17.5.5}$$

由式(17.5.2)，可以写为

$$\frac{e}{\alpha}V_{\mu}F_{\mu\nu} = F_{\alpha}^{+} \tag{17.5.6}$$

式(17.5.6)可看做四维运动方程的矩阵形式，其中，四维电磁力

$$F_{\alpha}^{+} = F_{c0} - \mathrm{j}\vec{F}_{c} \tag{17.5.7}$$

式(17.5.6)中下脚标取 $\nu = 1$ 时，有

$$eV_{\mu}F_{\mu 1} = -\mathrm{j}\alpha F_{c1} \tag{17.5.8}$$

由式(16.3.1)展开上式，

$$-\mathrm{j}\alpha F_{c1} = \mathrm{j}e(v_2F_{21} + v_3F_{31}) + ecF_{41} = \mathrm{j}e(v_3B_2 - v_2B_3) - \mathrm{j}eE_1 \tag{17.5.9}$$

则

$$e(v_2B_3 - v_3B_2) + eE_1 = \alpha F_{c1} \tag{17.5.10}$$

同理，$\nu = 2,3$ 时对应另两个分量方程，有

$$\vec{F}_c = \frac{e}{\alpha}(\vec{v}\times\vec{B} + \vec{E}) \tag{17.5.11}$$

当经典近似时，不考虑相对论效应，有

$$\vec{F}_{\mathrm{L}} = e\vec{v}\times\vec{B} + e\vec{E} \tag{17.5.12}$$

式(17.5.12)为电磁场中经典粒子所受到的 Lorentz 力和静电力方程。当式(17.5.6)中如取 $\nu = 4$ 时，有

$$\alpha F_{c0} = eV_{\mu}F_{\mu 4} = \mathrm{j}e(v_1F_{14} + v_2F_{24} + v_3F_{34}) = -\frac{e}{c}\vec{v}\cdot\vec{E} = 0 \tag{17.5.13}$$

或

$$F_{c0} = -\frac{e}{\alpha c}\vec{v} \cdot \vec{E} \tag{17.5.14}$$

注意到式(4.8.6),在惯性系中,有 $F_{c0} = 0$。

不考虑式(16.1.15)左边第一项,与式(17.5.3)相对应的 Yang-Mills 方程写成

$$e^2(A_\mu^+ A_\nu - A_\nu^+ A_\mu) = \frac{\mathrm{j}\hbar}{c}\left(\gamma_\nu^+ \frac{\partial E_{\nu 0}}{\partial X_\mu} - \gamma_\mu^+ \frac{\partial E_{\mu 0}}{\partial X_\nu}\right) \tag{17.5.15}$$

参照式(17.1.3)和(17.5.6),有

$$e^2 V_\mu G_{\mu\nu} = \mathrm{j}\hbar\alpha F_\alpha^+ \tag{17.5.16}$$

式(17.5.16)可看做强相互作用中粒子间的四维运动方程。式(17.5.16)中下脚标取 $\nu = 1$ 时,有

$$V_\mu G_{\mu 1} = -\frac{\hbar\alpha}{e^2} F_{c1} \tag{17.5.17}$$

展开上式,

$$-\frac{\hbar\alpha}{e^2} F_{c1} = \mathrm{j}(v_2 C_3 - v_3 C_2) + \mathrm{j}cN_1 \tag{17.5.18}$$

则

$$e^2[(v_2 C_3 - v_3 C_2) + cN_1] = -\mathrm{j}\hbar\alpha F_{c1} \tag{17.5.19}$$

同理,$\nu = 2,3$ 时对应另两个分量方程,有

$$\vec{F}_c = -\mathrm{j}\frac{e^2}{\alpha\hbar}[\vec{v} \times (\vec{A} \times \vec{A}) + c\vec{N}] \tag{17.5.20}$$

式(17.5.20)为强相互作用中粒子受力方程。

当 Dirac 旋量方程取式(16.1.1)形式时,式(17.5.12)所示的 Lorentz 力和静电力方程可改写成

$$\vec{F}_{\mathrm{L}} = \frac{1}{e}(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}) \tag{17.5.21}$$

强相互作用中粒子受力方程(17.5.20)改写为

$$\vec{F}_c = -\mathrm{j}\frac{1}{e^2\alpha\hbar}[\vec{v} \times (\vec{A} \times \vec{A}) + c\vec{N}] \tag{17.5.22}$$

第二部分

Minkowski 几何的基本原理

第十八章　高维超复数

Clifford 几何代数是作为一类具有非交换性质的数系而引入的，这种数系的扩充，使一维数和二维数（实数、复数）通过外积的形式向高维空间得以延伸。在 Clifford 几何代数中通过几何面矢量引入一类双曲虚单位 j，所对应的单复变函数在复空间中是一类具有几何意义的非交换代数，可以与矩阵代数、李括号及 Dirac 算子等的运算规则相吻合。这种与 Minkowski 空间存在逻辑关联的单复变函数与狭义相对论和量子力学的数学基础有着深刻的联系，可能是打开两论一元化的钥匙。

18.1　数学家 W. K. Clifford 和 Clifford 几何代数简介

Clifford 几何代数是 19 世纪 70 年代英国数学家 W. K. Clifford(1845～1879) 创立的一类具有几何意义的非交换代数。首先它是作为数系的推广而引入的，主要是将一维单位矢量推广到二维以上的几何空间，构成二维面矢量等高维空间矢量元，这些高维矢量不满足交换律。所以 Clifford 几何代数是利用具有几何意义的面单位元和高维体单位元构成一类非交换几何代数。Clifford 的重要思想来源于德国数学家 H. G. Grassmann 的外代数，他在向量中对外代数 $\wedge R^n$ 定义了一个新的乘法规则，其结构包含了复数和四元数。目前这类非交换几何代数已广泛应用于数学、物理、工程等各个领域(18.1～18.4 节可参阅文献[1]～[6])。

Clifford 几何代数中派生出一种新的虚单位 $\mathrm{j}(\mathrm{j}^2=1, \mathrm{j}\neq\pm1, \mathrm{j}^*=-\mathrm{j})$，在 20 世纪末有人叫它双曲虚单位。它与传统的虚单位 $\mathrm{i}(\mathrm{i}^2=-1)$ 相互独立，构成两类不同性质的复数和复空间。双曲虚单位的意义在于它所对应的复空间与 Minkowski 空间相对应，这样我们就可以在双曲型 Minkowski 空间中利用双曲复数的运算规则讨论狭义相对论的物理问题，并将 Clifford 几何代数所对应的高维空间与物质世界联系起来。20 世纪中期，人们发现 Clifford 几何代数的矩阵表示与 Dirac 旋量方程相对应，这使得 Clifford 几何代数与现代物理学联系起来，并很快形成了一门新型的数学物理学科。

Clifford 早期对几何空间与物质世界的和谐性及因果联系也提出了许多创造性的理论观点。1873 年 Clifford 为《自然》(*Nature*)杂志翻译 Riemann 的演讲稿，推广了 Riemann 的许多创新思想。他是第一个推测“力”只不过是空间弯曲本身，即空间弯曲产生了电磁力，这比 Einstein 提出的广义相对论早 50 年。1876 年

Clifford 写了一篇非常吸引人的文章，题目是“论物质的空间理论”。他深刻地写道：“空间弯曲这种变化在我们称之为物质运动的那种现象中发生，这种物质运动不是可衡量的就是难以捉摸的。”Clifford 还推测，能否从某些无法解释的光和磁现象中推断出我们所在的三维空间正在四维空间中被扭曲——就跟纸被揉皱相类似。其实，三维几何空间与物质的关联，早已由 Faraday 创造出力线的几何概念与场的联系得以实现。Clifford 高维空间理论的哲学意义，在于他最早将三维空间与四维空间辩证地联系起来，并发现高维空间的意义在于它能够为力提供一种简单而又漂亮的描述。这是第一次有人正确地分离出高维空间真正的物理意义，即高维空间理论实际上给了我们一个统一的力的绘景。

18.2　Clifford 矢量算法

Clifford 几何代数将实数体系扩展到矢量 $u, v, w, \cdots$，和它们的乘积 $uv, uvw, \cdots$，并与三个或更多矢量的联合加法、乘法和矢积运算紧密结合。Clifford 几何代数的基本原理是任意矢量 v 与它自身的乘积是长度的平方(参考文献 2)

$$v^2 = vv = v \cdot v \tag{18.2.1}$$

在向量平面 R^2 中，取两个坐标分量的单位矢量为 e_1 和 e_2（考虑矢量的广义性，本章不对矢量或单位矢量带有矢量箭头），平面矢量 $a = a_1 e_1 + a_2 e_2$ 的长度是 $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$，满足式(18.2.1) $a^2 = |a|^2 = a_1^2 + a_2^2$，其中，$a_1$、$a_2$ 是系数。假设矢积满足结合律但不满足交换律，有

$$(a_1 e_1 + a_2 e_2)^2 = a_1^2 e_1^2 + a_2^2 e_2^2 + a_1 a_2 (e_1 e_2 + e_2 e_1) = a_1^2 + a_2^2 \tag{18.2.2}$$

设单位矢量 e_1 和 e_2 满足正交关系，可获得乘法规则：

$$\begin{cases} e_1^2 = e_2^2 = 1 \\ e_1 e_2 = -e_2 e_1 \end{cases} \tag{18.2.3}$$

如果单位矢量 e_1 和 e_2 看做是虚单位，则式(18.2.3)中第一式与式(1.1.1)相吻合，这是引入双曲虚单位的依据。式(18.2.3)符合 $|e_1| = |e_2| = 1, e_1 \perp e_2$ 的条件。利用结合律计算矢量的平方 $(e_1 e_2)^2 = -e_1^2 e_2^2 = -1$，矢量的乘积 $e_1 e_2$ 的平方是负的。$e_1 e_2$ 既不是标量也不是矢量，它是一个新的单位，称为双重数。表示定向平面的面积是边 e_1 和 e_2 的乘积，缩写成 $e_{12} = e_1 e_2$，如图 18.1。单位矢量 e_1、e_2 和双重数 e_{12} 作为结合代数与 2×2 实矩阵代数 $R(2)$是同构的，有矩阵表示：

$$e_1 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad e_2 \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad e_{12} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{18.2.4}$$

而 e_1, e_2, e_{12} 满足乘法表，如表 18.1。

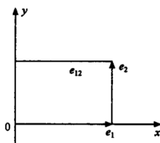


图 18.1　表示面积的双重数

表 18.1　单位矢量 e_1、e_2 和双重数 e_{12} 乘法表

	e_1	e_2	e_{12}
e_1	1	e_{12}	e_2
e_2	$-e_{12}$	1	$-e_1$
e_{12}	$-e_2$	e_1	-1

假设矢量 v 是其他两个矢量的和 $v = a + b$，由式(18.2.1)成为 $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$，展开后通过消去 $a^2 = a\cdot a$ 和 $b^2 = b\cdot b$，得到

$$ab + ba = 2a\cdot b \tag{18.2.5}$$

其中，$a\cdot b$ 为 a 点积 b，是标量积，ab 为矢积，一般矢积不满足交换律 $ab \neq ba$，所以矢积可用于非交换代数。如果 a 和 b 不在同一条直线上，从 $aab = a(ab) = (aa)b$ 看出 ab 不是一个标量，而是不同方向矢量点积相等结果。将式(18.2.5)移项，可写成

$$ab - ba = 2(ab - a\cdot b) \tag{18.2.6}$$

仅当 a 和 b 相同时上式为零。由式(18.2.6)令矢量的乘积为

$$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba) \tag{18.2.7}$$

其中，$a \wedge b$ 称为双矢量，为 a 楔积 b，是一种外积。取式(18.2.7)满足关系

$$[a,b] = ab - ba \tag{18.2.8}$$

式(18.2.8)相当于量子力学中的对易关系。矢量的楔积(18.2.7)可写成

$$a \wedge b = \frac{1}{2}[a,b] \tag{18.2.9}$$

由式(18.2.6)可导出

$$ab = a\cdot b + a \wedge b \tag{18.2.10}$$

式(18.2.5)矢量的标积为

$$a\cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba) \tag{18.2.11}$$

取两矢量 $a = a_1e_1 + a_2e_2$ 和 $b = b_1e_1 + b_2e_2$ 的矢积

$$ab = (a_1e_1 + a_2e_2)(b_1e_1 + b_2e_2) = a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_{12} \tag{18.2.12}$$

与式(18.2.10)比较，得

$$a\cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 \tag{18.2.13}$$

$$a \wedge b = (a_1b_2 - a_2b_1)e_{12} \tag{18.2.14}$$

18.3 平面矢量的分解和映射

双矢量 $a \wedge b$ 表示边为 a 和 b 的平行四边形的面积，如图 18.2，

$$S = |a \wedge b| = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \tag{18.3.1}$$

双矢量 $a \wedge b$ 和 $b \wedge a$ 有相同的量值，但它们旋转方向相反，如图 18.2(a)和(b)，$a \wedge b = -b \wedge a$ 满足反交换律，而标积 $a \cdot b = b \cdot a$ 满足交换律。

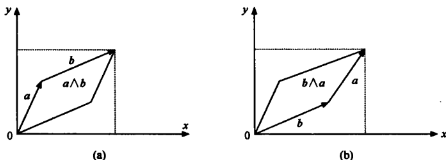


图 18.2 双矢量表示的平行四边形面积

对矢量 a 和 b 的矢积 ab，当 a 和 b 平行时，有 $a_1 b_2 = a_2 b_1$，$a \wedge b = 0$，则 $ab = ba$，满足交换律；当 a 和 b 是垂直时，有 $a \cdot b = 0$，满足反交换律 $ab = -ba$，即

$$ab = ba \Leftrightarrow a \parallel b \Leftrightarrow a \wedge b = 0 \Leftrightarrow ab = a \cdot b$$

$$ab = -ba \Leftrightarrow a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow ab = a \wedge b$$

如矢量 a 不平行于 b，任一矢量 r 可分解成两个分量，一个平行于 a，另一个平行于 b。取系数 α 和 β 使矢量 r 分解成 $r = \alpha a + \beta b$，系数 α 可以通过外积形式获得 $r \wedge b = (\alpha a + \beta b) \wedge b$，因 $b \wedge b = 0$，所以 $r \wedge b = \alpha a \wedge b$，有

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{r \wedge b}{a \wedge b} \\ \beta = \dfrac{a \wedge r}{a \wedge b} \end{cases} \tag{18.3.2}$$

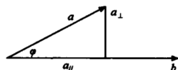


图 18.3 矢量的平面分解图

当矢量 a 和 b 形成角度 φ（$0 < \varphi < \pi$）时，在 b 的方向可计算 a 的分量。取平行分量 $a_{\parallel}$ 是标量，并且是单位矢量 $\dfrac{b}{|b|}$ 的倍数，如图 18.3。

由图 18.3 可知，一般情况下任一矢量满足

$$a = a_{\parallel} + a_{\perp} \tag{18.3.3}$$

式(18.3.3)中平行分量 $a_{\parallel}$ 可写作

$$a_{\parallel} = |a| \cos\varphi \frac{b}{|b|} = |a|\,|b| \cos\varphi \frac{b}{|b|^2} \tag{18.3.4}$$

因平行分量 $a_{/\!/}$ 是标积 $a\cdot b=|a||b|\cos\varphi$ 与矢量 $b^{-1}=\dfrac{b}{|b|^2}$ 的数积，得

$$a_{/\!/}=(a\cdot b)\frac{b}{|b|^2}=(a\cdot b)b^{-1} \tag{18.3.5}$$

式(18.3.3)中垂直分量 $a_\perp$ 可写作

$$a_\perp=a-a_{/\!/}=a-(a\cdot b)b^{-1}=(ab-a\cdot b)b^{-1}=(a\wedge b)b^{-1} \tag{18.3.6}$$

注意到双矢量 e_{12} 与所有在 e_1e_2 平面矢量的变换关系：

$$(a\wedge b)b^{-1}=-b^{-1}(a\wedge b)=b^{-1}(b\wedge a)=-(b\wedge a)b^{-1} \tag{18.3.7}$$

用 a 和 b 作为边的平行四边形面积可写作

$$S=|a\wedge b|=|a_\perp b|=|a||b|\sin\varphi\quad(0<\varphi<\pi) \tag{18.3.8}$$

由式(18.3.4)和(18.3.8)，式(18.2.10)可写作三角函数和指数形式：

$$ab=|a||b|(\cos\varphi+e_{12}\sin\varphi)=|a||b|e^{e_{12}\varphi} \tag{18.3.9}$$

矢量 r 可以在直线 a 上进行矢量分解

$$r=r_{/\!/}+r_\perp \tag{18.3.10}$$

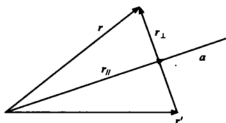


图 18.4　矢量 r 在直线 a 上矢量分解

取矢量 $r'=r_{/\!/}-r_\perp$，如图 18.4，其中 $r_{/\!/}=(r\cdot a)a^{-1}$，$r_\perp=(r\wedge a)a^{-1}$。如 r' 看做 r 的像，由式(18.3.5)、(18.3.6)和式(18.2.7)，r 与 r' 可建立映射关系：

$$\begin{aligned} r'&=(r\cdot a)a^{-1}-(r\wedge a)a^{-1}=(r\cdot a-r\wedge a)a^{-1}\\ &=(a\cdot r+a\wedge r)a^{-1}=ara^{-1} \end{aligned} \tag{18.3.11}$$

或

$$r'=(2a\cdot r-ra)a^{-1}=2\frac{a\cdot r}{a^2}a-r \tag{18.3.12}$$

对于二次映射，考虑先向 a 投影分解再向 b 投影分解，即

$$r\to r'=ara^{-1}\to r''=br'b^{-1}=b(ara^{-1})b^{-1}=(ba)r(ba)^{-1} \tag{18.3.13}$$

矢量分解和映射关系具有普适性质，在第二章讨论四维时空的坐标变换，推导 Lorentz 变换的普遍形式以及论述量子力学的相似变换均有重要应用。取图 18.2 中矢量 $a\Rightarrow r$，$b\Rightarrow v$，当矢量 a 和 b 形成角度 φ（$0<\varphi<\pi$），如果对应 Lorentz 变换式(2.2.11)，则逆变换式(2.2.18)对应 $-\varphi$（$0<\varphi<\pi$）。

18.4　三维空间矢量的性质

取 n 维坐标空间的基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，n 维矢量 a 和 b 满足式(18.2.7)，任一个

二重向量 $a \wedge b$ 能用 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个单位二重数线性表示。在三维 Cartesian 坐标中取

$$\begin{cases} a = a_x e_1 + a_y e_2 + a_z e_3 \\ b = b_x e_1 + b_y e_2 + b_z e_3 \end{cases} \tag{18.4.1}$$

对矢量 a 和 b 作楔积，

$$\begin{aligned} a \wedge b &= \frac{1}{2}(ab - ba) \\ &= \begin{vmatrix} e_2 \wedge e_3 & e_3 \wedge e_1 & e_1 \wedge e_2 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (a_x b_y - a_y b_x) e_1 e_2 + (a_y b_z - a_z b_y) e_2 e_3 + (a_z b_x - a_x b_z) e_3 e_1 \end{aligned} \tag{18.4.2}$$

二重数可写作

$$e_i e_j = e_i \wedge e_j = -e_j e_i, \quad (i,j = 1,2,3) \tag{18.4.3}$$

二重数 e_1e_2, e_2e_3, e_3e_1 生成一个三维线性空间，它有别于原来由 e_1, e_2, e_3 生成的矢量空间，如图 18.5。

在三维矢量空间取矢量的叉积 $a \times b$，如图 18.6，有

$$\begin{aligned} a \times b &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) e_1 + (a_z b_x - a_x b_z) e_2 + (a_x b_y - a_y b_x) e_3 \end{aligned} \tag{18.4.4}$$

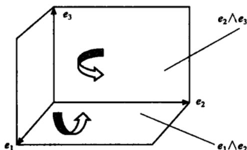


图 18.5　二重数生成的三维空间

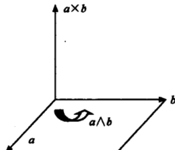


图 18.6　$a \times b$ 和 $a \wedge b$ 的几何关系

显然式(18.4.2)和(18.4.4)是有差异的。矢量的楔积 $a \wedge b$ 和叉积 $a \times b$ 的数值有等量关系

$$|a \times b| = |a \wedge b| = |a|\,|b| \sin\varphi \tag{18.4.5}$$

其中，$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$。

在三维 Cartesian 坐标空间将 $e_1e_2e_3$ 的乘积命名为三重数，它是 R^3 中仅有的一个线性独立的三重向量，表示一个单位体积。有性质 $(e_1e_2e_3)^2=-1$，$(e_1e_2e_3)^*=-e_3e_2e_1$ 与虚单位 i($\mathrm{i}^2=-1$，$\mathrm{i}^*=-\mathrm{i}$)的性质相同，所以令

$$e_{12}e_3=e_1e_2e_3=\mathrm{i} \tag{18.4.6}$$

由式(18.4.6)可以导出

$$\begin{cases}e_{12}=e_1e_2=\mathrm{i}e_3\\ e_2e_3=\mathrm{i}e_1\\ e_3e_1=\mathrm{i}e_2\end{cases} \tag{18.4.7}$$

将式(18.4.2)与式(18.4.4)联立，得

$$a\wedge b=\mathrm{i}a\times b \tag{18.4.8}$$

式(18.4.8)为矢量的楔积 $a\wedge b$ 和叉积 $a\times b$ 的关联式。由式(18.2.8)和(18.4.2)，有 Jacobi 关系：

$$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0 \tag{18.4.9}$$

或

$$(a\wedge(b\wedge c))+(b\wedge(c\wedge a))+(c\wedge(a\wedge b))=0 \tag{18.4.10}$$

可以证明式(18.4.9)或(18.4.10)构成李代数。$[a,b]$ 称为李括号，它满足

(1) 左右分配律

$$[\alpha a+\beta b,c]=\alpha[a,c]+\beta[b,c],\quad \alpha,\beta\in R$$

(2) 幂零律

$$[a,a]=0$$

(3) Jacobi 律

$$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0$$

$[a,b]\equiv ab-ba\in u(n)$ 为反称括号，构成李代数。单位矢量 e_1,e_2,e_3 与 2×2 Pauli 矩阵同构，取

$$e_1\approx\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad e_2\approx\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\ \mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad e_3\approx\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{18.4.11}$$

注意到式(18.4.6)和(18.2.4)，有

$$e_{12}e_3\approx\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\ \mathrm{i}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0\\0&\mathrm{i}\end{pmatrix}\approx\mathrm{i} \tag{18.4.12}$$

Clifford 空间矢量可在表 18.2 给出。

表 18.2 Clifford 空间矢量分类表

标量	R	1
矢量	R^3	e_1, e_2, e_3
双矢量	$\wedge^2 R^3$	$e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3$
体矢量	$\wedge^3 R^3$	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$

18.5 Hamilton 四元数和双曲四元数

在传统的四维椭圆复空间中引入 Hermite 四元数

$$Q(R) = \{a : a = a_t n_0 + a_x n_1 + a_y n_2 + a_z n_3;\ a_t, a_x, a_y, a_z \in R\} \tag{18.5.1}$$

其中，$n_0 = 1$，基元 n_1, n_2 和 n_3 有性质：

$$n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = -1 \tag{18.5.2}$$

$$\begin{cases} n_1 n_2 = -n_2 n_1 = n_3 \\ n_2 n_3 = -n_3 n_2 = n_1 \\ n_3 n_1 = -n_1 n_3 = n_2 \end{cases} \tag{18.5.3}$$

可以证明 $Q(R) - \{0\}$ 是一个非 Abel 群，它的 2×2 矩阵表示为

$$\begin{cases} n_0 \approx E_2 \\ n_1 \approx -\mathrm{i}\sigma_1 = -\mathrm{i}e_1 \\ n_2 \approx -\mathrm{i}\sigma_2 = -\mathrm{i}e_2 \\ n_3 \approx -\mathrm{i}\sigma_3 = -e_{12} \end{cases} \tag{18.5.4}$$

其中，e_1, e_2 和 e_{12} 分别为 R^2 中的单位矢量和二重数。对式(18.5.1)取内积，有

$$Q^* \cdot Q = a_t^2 + a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \tag{18.5.5}$$

式(18.5.5)与式(1.2.2)类同，为四维椭圆空间的间隔不变量，Q^* 为 Q 的复共轭。

在四维双曲复空间中引入双曲四元数

$$P(R) = \{b : b = b_t m_0 + b_x m_1 + b_y m_2 + b_z m_3;\ b_t, b_x, b_y, b_z \in R\} \tag{18.5.6}$$

$P(R) - \{0\}$ 也是一个非 Abel 乘法群。取 $m_0 = 1$，基元 m_1, m_2 和 m_3 有性质：

$$\begin{cases} m_1^* m_1 = m_2^* m_2 = m_3^* m_3 = -1 \\ m_1 m_1 = m_2 m_2 = m_3 m_3 = 1 \end{cases} \tag{18.5.7}$$

$$\begin{cases} m_1^* m_2 = -m_2^* m_1 \\ m_2^* m_3 = -m_3^* m_2 \\ m_3^* m_1 = -m_1^* m_3 \end{cases} \tag{18.5.8}$$

可以取

$$m_0 = 1,\quad m_1 = \mathrm{j}e_1,\quad m_2 = \mathrm{j}e_2,\quad m_3 = \mathrm{j}e_3 \tag{18.5.9}$$

对式(18.5.6)取内积,有

$$P^* P = b_t^2 - b_x^2 - b_y^2 - b_z^2 \tag{18.5.10}$$

式(18.5.10)为四维双曲复空间的间隔不变量。

注意到三维实矢量 $r = xx_0 + yy_0 + zz_0$,其中基元 x_0, y_0, z_0 用 $x_k(k=1,2,3)$ 来取代,并令

$$\begin{cases} x_i x_j = -x_j x_i = x_k, \quad (i,j,k = 1,2,3) \\ x_k^* = x_k \end{cases} \tag{18.5.11}$$

式(18.5.9)可对应写作

$$x_0 = m_0 = 1,\quad m_k = \mathrm{j}x_k \tag{18.5.12}$$

式(18.5.8)和(18.5.9)分别改写成

$$\begin{cases} m_\mu m_\mu = 1, \quad (\mu = 0,1,2,3) \\ m_0^+ m_0 = 1 \\ m_k^+ m_k = -1, \quad (k = 1,2,3) \end{cases} \tag{18.5.13}$$

$$m_i^+ m_j = -m_j^+ m_i = \mathrm{j}m_k,\quad (i,j,k = 1,2,3) \tag{18.5.14}$$

其中,m_k^+ 为 m_k 的共轭转置。可以取式(18.5.14)为 m_μ 的 4×4 矩阵表示

$$\begin{cases} m_0^+ = m_0 = x_0 \approx \gamma_0 \\ m_k^+ = m_k = \mathrm{j}x_k \approx \mathrm{j}\gamma_k \end{cases} \tag{18.5.15}$$

其中,$\gamma_k^+ = -\gamma_k$,γ_k^+ 为 γ_k 的厄米矩阵。式(18.5.10)可写作

$$P^+ P = b_t^2 - b_x^2 - b_y^2 - b_z^2 \tag{18.5.16}$$

18.6　Cayley 八元数和 Dirac 十六元数

英国数学家 Cayley 推广了 Hamilton 四元数,取一对有序的四元数 $\alpha,\beta \in Q(R)$ 构成了八元数:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{\alpha + \beta e : \alpha,\beta \in Q(R)\} \\ &= \{a_0 + a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 + a_4 e + a_5 e n_1 + a_6 e n_2 + a_7 e n_3, a_i \in R\} \end{aligned} \tag{18.6.1}$$

其中,e 是新引进的超复数基元。八元数的乘法规则为用分配律展开:$\Omega_1\Omega_2 = (\alpha + \beta e)\cdot(\gamma + \delta e)$,$\Omega$ 中的乘法既不满足交换律,也不满足结合律。有 $(n_1 n_2)e = n_3 e \neq n_1(n_2 e) = -n_3 e$。

以双曲四元数为基础,可以推广到双曲八元数,取

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{\alpha + \beta e : \alpha,\beta \in P\} \\ &= \{b_0 + b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 + \mathrm{j}b_4 + \mathrm{j}b_5 m_1 + \mathrm{j}b_6 m_2 + \mathrm{j}b_7 m_3, b_i \in R\} \end{aligned} \tag{18.6.2}$$

其中，取超复数基元 $e=\mathrm{j}$，为双曲虚单位。双曲八元数的乘法用内积多项式的方法来定义，其乘法规定为用分配律去展开酉积：

$$\Gamma^{+}\Gamma=(\alpha+\mathrm{j}\beta)^{+}(\alpha+\mathrm{j}\beta) \tag{18.6.3}$$

式(18.6.3)中的乘法不满足交换律，但满足结合律，这与 Cayley 八元数不同。一般情况双曲八元数有如下两种乘法：

$$(\alpha+\mathrm{j}\beta)(\gamma+\mathrm{j}\delta)=\alpha\gamma+\beta\delta+\mathrm{j}(\alpha\delta+\beta\gamma) \tag{18.6.4}$$

$$(\alpha+\mathrm{j}\beta)^{*}(\gamma+\mathrm{j}\delta)=(\alpha^{*}\gamma-\beta^{*}\delta)+\mathrm{j}(\alpha^{*}\delta-\beta^{*}\gamma) \tag{18.6.5}$$

式(18.6.4) 和 (18.6.5) 的乘法也不满足交换律，但满足结合律。将 α 和 β 分别选为四维坐标空间和四维动量空间的四元数，它们在量子力学的讨论中有实际应用，带电正、反粒子的 Dirac 旋量方程(13.1.11)和(13.1.16)就可以看做双曲八元数所对应的微分方程。

在相对论量子力学中，自旋为 $\frac{1}{2}$ 的高速粒子运动方程为 Dirac 旋量方程。对应的旋量矩阵为

$$\begin{cases}\gamma_1=\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\sigma_1\\ \mathrm{i}\sigma_1 & 0\end{bmatrix}, \quad \gamma_2=\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\sigma_2\\ \mathrm{i}\sigma_2 & 0\end{bmatrix}\\ \gamma_3=\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\sigma_3\\ \mathrm{i}\sigma_3 & 0\end{bmatrix}, \quad \gamma_0=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\end{cases} \tag{18.6.6}$$

其中，$\sigma_k(k=1,2,3)$ 为 Pauli 矩阵。式(18.6.6)满足条件

$$\gamma_{\mu}^{2}=1, \quad \gamma_{\mu}\gamma_{\nu}=-\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}(\mu\neq\nu) \tag{18.6.7}$$

四个 γ 矩阵可组成 $2^4=16$ 个元：$\gamma_{\mu}, \gamma_{\mu}\gamma_{\nu}, \gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\lambda}, \gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\lambda}\gamma_{\rho}$ (用 $\gamma_A, A=1,2,\cdots,16$ 表示)，构成一个十六元数系。

第十九章　群表示和四维单位球

传统狭义相对论中 Lorentz 群为 $SO(n)$ 群。将双曲复变函数引入 Minkowski 空间，时空间隔不变量和能量动量关系均可表示为矢量的内积形式，变换矩阵为酉矩阵，对应的 Lorentz 群为特殊幺正群 $SU(n)$。由于量子力学中的群表示也为 $SU(n)$ 群，这为狭义相对论和量子力学的一元化奠定了数学基础。坐标等距变换和复数的模方与时空间隔不变量相吻合，在四维球谐坐标中取单位模为半径可形成单位球，探讨四维单位球的几何性质可以增强对四维复时空间性质的了解和应用。

19.1　双曲复空间坐标变换的群表示

二维 Minkowski 复平面的坐标变换关系(1.1.17)可写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \mathrm{j}x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\varphi & \mathrm{jsh}\varphi \\ \mathrm{jsh}\varphi & \mathrm{ch}\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{j}x \\ ct \end{pmatrix} \tag{19.1.1}$$

其中变换矩阵满足

$$U^{+}U = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\varphi & -\mathrm{jsh}\varphi \\ -\mathrm{jsh}\varphi & \mathrm{ch}\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\varphi & \mathrm{jsh}\varphi \\ \mathrm{jsh}\varphi & \mathrm{ch}\varphi \end{pmatrix} = I \tag{19.1.2}$$

式(1.1.11)可以写成行列式形式

$$\begin{vmatrix} \mathrm{ch}\varphi & \mathrm{jsh}\varphi \\ \mathrm{jsh}\varphi & \mathrm{ch}\varphi \end{vmatrix} = 1 \tag{19.1.3}$$

所以二维 Minkowski 复平面的 Lorentz 群表示为特殊幺正群 $SU(2)$，满足式(19.1.2)正交条件

$$U^{+}U = UU^{+} = I \tag{19.1.4}$$

三维双曲复空间 $X(\mathrm{j}x, \mathrm{j}y, ct)$ 可由二维空间坐标和一维时间坐标构成。取两惯性系相互间以速度 $\vec{v}(v_x, v_y) = v_x\vec{n}_x + v_y\vec{n}_y$ 运动，满足

$$\begin{cases} v_x = v\sin\theta \\ v_y = v\cos\theta \end{cases} \tag{19.1.5}$$

式(19.1.3)和(19.1.5)满足关系

$$\begin{cases} \mathrm{ch}^2\varphi - \mathrm{sh}^2\varphi = 1 \\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \end{cases} \tag{19.1.6}$$

取任一矢量 $\vec{r} = \vec{r}_{/\!/} + \vec{r}_{\perp}$，其中，$\vec{r}_{/\!/}$ 为与两惯性系相互运动方向平行的分量，而 $\vec{r}_{\perp}$

是与相对运动方向垂直的分量。由式(18.3.3)至(18.3.7)，有空间坐标变换关系

$$\vec{r}'_{/\!/} = \mathrm{ch}\varphi(\vec{r}_{/\!/} + \vec{v}t) = \mathrm{ch}\varphi\left[\frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \vec{v}t\right] \tag{19.1.7}$$

$$\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{/\!/} = \vec{r} - (\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}^{-1} = \vec{r} - \frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \tag{19.1.8}$$

时间坐标变换关系为

$$ct' = ct\,\mathrm{ch}\varphi + r\,\mathrm{sh}\varphi \tag{19.1.9}$$

将式(19.1.7)和(19.1.8)两式联立，注意到式(2.1.27)有

$$\begin{cases}\vec{r}' = \vec{r} + (\mathrm{ch}\varphi - 1)\dfrac{(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2} + ct\,\mathrm{sh}\varphi \\ ct' = ct\,\mathrm{ch}\varphi + r\,\mathrm{sh}\varphi\end{cases} \tag{19.1.10}$$

式(19.1.10)可写成矩阵形式

$$X' = U_{\mu\nu}X_{\nu} \tag{19.1.11}$$

其中，$\mu,\nu = 0,1,2$。式(19.1.11)写为

$$\begin{pmatrix}\mathrm{j}x' \\ \mathrm{j}y' \\ ct'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+(\mathrm{ch}\varphi-1)\sin^2\theta & (\mathrm{ch}\varphi-1)\cos\theta\sin\theta & \mathrm{j}\sin\theta\mathrm{sh}\varphi \\ (\mathrm{ch}\varphi-1)\cos\theta\sin\theta & 1+(\mathrm{ch}\varphi-1)\cos^2\theta & \mathrm{j}\cos\theta\mathrm{sh}\varphi \\ \mathrm{j}\sin\theta\mathrm{sh}\varphi & \mathrm{j}\cos\theta\mathrm{sh}\varphi & \mathrm{ch}\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{j}x \\ \mathrm{j}y \\ ct\end{pmatrix} \tag{19.1.12}$$

式(19.1.12)可写成分量形式

$$\begin{cases}x' = x[1+(\mathrm{ch}\varphi-1)\sin^2\theta] + y(\mathrm{ch}\varphi-1)\cos\theta\sin\theta + ct\sin\theta\mathrm{sh}\varphi \\ y' = x(\mathrm{ch}\varphi-1)\cos\theta\sin\theta + y[1+(\mathrm{ch}\varphi-1)\cos^2\theta] + ct\cos\theta\mathrm{sh}\varphi \\ ct' = x\sin\theta\mathrm{sh}\varphi + y\cos\theta\mathrm{sh}\varphi + ct\,\mathrm{ch}\varphi\end{cases} \tag{19.1.13}$$

变换矩阵 U 满足式(19.1.4)的厄米正交条件，则式(19.1.12)满足时空间隔不变量

$$(-\mathrm{j}x' \quad -\mathrm{j}y' \quad ct')\begin{pmatrix}\mathrm{j}x' \\ \mathrm{j}y' \\ ct'\end{pmatrix} = (-\mathrm{j}x \quad -\mathrm{j}y \quad ct)\begin{pmatrix}\mathrm{j}x \\ \mathrm{j}y \\ ct\end{pmatrix} = c^2t^2 - x^2 - y^2 \tag{19.1.14}$$

式(19.1.13)也满足多项式的混合乘法运算

$$X'^{*}_{\mu}X'_{\nu} = X^{*}_{\mu}X_{\nu} = \sum_{\mu,\nu=0}^{2} x^{*}_{\mu}x_{\nu} = c^2t^2 - x^2 - y^2 \tag{19.1.15}$$

变换关系的行列式满足

$$\begin{vmatrix}1+(\mathrm{ch}\varphi-1)\sin^2\theta & (\mathrm{ch}\varphi-1)\cos\theta\sin\theta & \mathrm{j}\sin\theta\mathrm{sh}\varphi \\ (\mathrm{ch}\varphi-1)\cos\theta\sin\theta & 1+(\mathrm{ch}\varphi-1)\cos^2\theta & \mathrm{j}\cos\theta\mathrm{sh}\varphi \\ \mathrm{j}\sin\theta\mathrm{sh}\varphi & \mathrm{j}\cos\theta\mathrm{sh}\varphi & \mathrm{ch}\varphi\end{vmatrix} = 1 \tag{19.1.16}$$

所以式(19.1.10)至(19.1.13)的三维 Lorentz 群为特殊幺正群 $SU(3)$。

四维 Minkowski 复空间 $X(\mathrm{j}x,\mathrm{j}y,\mathrm{j}z,ct)$ 由三维坐标空间和一维时间构成。两惯性系以常速度 $\vec{v}$ 作相对运动，在三维速度球谐坐标中有分量形式

$$\begin{cases} v_x = v\sin\theta\cos\omega \\ v_y = v\sin\theta\sin\omega \\ v_z = v\cos\theta \end{cases} \tag{19.1.17}$$

其中，θ 为速度矢量 $\vec{v}$ 与 z 轴的夹角，ω 为速度矢量 $\vec{v}$ 在 xy 平面投影与 x 轴的夹角。式(19.1.17)满足关系

$$\begin{cases} \sin^2\omega + \cos^2\omega = 1 \\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \end{cases} \tag{19.1.18}$$

式(19.1.7)至(19.1.10)的二维矢量运算规则可扩展到三维矢量的运算规则。满足式(19.1.4)的变换矩阵可写成

$$U = \begin{pmatrix} 1+(\mathrm{ch}\varphi-1)\sin^2\theta\cos^2\omega & (\mathrm{ch}\varphi-1)\sin^2\theta\sin\omega\cos\omega & (\mathrm{ch}\varphi-1)\sin\theta\cos\theta\cos\omega & \mathrm{jsh}\varphi\sin\theta\cos\omega \\ (\mathrm{ch}\varphi-1)\sin^2\theta\sin\omega\cos\omega & 1+(\mathrm{ch}\varphi-1)\sin^2\theta\sin^2\omega & (\mathrm{ch}\varphi-1)\sin\theta\cos\theta\sin\omega & \mathrm{jsh}\varphi\sin\theta\sin\omega \\ (\mathrm{ch}\varphi-1)\sin\theta\cos\theta\cos\omega & (\mathrm{ch}\varphi-1)\sin\theta\cos\theta\sin\omega & 1+(\mathrm{ch}\varphi-1)\cos^2\theta & \mathrm{jsh}\varphi\cos\theta \\ \mathrm{jsh}\varphi\sin\theta\cos\omega & \mathrm{jsh}\varphi\sin\theta\sin\omega & \mathrm{jsh}\varphi\cos\theta & \mathrm{ch}\varphi \end{pmatrix} \tag{19.1.19}$$

对 $X'(\mathrm{j}x',\mathrm{j}y',\mathrm{j}z',ct')$ 和 $X(\mathrm{j}x,\mathrm{j}y,\mathrm{j}z,ct)$，可以验证式(19.1.19)的变换矩阵 U 满足式(19.1.4)的厄米正交条件，有

$$X^{+}(\mathrm{j}x,\mathrm{j}y,\mathrm{j}z,ct)X(\mathrm{j}x,\mathrm{j}y,\mathrm{j}z,ct) = c^2t^2 - r^2 \tag{19.1.20}$$

式(19.1.20)为坐标变换不变量。变换矩阵的行列式满足

$$\begin{vmatrix} 1+(\mathrm{ch}\varphi-1)\sin^2\theta\cos^2\omega & (\mathrm{ch}\varphi-1)\sin^2\theta\sin\omega\cos\omega & (\mathrm{ch}\varphi-1)\sin\theta\cos\theta\cos\omega & \mathrm{jsh}\varphi\sin\theta\cos\omega \\ (\mathrm{ch}\varphi-1)\sin^2\theta\sin\omega\cos\omega & 1+(\mathrm{ch}\varphi-1)\sin^2\theta\sin^2\omega & (\mathrm{ch}\varphi-1)\sin\theta\cos\theta\sin\omega & \mathrm{jsh}\varphi\sin\theta\sin\omega \\ (\mathrm{ch}\varphi-1)\sin\theta\cos\omega\cos\omega & (\mathrm{ch}\varphi-1)\sin\theta\cos\theta\sin\omega & 1+(\mathrm{ch}\varphi-1)\cos^2\theta & \mathrm{jsh}\varphi\cos\theta \\ \mathrm{jsh}\varphi\sin\theta\cos\omega & \mathrm{jsh}\varphi\sin\theta\sin\omega & \mathrm{jsh}\varphi\cos\theta & \mathrm{ch}\varphi \end{vmatrix} = 1 \tag{19.1.21}$$

所以四维 Lorentz 群为特殊幺正群 $SU(4)$。

Minkowski 复空间引入双曲复数，时空变换群的矩阵表示为特殊幺正群 $SU(n)$，这为狭义相对论与量子力学的一元化表述奠定了理论基础。J. von Neumann 将量子力学表述为 Hilbert 空间中厄米算符的运算，建立了量子力学的逻辑体系。J. von Neumann 所建立的量子力学标准体系使微观客体态函数的概率表述与特殊幺正群 $SU(n)$ 相对应，而建立 Hilbert 空间的基本条件是完备的内积空间。由于在各向异性的 Minkowski 空间定义两点间的距离或度量不仅要考虑两点间的线度关系，也要考虑它们之间的角度和方位问题，使具有完备内积空间抽象出的广域 Hilbert 空间具有非欧几何的特点。因此，Lorentz 群与四元数的内积运

算相联系并具有特殊幺正群 $SU(n)$ 形式，使狭义相对论与量子力学的内在联系具有了数学基础。建立狭义相对论和量子力学共同的数学基础，从数学和物理角度应达到一种和谐效果，这种和谐关系应体现在时空性质的完备描述，体现在泛复函数的算式算法以及粒子和场运动方程的表现形式。

19.2　椭圆复空间坐标变换的群表示

二维椭圆复空间的坐标变换关系式(1.2.14)可写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i}x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \mathrm{i}\sin\psi \\ \mathrm{i}\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i}x \\ ct \end{pmatrix} \tag{19.2.1}$$

因为 $\cos^2\psi + \sin^2\psi = 1$，则变换矩阵满足

$$V^+ V = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\mathrm{i}\sin\psi \\ -\mathrm{i}\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \mathrm{i}\sin\psi \\ \mathrm{i}\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} = I \tag{19.2.2}$$

由式(1.2.11)，变换关系的行列式满足

$$\begin{vmatrix} \cos\psi & \mathrm{i}\sin\psi \\ \mathrm{i}\sin\psi & \cos\psi \end{vmatrix} = 1 \tag{19.2.3}$$

所以二维椭圆复平面的坐标变换的群表示为特殊幺正群 $SU(2)$，满足式(2.2.5)正交条件

$$V^+ V = VV^+ = I \tag{19.2.4}$$

三维椭圆复空间 $X(\mathrm{i}x, \mathrm{i}y, ct)$ 可由二维坐标平面和一维时间轴构成。取两惯性系相互间以速度 $v(v_x, v_y)$ 运动，满足式(19.1.5)。取任一矢量 $\vec{r} = \vec{r}_{/\!/} + \vec{r}_{\perp}$，其中两惯性系中相互运动的方向沿 $\vec{r}_{/\!/}$，有矢量的坐标变换关系

$$\vec{r}\,'_{/\!/} = \cos\psi(\vec{r}_{/\!/} + \vec{v}t) = \cos\psi\left[\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \vec{v}t\right] \tag{19.2.5a}$$

$$\vec{r}\,'_{\perp} = \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{/\!/} = \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{v})v^{-1} = \vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \tag{19.2.5b}$$

将式(19.2.5)和(19.2.6)联立，有与式(19.1.6)对应的时空变换关系

$$\begin{cases} \vec{r}\,' = \vec{r} + (\cos\psi - 1)\dfrac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}}{v^2} + ct\sin\psi \\ ct' = ct\cos\psi + r\sin\psi \end{cases} \tag{19.2.6}$$

式(19.2.6)可写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i}x' \\ \mathrm{i}y' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (\cos\psi - 1)\sin^2\theta & (\cos\psi - 1)\cos\theta\sin\theta & \mathrm{i}\sin\theta\sin\psi \\ (\cos\psi - 1)\cos\theta\sin\theta & 1 + (\cos\psi - 1)\cos^2\theta & \mathrm{i}\cos\theta\sin\psi \\ \mathrm{i}\sin\theta\sin\psi & \mathrm{i}\cos\theta\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i}x \\ \mathrm{i}y \\ ct \end{pmatrix}$$

(19.2.7)

式(19.2.7)展成分量形式

$$\begin{cases} x' = x[1+(\cos\psi-1)\sin^2\theta]+y(\cos\psi-1)\cos\theta\sin\theta+ct\sin\theta\sin\psi \\ y' = x(\cos\psi-1)\cos\theta\sin\theta+y[1+(\cos\psi-1)\cos^2\theta]+ct\cos\theta\sin\psi \\ ct' = x\sin\theta\sin\psi+y\cos\theta\sin\psi+ct\cos\psi \end{cases} \tag{19.2.8}$$

式(19.2.8)满足关系式

$$\begin{cases} \sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \\ \sin^2\psi+\cos^2\psi=1 \end{cases} \tag{19.2.9}$$

也满足多项式的混合乘法运算

$$Y'^{*}_{\mu}Y'_{\nu}=Y^{*}_{\mu}Y_{\nu}=\sum_{\mu,\nu=0}^{2}y^{*}_{\mu}y_{\nu}=c^2t^2+x^2+y^2 \tag{19.2.10}$$

式(19.2.7)满足关系式

$$(-\mathrm{i}x' \quad -\mathrm{i}y' \quad ct')\begin{pmatrix}\mathrm{i}x' \\ \mathrm{i}y' \\ ct'\end{pmatrix}=(-\mathrm{i}x \quad -\mathrm{i}y \quad ct)\begin{pmatrix}\mathrm{i}x \\ \mathrm{i}y \\ ct\end{pmatrix} \tag{19.2.11}$$

或

$$x'^2+y'^2+c^2t'^2=x^2+y^2+c^2t^2 \tag{19.2.12}$$

式(19.2.11)和(19.2.12)是椭圆复空间所对应的时空变换不变量，显然不是Minkowski空间的时空间隔不变量。变换矩阵V满足式(19.2.4)厄米正交条件，且行列式有

$$\begin{vmatrix} 1+(\cos\psi-1)\sin^2\theta & (\cos\psi-1)\cos\theta\sin\theta & \mathrm{i}\sin\theta\sin\psi \\ (\cos\psi-1)\cos\theta\sin\theta & 1+(\cos\psi-1)\cos^2\theta & \mathrm{i}\cos\theta\sin\psi \\ \mathrm{i}\sin\theta\sin\psi & \mathrm{i}\cos\theta\sin\psi & \cos\psi \end{vmatrix}=1 \tag{19.2.13}$$

所以式(19.2.6)至(19.2.8)的三维椭圆复空间坐标变换群为特殊幺正群$SU(3)$。

四维椭圆复空间$X(\mathrm{i}x,\mathrm{i}y,\mathrm{i}z,ct)$由三维坐标空间和一维时间构成。两惯性系以常速度$\vec{v}$作相对运动，在三维速度球谐坐标中满足式(19.1.17)和(19.2.9)关系，式(19.2.4)的变换矩阵V可写成

$$V=\begin{pmatrix} 1+(\cos\psi-1)\sin^2\theta\cos^2\omega & (\cos\psi-1)\sin^2\theta\sin\omega\cos\omega & (\cos\psi-1)\sin\theta\cos\theta\cos\omega & \mathrm{i}\sin\psi\sin\theta\cos\omega \\ (\cos\psi-1)\sin^2\theta\sin\omega\cos\omega & 1+(\cos\psi-1)\sin^2\theta\sin^2\omega & (\cos\psi-1)\sin\theta\cos\theta\sin\omega & \mathrm{i}\sin\psi\sin\theta\sin\omega \\ (\cos\psi-1)\sin\theta\cos\theta\cos\omega & (\cos\psi-1)\sin\theta\cos\theta\sin\omega & 1+(\cos\psi-1)\cos^2\theta & \mathrm{i}\sin\psi\cos\theta \\ \mathrm{i}\sin\psi\sin\theta\cos\omega & \mathrm{i}\sin\psi\sin\theta\sin\omega & \mathrm{i}\sin\psi\cos\theta & \cos\psi \end{pmatrix} \tag{19.2.14}$$

对$Y'(\mathrm{i}x',\mathrm{i}y',\mathrm{i}z',ct')$和$Y(\mathrm{i}x,\mathrm{i}y,\mathrm{i}z,ct)$，可以验证式(19.2.14)的变换矩阵$V$满足式(19.2.4)的厄米正交条件，有

$$Y^{+}(\mathrm{i}x,\mathrm{i}y,\mathrm{i}z,ct)Y(\mathrm{i}x,\mathrm{i}y,\mathrm{i}z,ct)=c^2t^2+r^2 \tag{19.2.15}$$

式(19.2.15)为坐标变换不变量。变换矩阵的行列式满足

$$\begin{vmatrix} 1+(\cos\psi-1)\sin^2\theta\cos^2\omega & (\cos\psi-1)\sin^2\theta\sin\omega\cos\omega & (\cos\psi-1)\sin\theta\cos\theta\cos\omega & \mathrm{i}\sin\psi\sin\theta\cos\omega \\ (\cos\psi-1)\sin^2\theta\sin\omega\cos\omega & 1+(\cos\psi-1)\sin^2\theta\sin^2\omega & (\cos\psi-1)\sin\theta\cos\theta\sin\omega & \mathrm{i}\sin\psi\sin\theta\sin\omega \\ (\cos\psi-1)\sin\theta\cos\omega\cos\omega & (\cos\psi-1)\sin\theta\cos\theta\sin\omega & 1+(\cos\psi-1)\cos^2\theta & \mathrm{i}\sin\psi\cos\theta \\ \mathrm{i}\sin\psi\sin\theta\cos\omega & \mathrm{i}\sin\psi\sin\theta\sin\omega & \mathrm{i}\sin\psi\cos\theta & \cos\psi \end{vmatrix} = 1 \tag{19.2.16}$$

所以四维椭圆复时空间所对应的坐标变换群为特殊幺正群 $SU(4)$。椭圆复空间坐标变换群为特殊幺正群在量子力学中得到应用，但由经典量子力学过渡到相对论量子力学时，时空性质的转换是一个值得研究的问题，因为椭圆复时空间的等值变换并不是时空间隔不变量，坐标变换关系也不是 Lorentz 变换。

19.3　γ_μ 旋量代数与群表示

在双曲复域引入二阶算符(有别于 Pauli 算符)

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix},\quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix},\quad \sigma_z = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \tag{19.3.1}$$

满足关系式

$$\sigma_i^+\sigma_i = \sigma_i\sigma_i^+ = 1,\quad (i = 1,2,3) \tag{19.3.2}$$

或

$$[\sigma_i^+\sigma_k]_+ = \sigma_i^+\sigma_k + \sigma_k\sigma_i^+ = 2\delta_{ik} \tag{19.3.3}$$

式(19.3.1)可组成 t'Hooft 矩阵 $\gamma_i(i = 1,2,3)$，其中，

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} & -\sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \tag{19.3.4a}$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} & \sigma_y \\ -\sigma_y & \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & -1 \\ -1 & & & \\ & 1 & & \end{bmatrix} \tag{19.3.4b}$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_z & \\ & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{bmatrix} \tag{19.3.4c}$$

取 $\gamma_4 = \gamma_0 = I$ 为单位矩阵，与 γ_i 一起构成 $\gamma_\mu(\mu = 1,2,3,4)$ 矩阵，满足关系

$$\gamma_i^+ = -\gamma_i,\quad \gamma_4^+ = \gamma_4 \tag{19.3.5}$$

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial X_\mu}\right)^+ = \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial X_\mu} \tag{19.3.6}$$

$$\gamma_\mu^+\gamma_\mu = \gamma_\mu\gamma_\mu^+ = 1 \tag{19.3.7}$$

$$\gamma_i\gamma_i = -1, \quad (i = 1,2,3) \tag{19.3.8}$$

$$\gamma_\mu^+\gamma_\nu + \gamma_\nu^+\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \tag{19.3.9}$$

γ_i 构成 $SU(3)$ 群，$\gamma_\mu(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_0)$ 满足乘法表 19.1

表 19.1　γ_μ 乘法表

	γ_0	γ_1	γ_2	γ_3
γ_0	γ_0	γ_1	γ_2	γ_3
γ_1	γ_1	$-\gamma_0$	$-\gamma_3$	γ_2
γ_2	γ_2	γ_3	$-\gamma_0$	$-\gamma_1$
γ_3	γ_3	$-\gamma_2$	γ_1	$-\gamma_0$

表 19.1 中 γ_μ 矩阵满足性质

$$\gamma_1\gamma_2 = -\gamma_3, \quad \gamma_2\gamma_1 = \gamma_3, \quad \gamma_2\gamma_3 = -\gamma_1, \quad \gamma_3\gamma_2 = \gamma_1, \quad \gamma_3\gamma_1 = -\gamma_2, \quad \gamma_1\gamma_3 = \gamma_2 \tag{19.3.10}$$

或

$$\gamma_i\gamma_j = -\varepsilon_{ijk}\gamma_k, \quad (i,j,k = 1,2,3) \tag{19.3.11}$$

$$(\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i) = 0, \quad (i \neq j) \tag{19.3.12}$$

并有

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_0 \tag{19.3.13}$$

所以 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_0$ 为四元数，而 Dirac 给出的 γ_μ 函数为十六元数，前者比后者具有更高的对称性，这也是第十六章中由 Dirac 旋量方程导出四维 Maxwell 矢量方程的原因。

γ_μ 矩阵作为描述四维时空性质的群表示，可以在 Minkowski 空间给出各个象限的时空变换关系，式(2.2.12)可改写成坐标变换形式

$$\begin{pmatrix} j\gamma_1 x' \\ j\gamma_2 y' \\ j\gamma_3 z' \\ \gamma_0 ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_x^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_y}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_z}{v^2} & \frac{jv_x}{\alpha c} \\ \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_y}{v^2} & 1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_y^2}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_yv_z}{v^2} & \frac{jv_y}{\alpha c} \\ \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_xv_z}{v^2} & \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_yv_z}{v^2} & 1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{v_z^2}{v^2} & \frac{jv_z}{\alpha c} \\ \frac{jv_x}{\alpha c} & \frac{jv_y}{\alpha c} & \frac{jv_z}{\alpha c} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j\gamma_1 x \\ j\gamma_2 y \\ j\gamma_3 z \\ \gamma_0 ct \end{pmatrix} \tag{19.3.14}$$

对应分量形式为

$$\begin{cases}\gamma_1 x' = \gamma_1 x + \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{\gamma(\vec{r}\cdot\vec{v})v_x}{v^2}\gamma_1 x + \dfrac{v_x}{\alpha}\gamma_0 t \\ \gamma_2 y' = \gamma_2 y + \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{\gamma(\vec{r}\cdot\vec{v})v_y}{v^2}\gamma_1 x + \dfrac{v_y}{\alpha}\gamma_0 t \\ \gamma_3 z' = \gamma_3 z + \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{\gamma(\vec{r}\cdot\vec{v})v_z}{v^2}\gamma_1 x + \dfrac{v_z}{\alpha}\gamma_0 t \\ \gamma_0 t' = \dfrac{1}{\alpha}\left(\gamma_0 t + \gamma\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c^2}\gamma_1 x\right)\end{cases} \tag{19.3.15}$$

式(19.3.14)和(19.3.15)刻画了 Minkowski 几何的时空性质，可以说 γ_μ 矩阵与四维时空间的遍历性有关。将式(19.3.14)作内积，有

$$\begin{aligned}&(-\mathrm{j}\gamma_1^\dagger x' \quad -\mathrm{j}\gamma_2^\dagger y' \quad -\mathrm{j}\gamma_3^\dagger z' \quad \gamma_0^\dagger ct')\begin{pmatrix}\mathrm{j}\gamma_1 x'\\ \mathrm{j}\gamma_2 y'\\ \mathrm{j}\gamma_3 z'\\ \gamma_0 ct'\end{pmatrix}\\ &= (-\mathrm{j}\gamma_1^\dagger x \quad -\mathrm{j}\gamma_2^\dagger y \quad -\mathrm{j}\gamma_3^\dagger z \quad \gamma_0^\dagger ct)\begin{pmatrix}\mathrm{j}\gamma_1 x\\ \mathrm{j}\gamma_2 y\\ \mathrm{j}\gamma_3 z\\ \gamma_0 ct\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{19.3.16}$$

注意到式(19.3.7)，则式(19.3.16)可写为时空间隔不变量形式

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{19.3.17}$$

显然，时空变换关系式(19.3.14)的群表示为 $SU(4)$ 群。

在四维椭圆空间，γ_μ 矩阵作为基元 n_μ 的四维矩阵表示可构成与式(18.5.1)类同的 Hermite 四元数

$$Q(R) = \{a:\ a = a_t\gamma_0 + a_x\gamma_1 + a_y\gamma_2 + a_z\gamma_3;\ a_t, a_x, a_y, a_z \in \mathbf{R}\} \tag{19.3.18}$$

注意到 γ_i 的性质，式(19.3.8)与(18.5.2)类同，式(19.3.10)与(18.5.3)类同。取 $a_t = ct, a_x = x, a_y = y, a_z = z$，变换矩阵(19.3.14)改写为

$$\begin{pmatrix}\gamma_1 x'\\ \gamma_2 y'\\ \gamma_3 z'\\ \gamma_0 ct'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_x^2}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_x v_y}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_x v_z}{v^2} & \dfrac{v_x}{\alpha c}\\ \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_x v_y}{v^2} & 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_y^2}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_y v_z}{v^2} & \dfrac{v_y}{\alpha c}\\ \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_x v_z}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_y v_z}{v^2} & 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_z^2}{v^2} & \dfrac{v_z}{\alpha c}\\ \dfrac{v_x}{\alpha c} & \dfrac{v_y}{\alpha c} & \dfrac{v_z}{\alpha c} & \dfrac{1}{\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1 x\\ \gamma_2 y\\ \gamma_3 z\\ \gamma_0 ct\end{pmatrix} \tag{19.3.19}$$

时空间隔不变量为

$$(\gamma_1^+ x' \quad \gamma_2^+ y' \quad \gamma_3^+ z' \quad \gamma_0^+ ct')\begin{pmatrix}\gamma_1 x'\\ \gamma_2 y'\\ \gamma_3 z'\\ \gamma_0 ct'\end{pmatrix} = (\gamma_1^+ x \quad \gamma_2^+ y \quad \gamma_3^+ z \quad \gamma_0^+ ct)\begin{pmatrix}\gamma_1 x\\ \gamma_2 y\\ \gamma_3 z\\ \gamma_0 ct\end{pmatrix} \tag{19.3.20}$$

或

$$Q'^+ Q' = c^2 t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = Q^+ Q \tag{19.3.21}$$

式(19.3.21)与(18.5.5)类同。时空变换关系式(19.3.19)的群也表示为 $SU(4)$ 群。

19.4　三维时空的单位球

Minkowski 复空间和 Euclidean 复空间可分别引入两类超复数 $X(ct, \mathrm{j}\vec{r})$ 和 $Y(ct, \mathrm{i}\vec{r})$，其中，$\vec{r}$ 为三维 Euclidean 空间位矢。将两类超复数分别作内积，它们的单位模在实空间 $E(ct, \vec{r})$ 通过联立方程(2.1.30)可直观地用单位球的半径表示。作为特例讨论三维复空间的单位球，可建立两类三元数模方的联立方程

$$X^* \cdot X = c^2 t^2 - x^2 - y^2 = c^2 t'^2 + x'^2 + y'^2 = Y^* \cdot Y = 1 \quad (19.4.1)$$

Euclidean 复空间 $E(ct, \mathrm{i}\vec{r})$ 中，超复数 $Y(ct, \mathrm{i}\vec{r})$ 的虚部 $\vec{r}$ 看做二维实 Euclidean 平面 (x, y) 中的位矢，有 $\vec{r} = x\vec{n}_1 + y\vec{n}_2$，$r^2 = x^2 + y^2$。在 $E(ct, \mathrm{i}\vec{r})$ 的横轴 ct 处取截面 $(\mathrm{i}\vec{x}, \mathrm{i}\vec{y})$，$\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 为二维空间坐标。显然截面 $(\mathrm{i}\vec{x}, \mathrm{i}\vec{y})$ 中所有的位矢，包括 $\mathrm{i}\vec{r}$ 都与 ct 正交，$E(ct, \mathrm{i}\vec{r})$ 可看做 Euclidean 三维正交复空间。取复向量 $Y = ct + \mathrm{i}\vec{r}$，向量的模为

$$|Y| = L = (c^2 t^2 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \tag{19.4.2}$$

当 $L = 1$，在三维实空间 $E(ct, \vec{r})$ 中对应单位球，如图 19.1。满足

$$c^2 t^2 + x^2 + y^2 = 1 \quad (19.4.3)$$

同理，在三维 Minkowski 复空间中，也将超复数 $X(ct, \mathrm{j}\vec{r})$ 的虚部 $\vec{r}$ 看做二维实 Euclidean 平面 (x, y) 中的位矢。超复数的实部 ct 与虚部 $\vec{r}$ 正交。取复向量 $X = ct + \mathrm{j}\vec{r}$，超复数的模为

$$|X| = R = (c^2 t^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \tag{19.4.4}$$

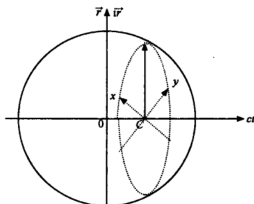


图 19.1　三维 Euclidean 空间的二维截面图

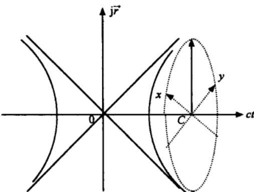


图 19.2　三维 Minkowski 空间中二维截面图

当 $R=1, |ct|>|\vec{r}|$，在三维双曲复空间 $H(ct, \mathrm{j}\tilde{x}, \mathrm{j}\tilde{y})$ 的类时区是以 ct 为对称轴的一对旋转双曲面

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 = 1 \quad (19.4.5)$$

双曲面上的单位模对应三维实空间 $E(ct, \vec{r})$ 中式(19.4.3)的单位球。将式(19.4.5)与(19.4.3)联立即为式(19.4.1)。

图 19.2 中类时区 $|ct|>|\vec{r}|$，在三维 Minkowski 复空间 ct 轴的 C 点处作二维截面。二维截面上 $(\mathrm{j}x, \mathrm{j}y)$ 中所有位矢包括 $\mathrm{j}\vec{r}$ 都与 ct 正交，二维截面 $(\mathrm{j}x, \mathrm{j}y)$ 可看做三维旋转双曲面在 C 点处的正交投影。在 $H(ct, \mathrm{j}\tilde{x}, \mathrm{j}\tilde{y})$ 的类光区，对应三维旋转锥面 $c^2t^2 - x^2 - y^2 = 0$。旋转锥面在 ct 轴的正交投影截面为平面 $(\mathrm{j}x, \mathrm{j}y)$，截面上的空间矢量也都与 ct 轴垂直，并有关系 $|\vec{r}| = |ct|$。

19.5　四维球谐函数和单位球

四维 Euclidean 复空间 $E(ct, \mathrm{i}\vec{r})$ 中，超复数 $Y(ct, \mathrm{i}\vec{r})$ 或 $Y = ct + \mathrm{i}\vec{r}$ 的虚部是三维空间位矢，$\vec{r} = x\vec{n}_1 + y\vec{n}_2 + z\vec{n}_3, r^2 = x^2 + y^2 + z^2$。四维 Euclidean 复空间的模为

$$|Y| = L = (c^2t^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \quad (19.5.1)$$

式(19.5.1)在四维实 Euclidean 空间 $E(ct, \vec{r})$ 中为坐标变换不变量。$L=1$ 时为四维单位球：

$$L^2 = c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (19.5.2)$$

四维 Euclidean 复空间 $E(ct, \mathrm{i}\vec{r})$ 可看做二维超复平面，其中二维超复数 $Y = ct + \mathrm{i}\vec{r}$ 的实部为 ct，虚部为 $\vec{r}$。以原点为圆心，以 $L=1$ 为半径，在超复平面可画单位圆，如图 19.3。将 $\vec{r}$ 看做三维空间位矢，则四维空间的单位球与二维超复平面的单位圆是类同的。在超复平面 ct 轴的 C 点处取垂线交单位圆，这条单位圆的截线在四维 Euclidean 实空间中就等同于半径为 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ 的

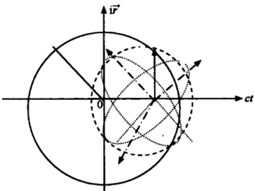


图 19.3　四维 Euclidean 复空间的三维截面图

球面，且该球面的位矢 $\vec{r}$ 以及坐标轴 x,y,z 均与 ct 轴正交。我们可以这样来想象，两个正交的二维单位圆可以构成一个三维单位球，而一个二维的单位圆与一个三维单位球正交，就可以构成一个四维单位球。四维球在三维空间的投影为一个三维球，三维球的空间坐标及全部空间位矢都与时间坐标正交。如果我们有一个四维的西瓜，当把它切开时可以发现，四维西瓜的切面不是平面，而是三维球面，这个球面沿时间轴方向的直径长短与切瓜速度快慢有关。

同样可以分析四维 Minkowski 复空间的单位模曲面。在双曲超平面 $H(\alpha,\mathrm{j}\vec{r})$，类时区 $|\alpha|>|\vec{r}|$ 内，超复数 $X=\alpha+\mathrm{j}\vec{r}$ 的虚部 $\vec{r}=x\vec{n}_1+y\vec{n}_2+z\vec{n}_3$，$r^2=x^2+y^2+z^2$。四维模为

$$|X|=R=(|c^2t^2-x^2-y^2-z^2|)^{\frac{1}{2}} \qquad (19.5.3)$$

当 $R=1$，四维 Minkowski 复空间 $H(\alpha,\mathrm{j}x,\mathrm{j}y,\mathrm{j}z)$ 类时区对应一对以 α 为对称轴的单位双曲旋转面

$$c^2t^2-x^2-y^2-z^2=1 \qquad (19.5.4)$$

四维双曲旋转面在时间轴的横截面为三维球面，如图 19.4。式(19.4.1)可推广到四维双曲复空间，由 Gudemannian 函数，四维 Minkowski 复空间的类时区与四维 Euclidean 复空间的全空间可建立起一一对应的同构关系，使 Minkowski 复空间四维单位模曲面可用四维实 Euclidean 空间 $E(\alpha,\vec{r})$ 的四维单位球等效表示。

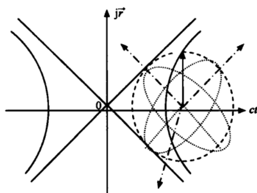


图 19.4　四维双曲复空间的三维截面图

当 $|\alpha|<|\vec{r}|$ 时对应类空区，取 ϕ 为相对于 $j\vec{r}$ 轴的辐角，由式(1.1.24)有

$$\mathrm{ch}^2\phi-\mathrm{sh}^2\phi=1 \qquad (19.5.5)$$

在二维超复平面中，式(19.5.5)为以 $\mathrm{j}\vec{r}$ 为对称轴的双曲线方程。在四维双曲复空间的类空区，式(19.5.5)等效于四维单位双曲旋转面

$$c^2t^2-x^2-y^2-z^2=-1 \qquad (19.5.6)$$

式(19.5.6)为四维双曲复空间类空区所对应的时空间隔不变量。

当 $|\alpha|=|\vec{r}|$ 时，对应类光区，有关系

$$|\mathrm{ch}\varphi|=|\mathrm{sh}\varphi|=|\mathrm{ch}\phi|=|\mathrm{sh}\phi| \qquad (19.5.7)$$

或

$$c^2t^2-x^2-y^2-z^2=0 \qquad (19.5.8)$$

式(19.5.7)和(19.5.8)为式(19.5.4)及(19.5.6)的渐近锥面。作 α 轴的垂直截面，得到四维渐近锥面的横断面亦为三维球面 $c^2t^2=x^2+y^2+z^2$。四维双曲复空间的类光区与四维实 Euclidean 空间 $E(\alpha,\vec{r})$ 的原点相对应，也就是说，Minkows-

ki 复空间的类光区在 Euclidean 复空间没有连通的几何对应区域。由于类光区在物理中为类光粒子的对应区域，如果能描述类光区局域性质，就可以拓展数学和物理的研究领域，这也是建立相对论和量子力学的统一数学框架的切入点。

19.6 四维球的面积和体积

为了更好地理解四维球的面积和体积的计算方法，作为特例，我们首先讨论三维时空球的面积和体积。三维 Euclidean 空间 $E(ct,\vec{r})$ 可以写成球坐标形式 $E(L,\theta,\psi)$，满足关系

$$\begin{cases} L=(c^2t^2+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \psi=\tan^{-1}\dfrac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{ct}=\tan^{-1}\dfrac{r}{ct} \\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{19.6.1}$$

$$\begin{cases} x=L\sin\theta\sin\psi \\ y=L\cos\theta\sin\psi \\ ct=L\cos\psi \end{cases} \tag{19.6.2}$$

取三维体积元 $\mathrm{d}V=L^2\sin\psi\mathrm{d}L\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi$，则三维时空球的体积和面积可分别写作

$$V=\int_0^L L^2\mathrm{d}L\int_0^\pi\sin\psi\mathrm{d}\psi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}\pi L^3 \tag{19.6.3}$$

$$S=L^2\int_0^\pi\sin\psi\mathrm{d}\psi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=4\pi L^2 \tag{19.6.4}$$

四维 Euclidean 实空间可以写成相应的球坐标形式 $E(L,\theta,\bar{\omega},\psi)$，满足关系

$$\begin{cases} L=(c^2t^2+x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \\ \psi=\tan^{-1}\left[\dfrac{1}{ct}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \theta=\tan^{-1}\left[\dfrac{1}{z}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \bar{\omega}=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases} \tag{19.6.5}$$

$$\begin{cases} x=L\sin\theta\sin\bar{\omega}\sin\psi \\ y=L\sin\theta\cos\bar{\omega}\sin\psi \\ z=L\cos\theta\sin\psi \\ ct=L\cos\psi \end{cases} \tag{19.6.6}$$

$$\begin{cases}\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\\ \sin^2\bar{\omega}+\cos^2\bar{\omega}=1\\ \sin^2\psi+\cos^2\psi=1\end{cases}\tag{19.6.7}$$

式(19.6.5)至(19.6.7)是四维球坐标形式 $E(L,\theta,\bar{\omega},\psi)$。取四维体积元

$$\mathrm{d}V=\prod_{i=1}^{4}\mathrm{d}s_i=\prod_{i=1}^{4}H_i\mathrm{d}q_i\tag{19.6.8}$$

其中，

$$H_i=\left|\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial ct}{\partial q_i}\right)^2\right|^{\frac{1}{2}}\tag{19.6.9}$$

有

$$\begin{cases}H_L=1\\ H_\theta=L\sin\psi\\ H_\omega=L\sin\theta\sin\psi\\ H_\psi=L\end{cases}\tag{19.6.10}$$

则四维空间的体积元为

$$\mathrm{d}V=L^3\sin\theta\sin^2\psi\mathrm{d}L\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\bar{\omega}\mathrm{d}\psi\tag{19.6.11}$$

四维单位球的体积和面积可分别写作

$$V=\int_0^L L^3\mathrm{d}L\int_0^\pi\sin^2\psi\mathrm{d}\psi\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\bar{\omega}=\frac{1}{2}\pi^2L^4=\frac{1}{2}\pi^2\ (c^2t^2+r^2)^2\tag{19.6.12}$$

$$S=L^3\int_0^\pi\sin^2\psi\mathrm{d}\psi\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\bar{\omega}=2\pi^2L^3=2\pi^2\ (c^2t^2+r^2)^{\frac{3}{2}}\tag{19.6.13}$$

四维球的半径与时间有关，三维球可看做是四维球在三维空间的投影。

第二十章　Minkowski 复空间的代数结构

奇点和迷向矢是数学中的一个难题，也是现代物理学涉及的一个关键问题，它可能是打开相对论和量子力学一元化表述的钥匙。Hawking 想通过对弯曲 Riemann时空的奇异区进行时空量子化并给出度量，从而能建立量子引力理论，使奇点由于量子效应而不再出现，并解决广义相对论与量子力学的关联问题，但这些努力至今还未让人看到希望的曙光。其实，量子力学并没有建立在弯曲的 Riemann 时空中，奇点也不仅是弯曲时空关注的焦点，平直 Minkowski 时空的类光区就是一类无限大奇点或迷向区。尽管 Minkowski 时空与 Riemann 时空的奇点问题具有较大区别，但 Minkowski 空间类时区与类光区的联系，可能为寻找狭义相对论和量子理论的共同数学基础提供了一个突破口，为有静止质量的微观客体与类光粒子之间的耦合找到一个具有深层次内在关联的几何解释。

从数学角度分析 Minkowski 时空性质，首先应定义时空元数的运算规则，赋予四维空间以代数结构，建立一套非欧空间的公理体系，进而建立广域泛函分析的系统理论。将类时区和类光区进行定向量子化，找出类光区和类时区之间的几何关联，可能为解决奇点问题乃至建立狭义相对论与量子理论一元化表述奠定数学基础。在以下几章中试图用 Minkowski 复时空为原空间，建立一套与非欧几何相对应的代数结构和分析结构，为量子力学找到一个涵盖非欧几何、代数以及泛函分析并能与狭义相对论通用的数学基础。与 Hawking 不同的是，这套理论对应的是平直 Minkowski 复时空，而不是弯曲 Riemann 时空。我们追寻的目标是狭义相对论与量子理论的一元化表述，而不是广义相对论与量子力学的关联问题。

20.1　Minkowski 复平面的对称性与半线性空间

将二维复平面 H 与 Minkowski 几何相对应，按狭义相对论中对 Minkowski 几何平面的区域分类，亚光速区称为类时区，超光速区称类空区，依次用 $C_i(i=1,\cdots,8)$ 表示；光或电磁场对应区域为类光区，用 $\Xi_i(i=1,\cdots,4)$ 表示，复平面 $H=C\cup\Xi$。

图 20.1 中，C 被 Ξ 和坐标轴分割成八部分，依次记为 $C_1,C_2,\cdots,C_8$；Ξ 被 C 分成四部分，依次记为 $\Xi_1,\cdots,\Xi_4$。将复数 H 看做实域 R 上二维空间，由式(1.1.12)，分别在 $C_i(i=1,2,\cdots,8)$ 和 $\Xi_k(k=1,\cdots,4)$ 中对复数作加法运算，满足加法子半群的条件；如数乘运算记为 $f:R\times H\to H,(a,\alpha)\to a\alpha$，在双曲复平面可抽象出半

线性空间。

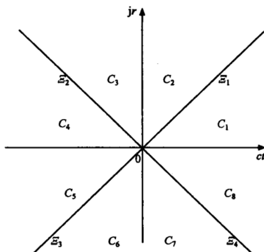


图 20.1　双曲复平面的区域分类

定义 20.1　设 S 为复数 X 的含有零元的加法子半群，F 是非负全体所成集。定义数乘运算，$F\times S\to S$，满足：

(1) $(ab)X=a(bX)$

(2) $(a+b)X=aX+bX$

(3) $a(X+Y)=aX+aY$

(4) $1X=X$

则称 S 为半线性空间。

定理 20.1　$C_i(i=1,2,\cdots,8)$ 和 $\Xi_k(k=1,\cdots,4)$ 均为 H 的含有零元的加法子半群。

证明：　复平面 $H=C\cup\Xi$，由于每一个 $C_i(i=1,2,\cdots,8)$ 和 $\Xi_k(k=1,\cdots,4)$ 均含有零元，故只需再证它们为 H 的加法子半群即可。先证 C_1 为 H 的加法子半群，$\forall a+\mathrm{j}b,c+\mathrm{j}d\in C_1$，当 $a+\mathrm{j}b$ 与 $c+\mathrm{j}d$ 至少有一项为零元时，显然有 $(a+\mathrm{j}b)+(c+\mathrm{j}d)\in C_1$；当 $a+\mathrm{j}b$ 及 $c+\mathrm{j}d$ 均不为零元时，由 $a>b\geqslant 0$，$c>d\geqslant 0$ 可知，$(a+c)>(b+d)\geqslant 0$，从而，$(a+\mathrm{j}b)+(c+\mathrm{j}d)=(a+c)+\mathrm{j}(b+d)\in C_1$，故 C_1 为 H 的加法子半群。同样可证，$C_i(i=2,\cdots,8)$ 和 $\Xi_k(k=1,\cdots,4)$ 为 H 的加法子半群。

定理 20.2　$C_i(i=1,2,\cdots,8)$ 和 $\Xi_k(k=1,\cdots,4)$ 均为 H 的半线性空间。

证明：　先证 C_1 为半线性空间。由于 C_1 为 H 的含有零元的加法子半群，定义数乘运算 $g:F\times C_1\to C_1$ 为 $f|_{F\times C_1}$（f 在 $F\times C_1$ 上的限制），则 $\forall K\in F,a+\mathrm{j}b,c+\mathrm{j}d\in C_1$，有 $K(a+\mathrm{j}b)\in C_1$，且满足定义 20.1 的条件(1)～(4)，从而，C_1 为半线性空间。同样可证，$C_i(i=2,\cdots,8)$ 和 $\Xi_k(k=1,\cdots,4)$ 为半线性空间。

在 C_1 中，时空点 X 的共轭点 $X^* \subset C_8$，乘法逆元 X^{-1} 也在 C_8 中。同理，时空点 X 的加法负元 $-X$ 在 C_5 中。因此，在 H 中均可找到 $C_i(i=1,2,\cdots,8)$ 和 $\Xi_k(k=1,\cdots,4)$ 的乘法逆元和加法负元，从而可以在 H 中定义乘法和减法。

定义 20.2 设 S 为半线性空间，S 的所有共轭元所成集记为 S^*，如 S^* 构成半线性空间，称 S^* 为 S 的共轭半线性空间；S 的所有负元所成集记为 $-S$，如 $-S$ 构成半线性空间，称 $-S$ 为 S 的负半线性空间；S 的所有逆元所成集记为 S^{-1}，如 S^{-1} 构成半线性空间，称 S^{-1} 为 S 的逆半线性空间。

在复平面 H 中，S^*、$-S$ 及 S^{-1} 构成半线性空间是显然的。其中，C_1 与 C_8、C_2 与 C_7、C_3 与 C_6、C_4 与 C_5、Ξ_1 与 Ξ_4、Ξ_2 与 Ξ_3 互为共轭半线性空间；C_1 与 C_5、C_2 与 C_6、C_3 与 C_7、C_4 与 C_8、Ξ_1 与 Ξ_3、Ξ_2 与 Ξ_4 互为负半线性空间；C_1 与 C_8、C_2 与 C_3、C_4 与 C_5、C_6 与 C_7 互为逆半线性空间。

定义 20.3 设 S_1、S_2 均为半线性空间，若存在双射 $u: S_1 \to S_2$ 满足：

(1) $u(\alpha+\beta)=u(\alpha)+u(\beta)$

(2) $u(a\alpha)=au(\alpha)$

则称半线性空间 S_1、S_2 同构。

定理 20.3 作为 H 中半线性空间，$C_i(i=2,\cdots,8)$ 两两同构，$\Xi_k(k=1,\cdots,4)$ 两两同构。

证明： 取映射

$$f_1: C_1 \to C_2, a+\mathrm{j}b \to b+\mathrm{j}a$$
$$f_2: C_2 \to C_3, a+\mathrm{j}b \to -a+\mathrm{j}b$$
$$f_3: C_3 \to C_4, a+\mathrm{j}b \to -b-\mathrm{j}a$$
$$f_4: C_4 \to C_5, a+\mathrm{j}b \to a-\mathrm{j}b$$
$$f_5: C_5 \to C_6, a+\mathrm{j}b \to b+\mathrm{j}a$$
$$f_6: C_6 \to C_7, a+\mathrm{j}b \to -a+\mathrm{j}b$$
$$f_7: C_7 \to C_8, a+\mathrm{j}b \to -b-\mathrm{j}a$$

f_1 至 f_7 均为半线性空间的同构映射。同理，对类光区取映射

$$m_1: \Xi_1 \to \Xi_2, a+\mathrm{j}b \to -a+\mathrm{j}b$$
$$m_2: \Xi_2 \to \Xi_3, a+\mathrm{j}b \to a-\mathrm{j}b$$
$$m_3: \Xi_3 \to \Xi_4, a+\mathrm{j}b \to -a+\mathrm{j}b$$

也为半线性空间的同构映射。

20.2 Minkowski 复平面的奇异性

在复平面 H，S 和 $-S$ 互为负半线性空间，$\{X_n\}$ 为 S 中的点列，$\{-X_m\}$ 为 $-S$ 中的点列。将 X_n-X_m 看做是 S 中元数 X_n 与 $-S$ 中元数 $-X_m$ 的直和，亦可看做 S 中元数 X_n 与 X_m 的减法，在复平面 H 可定义减法运算。

定义 20.4　复平面 H，设 S、$-S \subset H$ 互为负半线性空间，取元数 $X_n \in S$，$-X_m \in -S$，S 与 $-S$ 的直和 $S \oplus -S \subset H$，称 $X_n - X_m \in H$，为 H 的减法，H 构成线性空间。

复平面 H 中，复数的减法具有很重要的几何意义和物理意义。例如，狭义相对论中经常说两个未来物理事件 X_1 和 X_2 的时空间隔为 $X_2 - X_1$，在几何上就是两个时空点的差值。如取 S 对应类时区的未来时光锥，则 $-S$ 应为过去时光锥，但 S 和 $-S$ 的直和曲解了物理事件时空间隔的时间含义。这涉及时间的流向，也涉及 Minkowski 时空的物理诠释，在第三章进行的时间正定性分析与 Minkowski 时空的代数性质有关。另外，半线性空间中减法不封闭，$X_n - X_m = X_l \in H$，在 S 中，X_n 与 X_m 的连线处于不同的时空方位，决定了 X_l 的取值不同。即 X_l 在 H 中可分别属于类时区、类光区及类空区，这是 Minkowski 复平面所独有的奇异特性。由于复平面 H 具有时空方向异性的特点，使该空间的连通区域 C 与零因子区域 Ξ 取得了几何上的关联，物理上可能为有静质量粒子与光量子的耦合提供了理论诠释。

定义 20.5　取 $\forall X \in C, \theta \in \Xi, a, d \in R$。形如 aX 的元数称为同类因子，形如 $d\theta$ 的元数称为同类零因子。

在复平面 H 的同一半线性空间 S 中，元数的减法(或 S 的元数与 $-S$ 元数的直和)具有如下性质：

性质 1　若 θ_m、$\theta_n \in \Xi_i (i = 1,2,3,\cdots)$，且为同类零因子，$d \in R$，则 $\theta_n - \theta_m = d\theta_0 \in \Xi$，亦为同类零因子，$\theta_0$ 为单位零因子。

性质 2　取 $d > 0, \theta_0 \in \Xi$，若 X_n、$X_m \in C_i (i = 1,2,3,\cdots)$，且为同类因子，满足

$$X_n - X_m = d\theta_0 \in \Xi \tag{20.2.1}$$

则过 X_n 及 X_m 两点的直线(称为世界线)平行或垂直于 Ξ。

性质 3　取 $a > 0$，若 X_0、X_n、$X_m \in C_i (i = 1,\cdots)$，且为同类因子，满足

$$X_n - X_m = aX_0 \in C_i \tag{20.2.2}$$

则过 X_n 及 X_m 两点的直线，不平行且不垂直于 Ξ。

性质 3 中，取 $X_0, X_1, X_2, \cdots, X_n \in C_i (i = 1,2,3,\cdots)$，在同一直线，满足式(20.2.2)，且复元数 $X_l = a_l X_0 \in C_i (l = 1,\cdots)$ 实部与虚部的比值相同。由同类元的概念可抽象出同类集、同类族以及同类格。

定义 20.6　复空间 $H = C \cup \Xi$，同类(零)因子，$X_0, X_1, X_2, \cdots, X_n \in (\Xi_j) C_i$，$a_l > 0, (l = 1,2,3,\cdots,n)$，有 $U = \bigcup_{l=1}^{n} X_l = \bigcup_{l=1}^{n} a_l X_0$，称 U 为同类(零)因子的集合，简称同类集。

作为同类(零)因子在平直几何空间的集合或同类集，往往对应一条直线称为

世界线，在物理中可对应客体的时空轨迹。对于相互平行的同类集可定义同类族。

定义 20.7 $H = C \cup \Xi$，半线性空间 C_i 或 $\Xi_i(i = 1,2,3,\cdots)$ 中的同类集 $U = \bigcup_{m=1}^{n} X_m$ 和 $U' = \bigcup_{m=1}^{n} (X_m + X)$，对应有 $X_k, X_k + X, X_m, X_m + X \in C_i$（或 Ξ_i）$(i = 1,2,3,\cdots)$，满足关系式 $X_k - X_m = X_l$，$(X_l \in H)$ 构成同类集，则在 C_i 或 $\Xi_i(i = 1,2,3,\cdots)$ 中 $U \parallel U'$，称为平行同类集或同类族，记为 $\{U\}$。

定义 20.8 复空间 $H = C \cup \Xi$，取 H_i 为 C_i 或 Ξ_i，同类族 $\{U\} = \{\bigcup_{m=1}^{n} X_m\}$，$X_k, X_m \in H_i(k,m = 1,2,3,\cdots,n)$，同类集 $X_n - X_m = X_l \in H_i$；另一同类族 $\{U'\} = \{\bigcup_{m=1}^{n} (X'_m + X')\}$，$X'_k, X'_m \in H_i(k,m = 1,2,3,\cdots,n)$，使同类集 $X'_k - X'_m = X_l^* \in H_i^*$，则 $\{U\} \cup \{U'\}$ 称为同类格空间，简称同类格。当 $X_k, X_m \in C_i, X_k - X_m = X_l \in \Xi_i$，同类族 $\{U\}$ 和$\{U'\}$ 与 Ξ_i 平行或垂直，并具有正交关系 $\{U\} \perp \{U'\}$，称正交同类格空间，简称格空间。

式(20.2.1)具有非常重要的数学意义和物理意义。从数学角度，Minkowski 空间具有方向奇异性，式(20.2.1)使连通区域 C 与零因子区域 Ξ 在形式上取得了几何关联，表示真空的奇点不再是孤立的，类时区、类空区以及类光区也不再是互不相干的几何区域。所谓的真空不空，真空的极化等物理现象都可以在 Minkowski 空间通过类时区与类光区的几何联系得到数学解释。同一类时区域 C_i 中两个时空点的连线平行或垂直类光区 Ξ，满足式(20.2.1)或有

$$X_2 = X_1 \pm d\theta \tag{20.2.3}$$

即双曲 Minkowski 复平面的类时区域 C 上任一时空点 X_2，都可用同一类时区域中另一时空点 X_1 与类光区域 Ξ 中的时空点 $d\theta$ 的代数和来表示。当 $X_n - X_m = d\theta \in \Xi_i$ 和 $X'_n - X'_m = d\theta^* \in \Xi_i^*$，格空间将 Minkowski 的类时区和类光区通过时空格式化的形式联系起来，为 Minkowski 空间的格式化以及所抽象出来的广域 Hilbert 空间的分立结构奠定了理论基础。

从物理角度，如果用类时区的同类集描述有静质量粒子的运动规律，用类光区的同类集描述光量子的运动轨迹，类时区与类光区的几何关联，能在有静质量粒子吸收或放出光量子时，给出关于它们具有因果性质的几何解释。当然这需要分别对类时区和类光区进行度量化，特别是需要找出类光区的局域性质和邻近关系。如果能对 Minkowski 空间定向格式化和量子化就可能使量子力学得到一种几何解释，这也正是 Hawking 所追求的奇点可以通过连通区域同类元数特定方向的代数差来消除，并且奇点的量子化可以通过连通区域中元数的非质点相格来刻画。所不同的是，这里是 Minkowski 平直空间的量子化，而不是 Hawking 所说的弯曲空间量子化问题。

例 20.1 考虑性质 2，由连通区域 C 与零因子区域 Ξ 的关联，在双曲复平面

$H(ct,\mathrm{j}x)$ 的 C_2 中取时空点 $X_1=3+\mathrm{j}10, X_2=2+\mathrm{j}9, X_3=4+\mathrm{j}9, X_4=4+\mathrm{j}11, X_5=2+\mathrm{j}11$，则 X_1、X_2 及 X_4 的连线平行于 Ξ_1（或垂直于 Ξ_2）；X_1、X_3 及 X_5 的连线平行于 Ξ_2（或垂直于 Ξ_1）。有关系 $X_1-X_2=1+\mathrm{j}\in\Xi_1, X_1-X_3=-1+\mathrm{j}\in\Xi_2, X_1-X_4=-1-\mathrm{j}\in\Xi_3, X_1-X_5=1-\mathrm{j}\in\Xi_4$。

例 20.2 由性质 2 和性质 3，将图 20.1 的复平面 $H(ct,\mathrm{j}x)$ 在 C_1 中取时空点 $X=ct+\mathrm{j}r$，选取 $X_1=5+\mathrm{j}2, X_2=7+\mathrm{j}3, X_3=6+\mathrm{j}4, X_4=6+\mathrm{j}3, X_5=6+\mathrm{j}$，有 $\Delta X_1=X_2-X_1=2+\mathrm{j}\in C_1$，$\Delta X_1$ 为类时区的时空点；$\Delta X_2=X_3-X_1=1+\mathrm{j}2\in C_2$，$\Delta X_2$ 为类空区的时空点；$\Delta X_3=X_4-X_1=1+\mathrm{j}\in\Xi_1$，$\Delta X_3$ 为类光区的时空点；$\Delta X_4=X_5-X_1=1-\mathrm{j}\in\Xi_4$，$\Delta X_4$ 为类光区的时空点，并于 ΔX_3 相互复共轭。

定理 20.4 对 $\forall X_n$、$X_m\in C$，且在同一连通区域，当 X_n、X_m 线性无关时，有 $H=|aX_n+bX_m, a,b\in R|$。

在复平面考虑了零因子或类光区的元数不能作除数，可定义复数的除法运算如下所示。

定义 20.9 对双曲复平面 H，取元数 $X_1, X_2\in H, X_1=a_1+\mathrm{j}b_1, X_2=a_2+\mathrm{j}b_2$，且 $X_2\notin\Xi$，有

$$X_1\cdot X_2^{-1}=\frac{X_1}{X_2}=\frac{a_1+\mathrm{j}b_1}{a_2+\mathrm{j}b_2}=\frac{a_1a_2-b_1b_2}{a_2^2-b_2^2}+\mathrm{j}\frac{a_1b_2-b_1a_2}{a_2^2-b_2^2} \tag{20.2.4}$$

称 $X_1/X_2\in H$，为 H 的除法。

作为除法的特例，如果 $X_1\cdot X_2^{-1}=1$，则 X_1 与 $X_2^{-1}=X_1^{-1}$ 互为逆元。

例 20.3 在双曲复平面的 C_1 中取时空点 $X_1=5+\mathrm{j}2\in C_1$，逆元 $X_1^{-1}=\frac{5}{21}-\mathrm{j}\frac{2}{21}\in C_8$，$C_8$ 与 C_1 互为逆半线性空间；双曲复平面的 C_2 中取时空点 $X_2=2+\mathrm{j}5\in C_2$，逆元 $X_2^{-1}=-\frac{2}{21}+\mathrm{j}\frac{5}{21}\in C_3$，则 C_3 与 C_2 互为逆半线性空间。

在四维双曲能量动量复空间中，四元数可表示为 $H(p_0,\mathrm{j}\vec{p})=H\left(\frac{E}{c},\mathrm{j}\vec{p}\right)$，由定义 20.4 取能量动量四元数的减法为 $P_\mu-P_\nu\ (\mu,\nu=0,1,2,3)$。其中，$P_\mu\in S$，$-P_\nu\in -S$，$S$、$-S\subset H$ 互为负半线性空间，作 S 与 $-S$ 中元数的直和，$P_\mu-P_\nu\in H$ 为线性空间。四维双曲能量动量复空间可看做双曲超复平面，也具有方向异性的特点，由性质 2 满足(14.2.3)关系式

$$P_\mu-P_\nu=d'\vartheta_0\in\Xi$$

其中，P_μ 和 P_ν 的连线平行或垂直零因子区 Ξ，ϑ_0 为 Ξ 的单位零因子，$d'\in R$。在双曲能量动量复空间，零因子区 Ξ 对应光量子的能量动量关系，有关系

$$\frac{\Delta E}{c}+\mathrm{j}\Delta\vec{p}=d'\vartheta_0 \tag{20.2.5}$$

式(20.2.5)将有静质量粒子的能量动量的减量与类光区中的能量动量联系起来，这为中微子等类光粒子提供一个几何对应。在第十四章讨论 Dirac 粒子本征态能级跃迁时，可能对应着中微子的质量间隙，表明中微子在类光区中具有光的速度和零静止质量，即高速运动物体质量和能量的转变关系可以在双曲复空间找到一种几何对应。也就是说，双曲复空间的方向奇异性，使平直的 Minkowski 复空间在奇点区与连通区的联系中获得了物质性，这种物质性可使有静质量粒子与光量子或中微子的耦合、质量亏损以及光电效应等量子力学基本原理具有了一种几何解释。这种几何解释在传统理论中是做不到的，因为在广义相对论中只有弯曲的 Riemann 空间才具有时空物质性，广义相对论中奇点是受物质分布控制的，因而物质表现了明确的空间位置特征，而在平直的 Minkowski 空间中人们并没有发现这种受物质分布控制的奇点问题，也就忽视了平直时空的物质性。其实，平直的 Minkowski 复空间具有物质性也是容易理解的，因为物质存在的最基本属性是它本身的空间形式和时间演化，本质上，时间和空间是脱离不开物质本身的存在和运动而单独存在的。Einstein 将时间和空间作为整体构成了 Minkowski 几何，其微分对应能量和动量可构成四维动量空间，而质能关系使能量和质量发生转变，也就是能量在四维动量空间具有了物质性，这一切都是在平直的空间完成的，并不涉及所谓的弯曲空间。

20.3　Minkowski 几何代数

在 Minkowski 复平面任取非零元 $ct, r \in H(ct, \mathrm{j}r)$，则

$$L(ct,\mathrm{j}r) = \{ct + a\mathrm{j}r \mid a \in R\} \tag{20.3.1}$$

为 $H(ct,\mathrm{j}r)$ 的二维子空间。在 $L(ct,\mathrm{j}r)$ 中定义乘法运算“$\circ$”：

$$(ct_1 + a_1\mathrm{j}r)\circ(ct_2 + a_2\mathrm{j}r) = (c^2 t_1 t_2 + a_1 a_2 r^2) + (ct_1 a_2 + ct_2 a_1)\mathrm{j}r \tag{20.3.2}$$

则 $[L(ct,\mathrm{j}r), +, \circ]$ 成为二维实交换代数，其矩阵表示为

$$S = \left\{x\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix} \,\middle|\, x,y \in R\right\} \tag{20.3.3}$$

$f: L(ct,\mathrm{j}r) \rightarrow S, ct + a\mathrm{j}r \mapsto ct\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} + ar\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}$ 为代数的同构映射。$L(ct,\mathrm{j}r)$ 的非平凡理想为如下主理想：

$$\begin{cases}(1+\mathrm{j}r_0) = \{a(1+\mathrm{j}r_0) \mid a \in R\}\\ (1-\mathrm{j}r_0) = \{a(1-\mathrm{j}r_0) \mid a \in R\}\end{cases} \tag{20.3.4}$$

令 $\Xi(ct,\mathrm{j}r) = a(1+\mathrm{j}r_0) \cup a(1-\mathrm{j}r)$，为双曲复平面的零因子区。在图 20.1 中 $\Xi(ct,\mathrm{j}r)$ 与坐标轴将双曲复平面 $L(ct,\mathrm{j}r)$ 分割成八部分，$C_i(i = 1,2,\cdots,8)$ 和

$\Xi_k(k=1,\cdots,4)$ 分别构成半线性空间。

在式(1.1.13)中，我们规定了双曲复数的点积，并由此导出了 Lorentz 变换式(1.1.19)。所以双曲复空间的 Lorentz 变换在半线性空间 S 中满足乘法子半群的条件。但在四维双曲复空间，Lorentz 变换的普遍形式(2.2.11)不满足结合律，所对应的乘法子半群为非结合乘法半群。当写成式(2.2.12)的矩阵形式时，四维 Lorentz 变换的普遍形式满足结合律，构成四维乘法子半群的矩阵表示。双曲复空间的类时区 C_1 和 C_8 及类光区 Ξ_1 和 Ξ_4 在狭义相对论中具有很重要的地位，讨论它们的代数性质有利于狭义相对论中物理问题的论述。

定理 20.5　在二维双曲复平面的类时区 C_1 和 C_8 及类光区 Ξ_1 和 Ξ_4 中分别作元数的乘积，满足封闭律和结合律，构成 $H(ct,\mathrm{j}r)$ 的乘法子半群。

证明：　先证 C_1 为 H 的乘法子半群。$\forall a+\mathrm{j}b, c+\mathrm{j}d\in C_1$，由 $a>b, c>d$，令$a=b+\Delta$，作乘积，有 $(a+\mathrm{j}b)(c+\mathrm{j}d)=(ac+bd)+\mathrm{j}(ad+bc)$。因为 $(ac+bd)=\{(b+\Delta)c+(a-\Delta)d\}=bc+ad+\Delta(c-d)>bc+ad$，则 $(ac+bd)+\mathrm{j}(ad+bc)\in C_1$，满足运算的封闭律；由 $\{(a+\mathrm{j}b)(c+\mathrm{j}d)\}(e+\mathrm{j}f)=(a+\mathrm{j}b)\{(c+\mathrm{j}d)(e+\mathrm{j}f)\}$ 满足运算的结合律，故 C_1 为 H 的乘法子半群。同理可证，C_8 及 Ξ_1 和 Ξ_4 均为 H 的乘法子半群。

双曲半线性空间 $C_8=C_1^*$，C_8 转置为 C_5，有 $C_8^{\sim}=C_5$，所以 C_1 的共轭转置为 C_5，满足 $C_5=C_1^{\dagger}$。上文分析中 C_5 又是 C_1 的负元区，所以 C_1 的共轭转置为 C_5。Lorentz 变换的 U_μ 矩阵在 C_5 中对应有厄米共轭矩阵 $U_\mu^{+}=U_\mu^{-1}$，使 $U_\mu\circ U_\mu^{+}=U_\mu^{+}\circ U_\mu=I$，$I$ 为单位矩阵。所以在 H 中，Lorentz 群为幺正群 $SU(n)$，这与量子力学中群的变换形式是相同的。

定义 20.10　在半线性空间 S 中，集合 $L(ct,\mathrm{j}r)$ 有加法运算(+)和乘法运算(∘)，并且满足：$(L,+)$ 构成 Abel 半群，$(L,\circ)$ 构成半群，$(L,+,\circ)$ 满足左、右分配律，则称 $(L,+,\circ)$ 构成半环。

显然，在 Minkowski 空间中，半线性空间 C_1 和 C_8 及 Ξ_1 和 Ξ_4 中的集合，满足定义 20.10，均可构成半环。而线性空间 H 中的集合，添加减法运算可构成环。

定义 20.11　设 S 是体 K 上的半线性空间，若在 S 上定义乘法(∘)，使 $(S,+,\circ)$ 成为半环，并且对 $\forall a\in K, \alpha,\beta\in S$，有

$$a(\alpha\circ\beta)=(a\alpha)\circ\beta=\alpha\circ(a\beta)$$

则称 S 是体 K 上的半线性代数。

半线性空间 C_1 和 C_8 及 Ξ_1 和 Ξ_4 均可构成半线性代数；线性空间 H 构成线性代数。由于 Minkowski 复空间具有零因子区，对于复域添加零因子，可引入广域的概念。

定义 20.12　体系 H 称为(复或实)广域，对 $\forall \alpha,\beta,\gamma\in H$ 满足下列条件

(1) H 中有两种运算，加法(+)和乘法(∘)，使得 $\alpha+\beta\in H, \alpha\circ\beta\in H$。

(2) 两种运算满足

交换律：　$\alpha+\beta=\beta+\alpha,\quad \alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha$

结合律：　$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma),\quad (\alpha\circ\beta)\circ\gamma=\alpha\circ(\beta\circ\gamma)$

乘法对加法的左、右分配律：

$$\alpha\circ(\beta+\gamma)=\alpha\circ\beta+\alpha\circ\gamma,\quad (\beta+\gamma)\circ\alpha=\beta\circ\alpha+\gamma\circ\alpha$$

(3) 存在零元 0，使得 $\alpha+0=\alpha$，$0\circ\alpha=0$。

(4) 存在单位元 1，使得 $1\circ\alpha=\alpha$。

(5) 存在零因子元 α、β，如果有 $\alpha\circ\beta=0$，则称 α、β 互为零因子。

(6) 存在加法逆运算，即减法 (—)，使得 $\alpha-\alpha=0$，从而 α 有负元 $-\alpha$。

(7) 存在乘法逆运算，即除法(÷)，使得 $\alpha\div\alpha=\alpha\circ\alpha^{-1}=1$，从而 α 有逆元 $\alpha^{-1}=\dfrac{1}{\alpha}$。$H$ 中零元和零因子元(奇异元)没有逆元，其他元数(正则元)均有逆元。

定义 20.13　广域 H 的同类格空间，称光域格空间，简称广域格。

定义 20.14　体系 H 称为(复或实)广体，如果定义 20.12 中乘法不满足交换律，即存在 α、$\beta\in H$，$\alpha\circ\beta\neq\beta\circ\alpha$。

定义 20.15　如果(复或实)广域(广体)中没有零因子，则该体系称(复或实)域(体)。

至此，我们对 Minkowski 复平面添加一些代数结构，粗略地勾画出非欧几何的代数框架。由于 Minkowski 复平面具有几何奇异性，零因子区或类光区通过运算规则和类时区的几何联系，使 Minkowski 空间的奇点或迷向区域也可以通过代数结构讨论其邻近关系和局域性质。添加类光区的广域或广体可能为近代物理学提供了一种更合适的数学工具。

椭圆复数 $E(ct,ir)$ 与复 Euclidean 空间相对应，整个复空间为一个连通区域。复 Euclidean 空间同三维实 Euclidean 空间类同，由于奇点只在原点，具有各向同性的特点。第一章分析了整个复 Euclidean 空间与双曲 Minkowski 空间的类时区具有一对一的同构关系。按复数的规则运算，复 Euclidean 空间的时空变换关系并不是 Lorentz 变换，椭圆复数的本体空间是复 Euclidean 空间，而不是 Minkowski 空间。但是，将椭圆复数引入 Minkowski 空间，在不涉及复函数交叉项乘积时，椭圆复数可以作为一种数学方法，利用复数的共性可讨论狭义相对论在特殊情况时的物理问题，也可以通过二元实数讨论量子理论中与实验吻合的物理问题。

第二十一章　拟、虚度量与广域 Hilbert 空间

以 Euclidean 几何为原空间抽象出的一类公理体系是泛函分析的理论基础，所对应的 Hilbert 空间形成了量子力学的数学框架。但这套基础理论只能赋予量子力学泛函分析结构，很难作出合理的几何解释。也就是说，从几何角度描述微观客体的量子跃迁以及粒子与光量子的耦合是 Euclidean 几何无法逾越的鸿沟。Euclidean 空间可以描述宏观、低速客体的运动规律，但没有光和电磁场的对应区域，微观、低速粒子与光量子耦合的几何区域问题可能是狭义相对论与经典量子力学发生抵触的结症所在。

狭义相对论所对应的 Minkowski 空间包含光和电磁场的对应区域。将 Minkowski 空间作为原空间，建立与非 Euclidean 几何相联系的公理体系，抽象出一类 Hilbert 空间作为量子力学的数学基础，可能会为解决量子力学的几何关联以及狭义相对论与量子力学的抵触打开突破口。建立非欧几何的公理体系首先要解决方向奇异性和类光区的零度量问题，这涉及奇点区与连通区的转换关系。其实，奇点和零本身就代表了一种平衡转换，隐含了一种对等关系，Hawking 想对奇点进行度量和时空量子化，也是想利用奇点的这种平衡和等量关系。所以，用零度量派生的新度量来刻画奇点邻近关系和局域性质就会为实物粒子和光量子的耦合提供理论依据，当然这应该包含微观、低速粒子的量子跃迁以及用 Minkowski 空间的时空性质对经典量子力学进行几何诠释。

21.1　广域内积空间

利用广域和广体（下文简称广域）可抽象出一类包含类光区的内积空间。广域中规定一系列运算规则均可应用于 Minkowski 复空间。以这种非欧空间为原空间，通过半线性空间可抽象出一类广域内积空间。

定义 21.1　设 $H=C\cup\Xi$ 为广域，Ξ 为零因子区或类光区，S^*、$S\subset H$ 为相互复共轭的半线性空间，从 $S^*\times S$ 到 H 定义一个函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，使对 $\forall\langle X,\langle Y,\langle Z\in S^*;X\rangle,Y\rangle,Z\rangle\in S$，复数 $\alpha,\beta\in H$，满足：

(1) $\langle X,Y\rangle=\langle Y,X\rangle^*$；

(2) $\langle X,\alpha Y+\beta Z\rangle=\alpha\langle X,Y\rangle+\beta\langle X,Z\rangle$；

(3) $\langle X,X\rangle>0$ 或 $\langle X,X\rangle<0$ 当且仅当 $X\in\Xi$ 时有 $\langle X,X\rangle=0$。称函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 S^* 与 S 的广域内积空间。

由定义 21.1，广域内积空间由半线性空间引入，$\langle\cdot$ 与 $\cdot\rangle$ 分别作为一个独立算符，其中 $\langle\cdot$ 为半线性空间 S^* 的算符，$\cdot\rangle$ 为半线性空间 S 的算符，类同于 Dirac 算符的左矢和右矢。Minkowski 复空间具有方向异性的特点可体现在间隔不变量或时空度量，不同连通子区域的时空点（或该时空点相对于原点）的间隔不变量或度量的正、负值可能是不同的，称为不定度规，分别对应类时区的度量为正，类空区的度量为负，类光区的度量等于零。在同一个连通区域，不同方向上取两时空点也具有不定度规的性质。

例 21.1 在 Minkowski 复空间取双曲复数 $X = X(ct, \mathrm{j}x) = ct + \mathrm{j}x$，$X^* = ct - \mathrm{j}x$，时空间隔对应双曲内积 $\langle X,X\rangle = c^2t^2 - x^2 = R^2$。在类时空间 $\langle X,X\rangle = R^2 > 0$；类空空间中 $\langle X,X\rangle = R^2 < 0$；类光空间有 $\langle X,X\rangle = 0$。

例 21.2 由例 20.2，双曲复平面 $H(ct,\mathrm{j}x)$，在 C_1 中取时空点 $X_1 = 5+\mathrm{j}2$，$X_2 = 7+\mathrm{j}3$，$X_3 = 6+\mathrm{j}4$，$X_4 = 6+\mathrm{j}3$。有关系 $\Delta X_1 = X_2 - X_1 = 2+\mathrm{j} \in C_1$，$\Delta X_1^* \Delta X_1 = 4-1 = 3 > 0$；$\Delta X_2 = X_3 - X_1 = 1+\mathrm{j}2 \in C_2$，$\Delta X_2^* \Delta X_2 = 1-4 = -3 < 0$；$\Delta X_3 = X_4 - X_1 = 1+\mathrm{j} \in \Xi_1$，$\Delta X_3^* \Delta X_3 = 1-1 = 0$。

例 21.2 在物理中，$\Delta X_1^* \Delta X_1 = \Delta R_1^2 > 0$ 表示两时空点 X_1 与 X_2 可以用亚光速取得因果联系，称为类时事件的类时间隔；$\Delta X_2^* \Delta X_2 = \Delta R_2^2 < 0$ 表示时空点 X_1 与 X_3 两个物理事件之间没有因果联系，或两个事件发生的时间间隔小于光传播的空间间隔，称为类时事件的类空间隔；$\Delta X_3^* \Delta X_3 = \Delta R_3^2 = 0$ 表示时空点 X_1 与 X_4 可以用光信号取得因果联系，称为类时事件的类光间隔。下文无特别说明，将仅讨论非类空间隔度规正定化即 $R^2 \geqslant 0$ 情况。在二维复平面，因 $|ct| \geqslant |x|$，由式(1.1.8)双曲复数可写成双曲函数和双曲指数形式。其中，φ 为双曲复数，相对于 ct 实轴的辐角。X 所对应的内积运算在亚光速区的度规是正定的，且满足式(2.1.4)内积的运算规则。

定义 21.2 $H = C \cup \Xi$ 为非类空广域，Ξ 为零因子区。取 S^*、$S \subset H$ 为相互共轭的半线性空间，若从 $S^* \times S$ 到 H 定义一个函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，使对 $\forall \langle X, \langle Y, \langle Z \in S^*; X\rangle, Y\rangle, Z\rangle \in S, \alpha、\beta \in H$，满足：

(1) $\langle X,Y\rangle = \langle Y,X\rangle^*$；

(2) $\langle X,\alpha Y+\beta Z\rangle = \alpha\langle X,Y\rangle + \beta\langle X,Z\rangle$；

(3) $\langle X,X\rangle \geqslant 0$ 当且仅当 $X \in \Xi$ 时，有 $\langle X,X\rangle = 0$； (21.1.1)

称函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 S^* 与 S 的广域内积，定义了广域内积的空间称为广域内积空间。

在广域内积空间可定义范数

$$\| X \| = \sqrt{\langle X,X\rangle} \tag{21.1.2}$$

式(21.1.2)满足 Schwarz 不等式。

证明 对 $\forall X,Y \in H$，复数 $\alpha \in H$，取 $X-\alpha Y \in H$，由式(21.1.1)有 $0 \leqslant \langle X-\alpha Y, X-\alpha Y\rangle = \langle X,X\rangle - \alpha\langle X,Y\rangle - \alpha^*\langle Y,X\rangle + \alpha^*\alpha\langle Y,Y\rangle$，当 X、Y、$Z-\alpha Y$

$\in \Xi$，或 X 任意而 Y 为零元时上式成立。现设 Y 不在 Ξ 中，令 $\alpha = \dfrac{\langle Y,X\rangle}{\langle Y,Y\rangle}$，代入上式得

$$0 \leqslant \langle X,X\rangle - \frac{\langle X,Y\rangle\langle Y,X\rangle}{\langle Y,Y\rangle} = \| X \|^2 - \frac{\| \langle X,Y\rangle \|^2}{\| Y \|^2} \tag{21.1.3}$$

移项可得 Schwarz 不等式

$$\| \langle X,Y\rangle \| \leqslant \| X \| \cdot \| Y \| \tag{21.1.4}$$

取广域内积算法

$$\langle X,Y\rangle = \sum_{i,k=1}^{n} x_i{}^* y_k \tag{21.1.5}$$

当 $X = Y$ 时，简化成

$$\langle X,X\rangle = \sum_{i,k=1}^{n} x_i^* x_k \tag{21.1.6}$$

式(21.1.6)与(2.1.4)具有相同形式。式(21.1.6)在四维 Minkowski 复空间有重要作用，间隔不变量以及能量动量关系都是依照式(21.1.6)的算法而得到的。由式(21.1.5)，有乘法性质

$$\| XY \| = \| X \| \, \| Y \| \tag{21.1.7}$$

21.2　拟、虚度量和线性赋范空间

实或复 Euclidean 空间具有方向同性的特点，在 Euclidean 空间中定义两点间的距离并不用特别考虑两点间的方向性问题。

定义 21.3　设 H 为实(复)域，如果对于 H 中任意两个元数 X、Y，都对应一个实数 $L(X,Y)$，并且满足条件：

(1) $L(X,Y) \geqslant 0$，对 $L(X,Y) = 0$，当且仅当 $X = Y$；　　(21.2.1)

(2) $L(X,Y) = L(Y,X)$；

(3) 对 $\forall X,Y,Z \in H$，有 $L(X,Y) \leqslant L(X,Z) + L(Z,Y)$；

则称 $L(X,Y)$ 为 X 与 Y 之间的距离，而称 (h,L) 为以 $L(X,Y)$ 为距离的距离空间。

定义 21.3 代表了以 Euclidean 空间为原空间的距离公理体系，该公理体系包含了距离的正定性、交换性以及三角不等式三个要素。Minkowski 复空间 $H(\alpha, j\vec{r})$ 包含了连续零因子区且具有方向异性的特点，定义空间距离时显然要比 Euclidean 空间的情况复杂，除了要考虑零因子的因素，还要考虑时空点间的方向性等问题。所以，在 Minkowski 空间或广域中建立公理体系，一般不能普遍满足距离的三个要素，只能在限定条件下分区域、分方向以及分特点来定义非欧几何的公理体系。我们的主导思想是，公理体系应该满足严密性、自洽性以及适用性。对于一般性的

讨论以及非适用性的内容，例如，类空距离等，不在本章的讨论范围内。

由于 $H(\alpha,\mathrm{j}\vec{r})$ 包含了类光区 Ξ，可以用广域抽象出不同的度量空间并定义两个物理事件的拟距离。由定义 21.2 给出如下半拟距空间。

定义 21.4 $H=C\cup\Xi$ 为非类空广域，Ξ 为零因子区域，如果对于 H 中任意两个元数 X,Y，都对应一个实数 $\rho(X,Y)$，并且满足条件：

(1) $\rho(X,Y)\geqslant 0$，且 $\rho(X,Y)=0$，当且仅当 $X-Y\in\Xi$； (21.2.2)

(2) $\rho(X,Y)=\rho(Y,X)$；

则称 $\rho(X,Y)$ 为 X 与 Y 之间的拟距离，而称 (H,ρ) 为以 $\rho(X,Y)$ 为拟距离的半拟距空间。

定义 21.4 给出了 Minkowski 空间的非类空区中两点的度量和距离关系。由于时空异性的特点，一般情况类时区中任意三个时空点并不满足三角不等式。利用定义 21.4 中半拟距空间的概念可将类时区中时空点 X 作为参考点，按 X 与 Y 的拟距离随方向的不同，划分不同的子区域。由性质 20.1 至性质 20.3，在有条件情况下定义拟距空间。

定义 21.5 $H=C\cup\Xi$ 为非类空广域，Ξ 为零因子区域，如果对于 $\forall X,Y,Z\in C_i(i=1,2,3,\cdots)$ 为同类因子，对应一个实数 $\rho(X,Y)$，并且满足条件：

(1) $\rho(X,Y)\geqslant 0$，且 $\rho(X,Y)=0$，当且仅当 $X-Y\in\Xi$；

(2) $\rho(X,Y)=\rho(Y,X)$；

(3) $\rho(X,Y)\leqslant\rho(X,Z)+\rho(Z,Y)$；

则称 $\rho(X,Y)$ 为 X 与 Y 之间的拟距离，而称 (H,ρ) 为以 $\rho(X,Y)$ 为拟距离的拟距空间。

在双曲 Minkowski 空间中，定义 21.4 和定义 21.5 中的拟距离为复数的模 $\rho=\sqrt{|\Delta R^2|}$，是由复数的内积抽象出来的时空间隔，为坐标变换不变量。类时区的类光间隔对应复数的模为零 $(\rho=0)$，定义 21.5 不能刻画类光区的邻近关系和度量问题。为了能够描述类光区的局域性质以及类时区与类光区的几何联系，参照式(20.2.1)，给出如下虚距离的定义。

定义 21.6 $H=C\cup\Xi$ 为非类空广域，Ξ 为零因子区域。$\forall X,Y,Z$ 在 $C_i(i=1,2,3,\cdots)$ 中为同类因子，$X-Y=d\theta\in\Xi_i$，$(i=1,2,3,\cdots)$ 为同类零因子。拟距空间 (H,ρ) 中对应 $\rho(X,Y)=0$，取实数 $d(X,Y)$，满足条件：

(1) $d(X,Y)\geqslant 0$，且 $d(X,Y)=0$，当且仅当 $X=Y$； (21.2.3)

(2) $d(X,Y)=d(Y,X)$；

(3) $d(X,Y)\leqslant d(X,Z)+d(Z,Y)$；

则称 $d(X,Y)$ 为 X 与 Y 之间的虚距离，而称 (H,d) 为以 $d(X,Y)$ 为虚距离的虚距空间。

显然，定义 21.6 中的虚距离是由定义 21.5 中的拟距离在 $\rho(X,Y)=0$ 时派生出来的。如果 $X,Y \in C_i, X-Y \in \Xi$，表示类时区中两时空点 X 与 Y 的连线平行或垂直类光区，复数的模等于零，时空点的局域性质不能用时空间隔不变量来刻画。这时同类零因子的邻近关系可由虚距离 $d(X,Y)$ 来描述，利用复数的实部和虚部这两个二元实函数来刻画坐标变换不变量。拟距离 $\rho(X,Y)=0$，表示复数的实部和虚部具有了等量关系，满足 $|c\Delta t| = |\Delta \vec{r}|$，取 $|\Delta \vec{r}|$ 或 $c|\Delta t|$ 为虚距离可决定两时空点 X 与 Y 在特定方位时的邻近关系。定义 21.5 和定义 21.6 分别定义了拟距离和虚距离，它们在一起可共同刻画 Minkowski 空间非类空区任意两点间的邻近关系，是一套有别于 Euclidean 几何的公理体系。尽管它是在有条件情况下定义的，但基本满足数学和物理适用的要求，并在物理应用中起到重要作用。

在四维双曲复空间，两时空点对应不同的度量空间应具有不同的距离描述，取 $X = X(ct, j\vec{r})$，定义 21.3 的距离可写作

$$L^2 = (ct, j\vec{r})(ct, j\vec{r}) = \sum_{n=1}^{4} x_n x_n = c^2t^2 + r^2 \tag{21.2.4}$$

由定义 21.4，取 $X = ct + j\vec{r}$，则拟距离可写作

$$\rho^2 = (ct - j\vec{r})(ct + j\vec{r}) = \sum_{n,m=1}^{4} x_n^* x_m = c^2t^2 - r^2 \tag{21.2.5}$$

当 $r^2 = c^2t^2$ 时，$\rho^2 = 0$，取 $|\vec{r}| = |ct| = d$ 为虚距离，满足定义 21.5。

同理，在椭圆复空间取 $Y = ct + i\vec{r}$，时空距离为

$$L^2 = (ct - i\vec{r})(ct + i\vec{r}) = \sum_{n,m=1}^{4} y_n^* y_m = c^2t^2 + r^2 \tag{21.2.6}$$

取 $Y = Y(ct, i\vec{r})$，拟距离可写作

$$\rho^2 = (ct, i\vec{r})(ct, i\vec{r}) = \sum_{n=1}^{4} y_n y_n = c^2t^2 - r^2 \tag{21.2.7}$$

虚距离取 $|\vec{r}| = |ct| = d$，也满足定义 21.5。

式(21.2.4)至(21.2.7)的算法不同，其中式(21.2.5)和(21.2.6)满足多项式乘法运算，而式(21.2.4)和(21.2.7)是乘法的缩并。

例 21.3　在双曲复空间的类时区，取 $X_1 = 5 + j2, X_2 = 6 + j3, X_3 = 7 + j3, X_4 = 6 + j4$，有 $X_2 - X_1 = 1 + j$，对应各种距离为 $L^2 = 2, \rho^2 = 0, d = 1$；同理，$X_3 - X_1 = 2 + j$，$(L^2 = 5, \rho^2 = 3)$；$X_4 - X_1 = 1 + j2$，$(L^2 = 5, \rho^2 = -3)$。

由定义 21.4 和定义 21.5 可在拟距空间和虚距空间中引入范数和线性赋范空间

定义 21.7　设 S 是广域 H 上的半线性空间。在 S 上映射 $S \to R: X \to \|\cdot\|$。若 $\forall$ 同类因子 $X, Y \in S, d \in R$ 满足：

(1) 正定性：$\|X\| \geqslant 0$，$\|X\| = 0 \Leftrightarrow X \in \Xi$；

(2) 正齐性：$\|dX\| = |d|\ \|X\|$；

(3) 三角不等式：$\|X+Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$；

则称 $\|X\|$ 为 X 的范数，简称范数。称$(S, \|\cdot\|)$为线性赋范空间，简记 S。

由 $\|X\| \geqslant 0$，范数诱导出拟距离，线性赋范空间对应拟距空间；当 $\|X\| = 0$，范数对应虚距离，线性赋范空间为虚距空间。

21.3　拟、虚度量空间的相互关联

由广域抽象出不同的拟距度量空间和虚距度量空间刻画了 Minkowski 复空间的方向奇异性质，描绘了与方向有关的两点间的度量问题。其实，拟距度量空间和虚距度量空间是有内在联系的，即虚距度量空间可以看做拟距度量空间的一个特例，两者综合成一个与方向有关的不定距离空间。由性质 20.1 至性质 20.3，在类时区取两时空点的非类空差值为

$$X_n - X_m = aX_0 \tag{21.3.1}$$

当 $c|\Delta t| \geqslant |\Delta r|$，对应 $0 \leqslant \varphi \leqslant \left|\pm\frac{\pi}{4}\right|$，辐角不同表示连线的方位不同。由内积空间可抽象出一个表示方位性质的拟距离 $|<X_0, X_0>| = \rho_0^2$，取 $0 \leqslant \rho_0 \leqslant 1$，由式(2.1.6)取单位模时 $\rho_0 = (\mathrm{ch}^2\varphi - \mathrm{sh}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$，则 ρ_0 是辐角的函数应与两时空点连线的方向有关。当 $0 \leqslant \varphi < \left|\pm\frac{\pi}{4}\right|$，$0 < \rho_0 \leqslant 1$ 时，$c|\Delta t| > |\Delta r|$ 为类时区中不同方向的类时间隔所对应的拟距离；当 $\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$ 时，$\rho_0 = 0$，对应 $c|\Delta t| = |\Delta r|$，为类时区中两时空点的类光间隔。定义 21.5 和定义 21.6 可综合统一的距离定义。

定义 21.8　$H = C \cup \Xi$为非类空广域，Ξ为零因子区域，对应一个实数$\rho(X,Y)$，取正数 $d(X,Y) \geqslant 0$，$0 \leqslant \rho_0(X,Y) \leqslant 1$，并且满足：

(1) 正定性

① $\rho(X,Y) = d(X,Y)\rho_0(X,Y) \geqslant 0$，且 $\rho(X,Y) = 0$，有 $d(X,Y) = 0$，当且仅当 $X = Y$；

② $\rho(X,Y) = d(X,Y)\rho_0(X,Y) > 0$，当 $0 < \rho_0(X,Y) \leqslant 1$，$X - Y \in C$；

③ $\rho(X,Y) = d(X,Y) > 0$，当 $\rho_0(X,Y) = 0$，$X - Y \in \Xi$；

(2) 交换性

$\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$；

(3) 三角不等式

$\rho(X,Y) \leqslant \rho(X,Z) + \rho(Z,Y)$;

则称 $\rho(X,Y)$ 为 X 与 Y 之间的距离，而称 (H,ρ) 为以 $\rho(X,Y)$ 为距离的广域度量空间。

定义 21.8 给出了广域度量或距离公式，距离 $\rho(X,Y)$ 描述了这种非欧空间方向异性的特点。其中，$\rho_0(X,Y)$ 为方向因子，两时空点或两物理事件的时空方位不同时，$\rho_0(X,Y)$ 对应不同的取值；$\rho_0(X,Y,Z)$ 一定时，物理事件对应同一世界线，各时空点满足三角不等式；$d(X,Y)$ 为线度因子，描述两时空点的线度长短的物理量。值得注意的是，在 Minkowski 空间，$d(X,Y)$ 不仅可对实物粒子进行线度区别，也可以对光量子进行线度区别，即能够刻画类光区的邻近关系。当 $\rho_0(X,Y) = 0$，在 C 中两时空点为类光间隔，距离的性质发生突变，对应拟距离为零因子，$\rho(X,Y) = d(X,Y)$ 是虚距离。对 H 中类光间隔满足 $c|\Delta t| = |\Delta r|$，$\rho_0(X,Y) = \rho(X,Y) = 0$，用 $d(X,Y) = |\Delta r| = c|\Delta t|$ 作为类光间隔的虚距离，可描述实物客体之间用光信号取得的因果联系。Minkowski 复空间的距离可表示成复数实部和虚部的函数。其中虚距离为复数的实部，方位因子与实部和虚部的组合有关。

定理 21.1　广域非类空区 $X,Y \in H_i$，距离 $\rho(X-Y)$ 为坐标分量的函数。

证明　取元数 $X,Y \in H_i$，满足 $X-Y = \Delta X = a+\mathrm{j}b$，$a,b$ 为 ΔX 坐标分量。间隔不变量 $\Delta R^2 = \Delta X^* \Delta X = a^2 - b^2$，非类空元满足 $a \geqslant b$，虚距离 $d = a$，方向因子 $\rho_0 = \sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$，距离 $\rho(X-Y) = \sqrt{|\Delta R^2|} = a\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$，为坐标分量的函数。

例 21.4　相对论因子可作为方向因子。

取 $X-Y = \Delta X = a+\mathrm{j}b$，当 Y 为坐标原点时，在二维速度空间有 $X = a+\mathrm{j}b = c+\mathrm{j}v$，方向因子为 $\rho_0 = \sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ 是相对论因子。显然，由 $c \geqslant v \geqslant 0$，对应有 $0 \leqslant \rho_0 \leqslant 1$，刻画了粒子运行世界线的变化范围。

例 21.5　Minkowski 复空间的类时区 C_1 中，取元数 $X_1 = 5+3\mathrm{j}$，$X_2 = 7+4\mathrm{j}$，$X_3 = 6+4\mathrm{j}$，$X_4 = 8+6\mathrm{j}$。取 $\Delta X_1 = X_2 - X_1 = 2+\mathrm{j} \in C_1$，$\rho_0(\Delta X_1) = \sqrt{1-\dfrac{1}{2^2}}$，$a(\Delta X_1) = 2$，$b(\Delta X_1) = 1$，距离 $\rho(\Delta X_1) = d(\Delta X_1)\rho_0(\Delta X_1) = 2\sqrt{1-\dfrac{1^2}{2^2}} = \sqrt{3}$；同理 $\Delta X_2 = X_3 - X_1 = 1+\mathrm{j} \in \Xi_1$，$a(\Delta X_2) = 1$，$\rho_0(\Delta X_2) = \sqrt{1-\dfrac{1^2}{1^2}} = 0$，$\rho(\Delta X_2) = a = 1$；$\Delta X_3 = X_4 - X_1 = 3+3\mathrm{j} \in \Xi_1$，$a(\Delta X_3) = 3$，$\rho_0(\Delta X_3) = \sqrt{1-\dfrac{3^2}{3^2}} = 0$，$\rho(\Delta X_3) = 3$。

例 21.5 中，ΔX_2 和 ΔX_3 均为零因子元，时空间隔为零，但它们的实部或虚部不同，所定义的距离也不同，因此定义 21.8 的距离可描述类时区与类光区相互关联以及类光区的邻近关系。

Minkowski 复空间中类时区的距离可表示复矢量的内积形式。由式(2.2.11)取两参照系以常矢量 $\vec{v}(v_x,v_y,v_z)$ 作相对运动，四维复矢量的差值 $\Delta X = X_2 - X_1$。在两参照系分别写成 $\Delta X' = c\Delta t' + \mathrm{j}\Delta\vec{r}'$，$\Delta X = c\Delta t + \mathrm{j}\Delta\vec{r}$，式(2.2.11)可改写为

$$\begin{cases}\Delta\vec{r}' = \Delta\vec{r} + \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{(\Delta\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2} + \dfrac{\vec{v}}{\alpha}\Delta t \\ \Delta t' = \dfrac{1}{\alpha}\left(\Delta t + \dfrac{\Delta\vec{r}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)\end{cases} \tag{21.3.2}$$

式(21.3.2)可写成式(2.2.12)的矩阵形式

$$\begin{pmatrix}\mathrm{j}\Delta x' \\ \mathrm{j}\Delta y' \\ \mathrm{j}\Delta z' \\ c\Delta t'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_x^2}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_y}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_z}{v^2} & \dfrac{\mathrm{j}v_x}{\alpha c} \\ \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_y}{v^2} & 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_y^2}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_yv_z}{v^2} & \dfrac{\mathrm{j}v_y}{\alpha c} \\ \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_xv_z}{v^2} & \left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_yv_z}{v^2} & 1+\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\dfrac{v_z^2}{v^2} & \dfrac{\mathrm{j}v_z}{\alpha c} \\ \dfrac{\mathrm{j}v_x}{\alpha c} & \dfrac{\mathrm{j}v_y}{\alpha c} & \dfrac{\mathrm{j}v_z}{\alpha c} & \dfrac{1}{\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{j}\Delta x \\ \mathrm{j}\Delta y \\ \mathrm{j}\Delta z \\ c\Delta t\end{pmatrix} \tag{21.3.3}$$

满足时空间隔不变量的矩阵形式

$$(-\mathrm{j}\Delta x' \quad -\mathrm{j}\Delta y' \quad -\mathrm{j}\Delta z' \quad c\Delta t')\begin{pmatrix}\mathrm{j}\Delta x' \\ \mathrm{j}\Delta y' \\ \mathrm{j}\Delta z' \\ c\Delta t'\end{pmatrix} = (-\mathrm{j}\Delta x \quad -\mathrm{j}\Delta y \quad -\mathrm{j}\Delta z \quad c\Delta t)\begin{pmatrix}\mathrm{j}\Delta x \\ \mathrm{j}\Delta y \\ \mathrm{j}\Delta z \\ c\Delta t\end{pmatrix} \tag{21.3.4}$$

或

$$\rho^2 = \langle\Delta X',\Delta X'\rangle = \langle\Delta X,\Delta X\rangle \tag{21.3.5}$$

式(21.3.5)中矩阵 $\langle X = X\rangle^+$，左矢和右矢具有共轭转置关系。$\rho = \sqrt{\langle\Delta X,\Delta X\rangle}$ 为内积抽象出的距离，是 Minkowski 复空间的坐标变换不变量。式(21.3.4)和(21.3.5)对应类时间隔时，方位因子满足 $0 \leqslant \rho_0(\Delta X) = \sqrt{1-\dfrac{|\Delta\vec{r}^2|}{c^2|\Delta t^2|}} \leqslant 1$，取拟距离 $\rho = \sqrt{\langle\Delta X,\Delta X\rangle} = d\rho_0 > 0$；类光间隔时，方位因子 $\rho_0(\Delta X) = \sqrt{1-\dfrac{|\Delta\vec{r}^2|}{c^2|\Delta t^2|}} = 0$，对应 $\langle\Delta X,\Delta X\rangle = 0$，取虚距离 $\rho = d = |\Delta\vec{r}| = |c\Delta t|$。

Minkowski 复空间的距离空间满足定义 21.8 广域度量空间的条件，所以狭义相对论不仅有几何结构也具有非欧几何为原空间抽象出的分析结构。由于 Minkowski 空间抽象出的距离在不同方向上有突变，表现了非欧时空几何性质的不光滑性，因此在讨论 Minkowski 空间或广域距离空间的性质时需要强调其方向性。由定义 21.8 重新给出线性赋范空间

定义 21.9 设 S 是广域 H 上的半线性空间 H_i。在 S 上映射 $S \to R : X \to \|\cdot\|$。若 $\forall X,Y \in S, d \in R$, $\rho(X) = d(X)\rho_0(X) \equiv \|X\|$, $0 \leqslant \rho_0(X) \leqslant 1$，满足：

(1) 正定性：$\|X\| \geqslant 0$，$\|X\| = 0 \Leftrightarrow X \in \Xi$；

(2) 正齐性：$\|dX\| = |d|\,\|X\|$；

(3) 三角不等式：$\|X+Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$，当对确定的 $\rho_0(X,Y)$；

则称 $\|X\|$ 为 X 的范数。称 $(S, \|\cdot\|)$ 为线性赋范空间，简记 S。

21.4 拟、虚度量空间的完备性和连续性

广域 $H = C \cup \Xi$ 由若干个连通区域所构成，每一个连通区域 C_i 或 Ξ_i 可写作子区域 H_i，其中 $i = 1,2,3,\cdots$。在广域中定义完备性和连续性，要求元数 $X_1, X_2, \cdots$，在同一 H_i 中不跨越坐标轴和类光区，对元数的运算可在 $H = C \cup \Xi$ 中进行。广域对应的 Minkowski 复空间具有方向奇异性质，由广域内积抽象出的一类距离空间 (H,ρ)，所对应的距离 $\rho(X,Y)$ 具有双重性质，一类是线度的区别，用线度因子 $d(X,Y)$ 表示；另一类是方位的区别，用方向因子 $\rho_0(X,Y)$ 表示。正是由于 Minkowski 复空间具有的这种奇异性质，使建立 Cauchy 点列等数学概念一方面要在广域中进行，另一方面要考虑极限趋近方向问题。

定义 21.10 $H = C \cup \Xi$ 为非类空广域，Ξ 为零因子区域，R 为实域。度量空间中双变量实值函数 $\rho: H \times H \to R$，取 $\{X_n\}$ 是 H_i 中点列，如果对任意给定的正数 ε, δ，存在自然数 $N = N(\varepsilon), M = M(\delta)$，使当 n、$m > N$、M 时取 $\rho(X_n, X_m) = d(X_n, X_m)\rho_0(X_n, X_m)$，有

(1) $\rho(X_n、X_m) = 0$，当 $d(X_n, X_m) = 0$，$0 \leqslant \rho_0(X_n, X_m) \leqslant 1$；

(2) $0 < \rho(X_n、X_m) < \varepsilon$，当 $d(X_n, X_m) > 0$，$0 < \rho_0(X_n, X_m) \leqslant 1$；

(3) $\rho(X_n、X_m) = d(X_n, X_m) < \delta$，当 $\rho_0(X_n, X_m) = 0$；

则 $\{X_n\}$ 称为 H 中的有向 Cauchy 点列。

显然，定义 21.10 中有向 Cauchy 点列的特点是，它包括了 Minkowski 空间的类光区（或连续零因子区域）Ξ 及类时区（或连通区域）C，由 Minkowski 空间的奇异性能反映出零因子区域与连同区域的逻辑关联。其中由定义 21.5 和定义 21.6，在 C 中 X_n、X_m 是同类因子，Cauchy 点列为类时间隔或类光间隔所对应世

界线上各时空点的元数；在Ξ中X_n、X_m是同类零因子，Cauchy 点列对应零因子的世界线上各点元数。

定义 21.11 $H = C \cup \Xi$为非类空广域，Ξ为零因子区域，$X_n, X \in H_i, n = 1,2,3,\cdots$，$\rho(X_n, X) = d(X_n, X)\rho_0(X_n, X)$，当$n \to \infty$时满足：

(1) $\rho(X_n、X_m) = 0$，$X_n = X$，当$d(X_n, X_m) = 0$，$0 \leqslant \rho_0(X_n, X_m) \leqslant 1$；

(2) $\rho(X_n, X) \to 0, X_n \to X$，当$0 < \rho_0(X_n, X_m) \leqslant 1$；

(3) $\rho(X_n, X) = d(X_n, X) \to 0, X_n \to X$，当$\rho_0(X_n, X_m) = 0$；

称点列$\{X_n\}$距离ρ在广域H有向收敛于X，而X叫点列$\{X_n\}$的广域极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$。

非类空广域H的有向收敛的几何意义，是在 Minkowski 空间的类时区（或类光区）中，某时空点作为聚点时，其他时空点向它收敛要考虑方向性问题，在收敛的不同方向上对应的距离或度量数值和性质是不同的。下面通过泛函分析的传统理论，由域添加零因子，形成广域所对应的连续性和完备性条件。

定义 21.12 $H = C \cup \Xi$为非类空广域，Ξ为零因子区域，$(H, \rho = d\rho_0)$为度量空间，点列$\{X_n\} \subset H_i$，如果对任意给定的正数$\varepsilon > 0, \delta > 0$，存在自然数$N = N(\varepsilon), M = M(\delta)$，使当$n、m > N、M$时，有

(1) $\rho(X_n、X_m) = 0$，当$d(X_n, X_m) = 0$，$0 \leqslant \rho_0(X_n, X_m) \leqslant 1$；

(2) $\rho(X_n、X_m) < \varepsilon$，当$0 < \rho_0(X_n, X_m) \leqslant 1$；

(3) $\rho(X_n、X_m) = d(X_n, X_m) < \delta$，当$\rho_0(X_n, X_m) = 0$；

则称$\{X_n\}$为广域中的基本点列。在广域H中若每个基本点列都有向收敛，则称(H, ρ)为完备的广域度量空间。

定义 21.13 H为非类空广域，设S是一线性赋范空间，如果S按照拟距离$\rho(X, Y) = \| X - Y \|$是完备的，称S为广域 Banach 空间。

在广域中也可引入点集概念，并给出点集的连续性。

定义 21.14 $H = C \cup \Xi$为非类空广域，H_i中设E为点集，$f(X)$是定义在E上的函数。对任给正数$\varepsilon > 0$，存在正数$\delta > 0$，使当$X, X_0 \in E$，由$0 \leqslant \rho_0(X_0, X) \leqslant 1$确定$X$和$X_0$的方位，有$\| X - X_0 \| < \delta$，对应$\| f(X) - f(X_0) \| < \varepsilon$，则称函数$f(X)$按$\rho_0(X_0, X)$的方向在点$X$处连续。

点集的有条件连续的概念也可推广到 Minkowski 几何的度量空间，并引入度量空间中连续映射的概念。

定义 21.15 $H = C \cup \Xi$为非类空广域，对应度量空间(H, ρ)。设T是X到Y的一个映射，$X, X_0 \in H_i$，$\rho(X, X_0)$是按$0 \leqslant \rho_0(X_0, X) \leqslant 1$方位确定$X, X_0$的距离，如果对于任意正数$\varepsilon > 0$，存在正数$\delta > 0$，使对$H_i$中满足$\rho(X, X_0) \leqslant \delta$的$X, X_0$对应有$\rho(TX, TX_0) \leqslant \varepsilon$，则在广域$H_i$中称$T$在$X_0$处按$\rho_0(X_0, X)$的方向连续。若$T$在$H$中每一点按一定度量条件都连续，则称$T$为$H$上的有向连续

映射。

定义 21.16　$H=C\cup\Xi$为非类空广域，如存在一个满映射 $T, X\to Y$ 使对任意的 $X_1X_2\in H_i$，设 X,Y 分别是以 ρ_X,ρ_Y 为距离的广域距离空间，满足 $\rho_Y(TX_1,TX_2)=\rho_X(X_1,X_2)$，则称 T 是 X 到 Y 的等距映射。

在 Minkowski 复空间，时空间隔不变量和能量动量关系可分别看做四维坐标空间 X'_μ, X_μ 和四维动量空间 P'_μ, P_μ 的等距映射，即保持坐标变换下的不变量。

21.5　广域 Hilbert 空间

由 Minkowski 复空间可抽象出一类广域 Hilbert 空间。

定义 21.17　完备的广域内积空间称为广域 Hilbert 空间。

因 Minkowski 复空间由连通区域 C 和连续零因子区域 Ξ 构成，符合广域条件，所以完备的内积空间是广域的 Hilbert 空间。在广域可引入广义正交概念。

定义 21.18　广域 H 中两个元数(向量)X,Y，如果 X,Y 的内积等于零，即 $\langle X,Y\rangle=0$，则

(1) 如果 X,Y 均不为零因子元，称 X,Y 为正交的，用 $X\perp Y$ 表示；

(2) 如果 X,Y 为同类零因子元，存在 $\langle X,Y\rangle=0$ 则 X,Y 也是正交的，也记为 $X\perp Y$，包含零因子元的正交称为广义正交；

(3) 当 $X=Y$ 时，称 $\langle X,Y\rangle=0$ 自共轭正交。

在 Minkowski 复空间中相互复共轭的零因子元 X^*, X 为自共轭正交，对应互共轭类光区域。

定义 21.19　设 M 是广域 H 的线性子空间，$X\in H$ 如果有 $X_0\in N, X_1\perp M$，使得 $X=X_0+X_1$，则称 X_0 是 X 在 M 上的(正交) 投影，或称为 X 关于 M 的正交分解。

有了正交和正交投影的概念，就可以在广域 Hilbert 空间建立正交系。式(2.1.3)的双曲四元数为双曲复数 X 在复正交坐标中的四个单位坐标向量的线性组合：

$$X=\mathrm{j}\vec{r}+ct=\sum_{n=1}^{4}x_ne_n \tag{21.5.1}$$

其中 $e_i=\mathrm{j}\vec{n}_i, e_4=1, (i=1,2,3)$，$\vec{n}_i$ 为单位实向量。四维 Minkowski 复空间这种性质可推广到 n 维广域 Hilbert 空间。

定义 21.20　广域 H 中的元数列$\{e_n\}$，若 e_n, e_m 为同类零因子，则$\langle e_n,e_m\rangle=0$；且$\langle e_n$ 与 $e_m\rangle$相互正交。若 e_n, e_m 不为零因子，则

$$\langle e_n,e_m\rangle=\begin{cases}0 & m\neq n\\ 1 & m=n\\ -1 & m=n\end{cases} \tag{21.5.2}$$

称$\{e_n\}$为 H 中的标准正交系。其中元数列为实数,式(21.5.2)取 1;元数列为虚数,式(21.5.2)取−1。

定义 21.21 设 H 为广域,在 Ξ 区域可存在非零元数共轭正交$\langle X,Y\rangle = 0$,而连通区域C中不再存在非零元数使它与所有的e_n 正交,则称$\{e_n\}$为 H 中的广域正交系。

例 21.6 在 Minkowski 复空间考虑 n 个质点,它们的时空位置分别用 $X_{\mu 1}$,$X_{\mu 2}$,…,$X_{\mu n}$ 表示。每个质点的四维时空位矢都可抽象为 n 维广域 Hilbert 空间的一个正交坐标基底,取

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{n} X_{\mu i}\vec{e}_i \tag{21.5.3}$$

由正交性:$\langle \psi(\vec{r},t),\Psi(\vec{r},t)\rangle = \sum_{i=1}^{n} R_i^2$ 不变量,为 n 个质点对应的时空间隔不变量。

定义 20.8 中广域 H 的同类格空间称广域格空间,简称广域格。格空间将 Minkowski 的类时区和类光区通过格式化的形式联系起来,并且当 $X_n - X_m = d\theta \in \Xi_i$ 和 $X'_n - X'_m = d\theta^* \in \Xi_i^*$,对应

$$\langle X_n - X_m,\ X_n - X_m\rangle = d^2\langle \theta,\theta\rangle = 0 \tag{21.5.4}$$

取距离

$$\rho(X_n,X_m) = d(X_n,X_m) \tag{21.5.5}$$

则式(21.5.4)和(21.5.5)是与广域内积相对应的距离空间 (H,ρ)。由于 $X_n - X_m = d\theta \in \Xi_i$ 和 $X'_n - X'_m = d\theta^* \in \Xi_i^*$ 相互正交,如果式(21.5.5)是完备的,则广域格空间与广域 Hilbert 空间相对应。取 $d = d_1,d_2,\cdots,d_i,\cdots$,为一系列分立值,整个格空间为由相互正交的类光间隔构成了一个分立空间,$d_i = [\Delta r_i] = c|\Delta t_i|$ 为第 i 个格的线度,构成了广域格空间中的一个格。

定义 21.22 完备的分立格空间称为广域 Hilbert 相空间,广域格空间中的一个格,在相空间中称为相格。

广域 Hilbert 相空间是由 Minkowski 空间抽象出来的,时空点可用分立的相格来取代。如果将微观客体引入非质点相格,利用非欧几何赋予的公理体系和泛函分析结构讨论物理问题,无论对狭义相对论还是量子力学在数学基础和物理诠释方面都可能带来新的变革。由于 Minkowski 空间的时空性质具有方向异性,广域 Hilbert 空间有别于传统的由 Euclidean 空间抽象的 Hilbert 空间。分析两类空间的异同,有助于理解量子力学由于基础框架的瑕疵产生的疑难问题,将对量子力学给出新的解释和新的内容。

Euclidean 空间各向同性,在其度量空间所定义两点的距离 ρ 只有线度或长度的改变;但 Minkowski 空间的奇异性使其度量 $\rho = d\rho_0$ 既具有线度的变化,也具有

方位的改变。在 C_i 中可具体分析为，时空点间的度量不同，世界线与 α 轴的辐角也不同。对非类空间隔用方向因子 $0 \leqslant \rho_0(X,Y) \leqslant 1$ 表示世界线与 α 轴正向的方位，辐角主值范围在 $\varphi \sim \pm \frac{\pi}{4}$ 之间。

类时区的类时间隔，辐角取 $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{4}$，方位因子 $0 < \rho_0(X,Y) \leqslant 1$，拟距离 $\rho = d\rho_0 > 0$ 有不同取值。Minkowski 空间类时区的类时间隔可抽象出一类 Hilbert 空间，这类 Hilbert 空间只能描述实物客体之间的相互作用及实物客体本身的运动规律；对于类时区的类光间隔，辐角主值 $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$，对应方位因子 $\rho_0 = 0$，虚距离 $\rho = d > 0$。类光区与类时区取得了几何关联，所以 Minkowski 空间类时区的类光间隔可抽象出一类 Hilbert 空间，这类 Hilbert 空间与正交格空间相对应，分立相格对应于实物粒子，即实物粒子的量子跃迁以及吸收或放出光量子可通过定向相格间的联系表现出来；类光区的类光间隔与光量子和电磁场相对应，方向因子 $\rho_0(X,Y) = 0$，距离空间 (H,ρ) 的虚距离 $\rho = d > 0$ 满足完备性，可抽象一类描述类光区的 Hilbert 空间。

定义 21.23　$H = C \cup \Xi$ 为非类空广域，C_i 为类时子区域，Ξ_i 为类光区域。

(1) C_i 中，类时间隔所对应的完备的内积空间称为第一类广域 Hilbert 空间；

(2) C_i 中，类光间隔所对应的完备内积空间称为第二类广域 Hilbert 空间；

(3) Ξ_i 中，完备的内积空间称为第三类广域 Hilbert 空间。

取 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 为完全集，且有任意阶连续偏导数，可引入广域 Riemann 度量空间。

定义 21.24　H 为广域，存在 $H \times H \to R$，取双变量实值函数 $\rho = \langle \cdot , \cdot \rangle$，满足：

(1) $\rho(X,Y) \geqslant 0$ 且 $\rho(X,Y) = 0$，当且仅当 $X - Y \in \Xi$；

(2) $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$；

(3) 变量 $\langle \cdot$ 或 $\cdot \rangle$ 满足 e_∞；

称 (H,ρ) 为广域 Riemann 度量空间。

21.6　Hilbert 空间的对比分析

广域 Hilbert 空间以非欧几何为原空间，对双曲 Minkowski 空间建立了公理体系并赋予泛函分析结构。可以提出这样问题，传统 Minkowski 空间理论为什么不能建立相应公理体系抽象出 Hilbert 空间呢？由椭圆复数所对应的赝欧空间，时空间隔不变量具有式(2.4.5)复矢量缩并形式，与式(2.1.4)内积形式是有区别的。赝欧矢量的内积对应式(2.3.5)，它不是 Minkowski 空间的时空间隔不变量。

如不能定义具有内积形式的不变量，就不能通过 Minkowski 空间的公理体系抽象出相应的 Hilbert 空间。因此，将双曲复数引入 Minkowski 空间，不仅具有几何结构，也具有分析结构和广域 Hilbert 空间，表现了较高的数学秩序。

量子力学的数学基础为 Hilbert 空间，由 Euclidean 空间为原空间抽象出的 Hilbert 空间与 Minkowski 空间为原空间抽象出的广域 Hilbert 空间有哪些区别呢？Euclidean 空间各向同性，不具有光量子亦即场的对应区域，所对应的距离或度量不能刻画光量子的局域性质。特别是，由内积所定义的不变量式(2.3.5)无论在实空间还是在复空间均为 $\langle Y,Y\rangle = c^2t^2+r^2$。由传统 Hilbert 空间可以给出具有分立结构的相空间，但用分立相格可以描述实物粒子的非质点性质，却不能描述光量子的量子态，更不能给出实物粒子与光量子耦合的几何情况。正是由于 Hilbert 空间不能描述分立的光量子，所以将传统 Hilbert 空间作为量子力学的数学基础，是不能给出具体的几何空间，实物客体吸收或放出光量子也不能给出几何描述。应该说，传统 Hilbert 空间本身是完备的，但把它应用于量子力学描述量子跃迁和光量子耦合无论从数学角度还是从物理角度都是有缺陷的。Minkowski 空间几何结构与 Hilbert 空间分析结构的抵触关系，是量子力学与狭义相对论不能融合的关键。

以 Euclidean 空间为原空间抽象出 Hilbert 相空间的局限性表现在描述微观客体各量子态是孤立的，相互之间不能用光量子进行几何沟通。对于低速运动的微观客体，空间坐标与时间坐标相分离，很难用因果规律描述粒子的运动行为。广域 Hilbert 相空间的不同区域分别描述分立化的实物粒子和光量子。类时区与类光区的几何联系，使实物粒子不再是一个孤立客体，各个实物粒子之间可以通过光量子取得因果关联，不同的实物客体可以通过交换光信号发生质量和能量的传递和改变，所有的实物客体构成了一个辩证统一体。类光区作为类时区各时空点相互联系的几何背景，表现在物理上就是实物粒子之间的联系具有电磁场所对应的真空背景。利用广域 Hilbert 空间作为量子力学的数学基础，将物质组成的两种不同物态通过内在关联辩证地统一起来，必将赋予新的物理诠释和哲学诠释，也能建立起一个完备的微观理论体系。因此，以 Minkowski 几何为原空间抽象出广域 Hilbert 相空间为狭义相对论和量子理论提供了一个统一的几何结构和分析结构，终结了狭义相对论没有分析结构而量子力学没有几何结构的现状，为两论的一元化奠定了理论基础。

第二十二章　广域空间的多拓扑

Minkowski 空间的类时区每一时空点都对应着类光区的奇点问题，对应着由于方向不同或方向因子不同所带来的度量和性质的改变。类光区的邻近关系和局域性质拓展了 Euclidean 几何公理体系，拟度量空间 (H,ρ) 和虚度量空间 (H,d) 的区分使非 Euclidean 几何的公理体系具有了空间奇异性和多度量特点。通过讨论四维双曲复空间中各区域的时空特点和度量关系，进而论述同一时空区域中两点间的邻近关系和局部性质可以分析双曲复空间的拓扑结构和微分结构。

22.1　广域空间的邻近关系与局部性质

Minkowski 复空间具有方向奇异性，同一类时区两个物理事件的几何关联可分为三类，包括类时事件、类空事件和类光事件，这种奇异性表现了时空点的邻近关系和局部性质。同一类时区 C_i 取时空点 $X_0(ct_0,\mathrm{j}\vec{r}_0)$ 和邻近它的点集 $X(ct,\mathrm{j}\vec{r})$，由广域复空间的拟度量 (H,ρ) 和虚度量 (H,d) 可以讨论该点的邻近关系，并给出邻域和开球的定义。

定义 22.1　取 $\forall X,X_0\in H$，H 为广域，对应拟度量空间 (H,ρ) 和虚度量空间 (H,d)，令 ε 和 δ 是一正数，满足 $0<\rho(X,X_0)<\varepsilon$ 的点 X 的集合，称做点 X_0 的拟邻域；满足 $\rho(X_0,\varepsilon=0,\delta)=0, 0\leqslant d(X,X_0)<\delta$ 的点 X 的集合，称做点 X_0 的虚邻域，记作

$$U=[(X_0,\varepsilon,\delta)\mid 0<\rho(X,X_0)<\varepsilon;\rho(X,X_0)=0,0\leqslant d(X,X_0)<\delta]$$

定义 22.2　H 中 C_i 区域，集合 $S_1=\{X\mid X,X_0\in C_i,\rho_0(X,X_0)=0,d(X,X_0)<\delta\}$；$S_2=\{X\mid X,X_0\in C_i,\rho(X,X_0)=d(X,X_0)\rho_0(X,X_0)<\varepsilon\}$；如存在 $S=S_1\cup S_2$，称 C_i 中 X_0 为中心，对应 H 中 ε 为拟半径，δ 为虚半径的虚拟开球。

在四维 Minkowski 复空间 $H(ct,\mathrm{j}\vec{r})$ 中，取时空点 X_0 与邻近点集 X 满足方程

$$c^2(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2-(z-z_0)^2=\rho^2 \qquad (22.1.1)$$

则在四维实空间 $h(ct,\vec{r})$ 形成的四维球是在 (h,ρ) 中以 $X_0(ct_0,\vec{r}_0)$ 为中心，ρ 为半径的拟开球。但四维 Minkowski 复空间 $H(ct,\mathrm{j}\vec{r})$ 具有方向异性的特点，形成的开球需要性质不同集合的并来覆盖。约定两时空点间不能跨越零因子线，可在类时区同一个连通区域 C_i 中取时空点 X_0 与点的集合 X，并由定义 21.8 取拟距离 $\rho(X,Y)=d(X,Y)\rho_0(X,Y)$，方位因子 $\rho_0=(\mathrm{ch}^2\varphi-\mathrm{sh}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$。由辐角或方位因子

的不同可分别给出三类拟、虚距离：

(1) 当 ct 轴辐角满足 $-\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{4}$ 时，拟距空间 (H,ρ) 中的类时间隔满足 $|c\Delta t|>|\Delta\vec{r}|$，拟距离为

$$\rho=(|c^2\Delta t^2-\Delta r^2|)^{\frac{1}{2}} \tag{22.1.2}$$

(2) 当 ct 轴辐角满足 $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，拟距离空间 (H,ρ) 中的类空间隔满足 $|c\Delta t|<|\Delta\vec{r}|$，取拟距离为

$$\rho=(|\Delta r^2-c^2\Delta t^2|)^{\frac{1}{2}} \tag{22.1.3}$$

(3) 当 ct 轴辐角满足 $\varphi=\pm\frac{\pi}{4}$，虚距离空间 (H,d) 中的类光间隔 $|c\Delta t|=|\Delta\vec{r}|$，取虚距离为

$$d=c|\Delta t|=|\Delta\vec{r}| \tag{22.1.4}$$

双曲度量空间 (H,ρ) 中取距离 $\rho=d\rho_0$，其中，$d\geqslant 0$ 为线度因子，$0\leqslant\rho_0\leqslant 1$ 为方向因子。由定义 22.1 和三类拟、虚距离，对于类时区 C_i 中点 X_0 的开球和集合分三种情况进行讨论：

(1) 同一个类时区 C_i 中，X_0 与点的集合 X 满足条件 $|c\Delta t|>|\Delta\vec{r}|$ 和 $0<\rho_0\leqslant 1$。辐角取 $-\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}<\varphi<\frac{5\pi}{4}$，有拟距方程 $c^2\Delta t^2-\Delta r^2=\rho^2$。在 (H,ρ) 中形成以 X_0 为中心，$\rho(X,X_0)$ 为拟距离，$0<\rho(X,X_0)\leqslant d$ 为半径的类时开球，X 为满足式(22.1.2)的点的类时集合。

(2) 同一个类时区 C_i 中，X_0 与点的集合 X 满足条件 $|c\Delta t|<|\Delta\vec{r}|$ 和 $0<\rho_0\leqslant 1$。辐角取 $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$，对应拟距方程 $\Delta r^2-c^2\Delta t^2=\rho^2$。在 (H,ρ) 中形成 X_0 为中心，$\rho(X,X_0)$ 为拟距离，$0<\rho(X,X_0)\leqslant d$ 为半径的类空开球，X 为满足式(22.1.3)的点的类空集合。

(3) 同一个类时区 C_i 中，X_0 与点的集合 X 的连线平行或垂直于类光区，辐角为 $\varphi=\pm\frac{\pi}{4}$ 或 $\varphi=\pm\frac{3\pi}{4}$，满足 $|c\Delta t|=|\Delta\vec{r}|$。在 (H,ρ) 中有 $\rho_0=0$；在 (H,d) 中取 $d(X_0,X)=c|\Delta t|=|\Delta\vec{r}|>0$，则在 $(H,\rho=0)$ 和 (H,d) 中形成 X_0 为中心，$d(X_0,X)$ 为虚距离，$\rho(X,X_0)=d$ 为半径的类光开球，X 为满足式(22.1.4)的点的类光集合。

由第一章利用 Gudemannian 函数可以建立双曲复平面 $H(ct,\mathrm{j}r)$ 和二维实平面 $E(ct,r)$ 之间几何开球的对应关系。将 $H(ct,\mathrm{j}r)$ 和 $E(ct,r)$ 的坐标轴分别重合，在 $E(ct,r)$ 中取时空点 X_0 为中心，点的集合 X 为圆的开球，对应在 $H(ct,\mathrm{j}r)$ 中是以时空点 X_0 为中心，点的集合 X 为图 22.1 中的梅花曲线。显然，拟开球四

瓣梅花曲线为按角度不同分别由类时开球或类空开球组成，其中一对水平梅花瓣为类时开球，竖直梅花瓣为类空开球，而直线段为类光开球。

四维 Minkowski 复空间具有方向异性特点，使时空点的邻域和开球表现为不光滑性。类光区与类时区的关联，使类光区的局部性质在类时区得以描述，物理上对应光量子和有静质量粒子的联系。例如，如果限定 C_1 中的非类空间隔，则类时间隔对应 $0<\rho_0\leqslant 1$，辐角 $0<\varphi<\frac{\pi}{4}$；类光间隔对应 $\rho_0=0$，辐角 $\varphi=\frac{\pi}{4}$。对于限定 C_8 中类时间隔有 $0<\rho_0\leqslant 1$，$0>\varphi>-\frac{\pi}{4}$；类光间隔对应 $\rho_0=0$，$\varphi=-\frac{\pi}{4}$。在类光区 Ξ_i 中，X_0 与点的集合 X 满足条件 $|c\Delta t|=|\Delta\vec{r}|$，有 $\rho_0=0$，辐角 $\varphi=\pm\frac{\pi}{4}$ 或 $\varphi=\pm\frac{3\pi}{4}$，在 (H,ρ) 中形成以 X_0 为中心，$\rho(X,X_0)=d$ 为半径的类光开球。

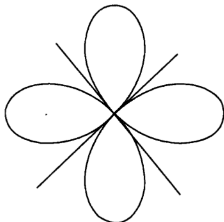


图 22.1　拟虚开球图

22.2　广域开集

由广域的双度量空间 (H,ρ) 和 (H,d) 可给出相关的邻域和开集的分类。

定义 22.3　对 $\forall X,X_0\in H$，H 为双曲广域，$d(X,X_0)$，$\rho_0(X,X_0)$ 为非负数，如果有

(1) 对应于 ε 是一正数，满足 $0<\rho(X,X_0)=d(X,X_0)\rho_0(X,X_0)<\varepsilon$ 的点 X 的集合；

(2) (H,ρ) 中满足 $\rho_0(X,X_0)=0$，对应 (H,d)，取正数 δ，满足 $d(X,X_0)<\delta$ 的点 X 的集合；

称做点 X_0 的对应于 (H,ρ) 和 (H,d) 中的拟、虚邻域，记作

$$U=[(X_0,\varepsilon,\delta)\mid H:0\leqslant\rho(X,X_0)<\varepsilon;0<d(X,X_0)<\delta]$$

由于 Minkowski 复域具有方向奇异性，从定义 22.2 对非类空情况可以给出三类拟、虚邻域：

第一类邻域　类光区 Ξ 中，满足 $\rho_0(X,X_0)=0$，$d(X,X_0)<\delta$ 的点 X 的集合，是 Ξ 中对应 (H,d) 的虚邻域；

第二类邻域　类时区 C_i 中，满足 $0<\rho(X,X_0)<\varepsilon$ 的点 X 的集合，是 C 中对

应 (H,ρ) 的拟邻域；

第三类邻域　类时区 C_i 中，满足 $\rho_0(X,X_0)=0$，$d(X,X_0)<\delta$ 的点 X 的集合，是 C 中对应 (H,d) 的虚邻域。

有了邻域的分类，就可以定义广域开集。在非类空广域 $H(C,\Xi)$ 中，C 为类时区，Ξ 为类光区，$H(C,\Xi)$ 中可引入六类开集，分别对应广域拓扑空间。

定义 22.4　$H(C,\Xi)$ 中 Ξ_1 为类光区，X_n,X_m 为 Ξ_1 中元数，设子集 $U_1\subset\Xi_1$，如对 $\forall X_n,X_m\subset U_1$，在 (H,ρ) 中存在 $\rho(X_n,X_m)=\rho_0(X_n,X_m)d(X_n,X_m)$，其中方向因子 $\rho_0(X_n,X_m)=0$，线度因子满足 $0<d(X_n,X_m)<\delta$，使得 $B_1(X_n,d)\subset U_1$，称 U_1 为 Ξ_1 中类光开集，$\{U_1\}$ 为类光开集族。

定义 22.5　$H(C,\Xi)$ 中 Ξ_2 为类光区，X_n,X_m 为 Ξ_2 中元数，设子集 $U_2\subset\Xi_2$，且有 $\Xi_2\perp\Xi_1$，取乘法“$\circ$”，使得 $\Xi_1\circ\Xi_2=\Xi_2\circ\Xi_1=0$。如对 $\forall X_n,X_m\subset U_2$，在 (H,ρ) 中 $\rho(X_n,X_m)=\rho_0(X_n,X_m)d(X_n,X_m)$，存在方向因子 $\rho_0(X_n,X_m)=0$，线度因子对应 $0<d(X_n,X_m)<\delta$，使得 $B_2(X_n,d)\subset U_2$，称 U_2 为 Ξ_2 中类光开集，$\{U_2\}$ 为类光开集族，且 $\{U_1\}$ 和 $\{U_2\}$ 称为正交开集族。

定义 22.6　$H(C,\Xi)$ 中，设子集 $U_3\subset C_i$，$i=1,2,3,\cdots$，取 $X_n,X_m\in C_i$ 为同一类时区域，如对 $\forall X_n,X_m\subset U_3$，且经过 X_n 与 X_m 两点的直线平行 Ξ_1（或垂直 Ξ_2）。在 (H,ρ) 中 $\rho(X_n,X_m)=\rho_0(X_n,X_m)d(X_n,X_m)$，存在 $\rho_0(X_n,X_m)=0$，$0<d(X_n,X_m)<\delta$，使得 $B_3(X_n,d)\subset U_3$，称 U_3 为 C_i 中类光开集，$\{U_3\}$ 为 C_i 中类光开集族。

定义 22.7　$H(C,\Xi)$ 中，设子集 $U_4\subset C_i$，$i=1,2,3,\cdots$，取 $X_n,X_m\in C_i$ 为同一类时区域，如对 $\forall X_n,X_m\subset U_4$，且经过 X_n 与 X_m 两点的直线平行 Ξ_2（或垂直 Ξ_1）。在 (H,ρ) 中 $\rho(X_n,X_m)=\rho_0(X_n,X_m)d(X_n,X_m)$，存在 $\rho_0(X_n,X_m)=0$，$0<d(X_n,X_m)<\delta$，使得 $B_4(X_n,d)\subset U_4$，称 U_4 为 C_i 中类光开集，$\{U_4\}$ 为 C_i 中类开集族，且 $\{U_3\}$ 和 $\{U_4\}$ 互为正交开集族。

定义 22.8　$H(C,\Xi)$ 中，设子集 $U_5\subset C_i$，$i=1,2,3,\cdots$，取 $X_n,X_m\in C_i$ 为同一类时区域，如对 $\forall X_n,X_m\subset U_5$，在 (H,ρ) 中 $\rho(X_n,X_m)=\rho_0(X_n,X_m)d(X_n,X_m)$，存在 $0<\rho(X_n,X_m)<\varepsilon$，$\rho_0(X_n,X_m)=\rho_0(\varphi)$，$\varphi$ 为实轴 ct 辐角，满足 $-\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{4}$，使得 $B_5(X_n,\rho)\subset U_5$，称 U_5 为 C_i 中类时开集，$\{U_5\}$ 为 C_i 中类时开集族。

定义 22.9　$H(C,\Xi)$ 中，设子集 $U_6\subset C_i$，$i=1,2,3,\cdots$，取 $X_n,X_m\in C_i$ 为同一类时区域，如对 $\forall X_n,X_m\subset U_6$，在 (H,ρ) 中 $\rho(X_n,X_m)=\rho_0(X_n,X_m)d(X_n,X_m)$，存在 $0<\rho(X_n,X_m)<\varepsilon$，$\rho_0(X_n,X_m)=\rho_0(\theta)$，$\theta$ 为虚轴 $\mathrm{j}r$ 辐角，满足 $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$，使得 $B_6(X_n,\rho)\subset U_6$，称 U_6 为 C_i 中类空开集，$\{U_6\}$ 为 C_i 中类空开集族。

我们在 $H(C,\Xi)$ 中的类光区 $\Xi(\Xi_1,\Xi_2)$ 中定义了两类开集，在类时区 $C(C_i, i=1,2,3,\cdots)$ 中定义了四类开集。取 ϕ 为空集，可证得 $\Xi(\Xi_1,\Xi_2)$ 中集族满足

$$\begin{aligned}\{U\}_\Xi &= \bigcup_{i=1}^{2}\{U_i\}_\Xi \\ \bigcap_{i=1}^{2}\{U_i\}_\Xi &= \phi\end{aligned} \tag{22.2.1}$$

类时区 $C(C_i, i=1,2,3,\cdots)$ 中所对应的 $H(C,\Xi)$ 中满足

$$\begin{aligned}\{U_C\} &= \bigcup_{i=3}^{6}\{U_i\}_C \\ \bigcap_{i=3}^{6}\{U_i\}_C &= \phi\end{aligned} \tag{22.2.2}$$

则 $H(C,\Xi)$ 中集族满足

$$\begin{aligned}\{U_H\} &= \bigcup_{i=1}^{6}\{U_i\}_H = \{U_i\}_C \cup \{U_i\}_\Xi \\ \bigcap_{i=1}^{6}\{U_i\}_H &= \phi\end{aligned} \tag{22.2.3}$$

在广域度量空间中，方向因子 $\rho_0(X_n,X_m)$ 决定了开集的类型。当 $\rho_0(X_n,X_m)$ 一定时对应的开集叫同类开集，开集族 $\{U_{\rho_0(\varphi)}\}$ 称为由 $\rho_0(\varphi)$ 决定的同类开集族。

定理 22.1　广域 $H(C,\Xi)$ 的度量空间 (H,ρ) 中 $\rho=d\rho_0$，设 S 是由 $\rho_0(\varphi)$ 决定的任意同类开集，$\{S\}$ 为同类开集族，具有如下性质：

(1) S 和空集 ϕ 是同类开集；

(2) 两个同类开集的交是一个同类开集；

(3) 任意一个开集族的并是一个同类开集。

证明　S 按定义 22.4 至定义 22.9 是一个同类开集，空集 ϕ 没有元数，也认为它满足开集条件，对(1)和(3)是显而易见的。对(2)由定义 20.5 以及定义 22.4 至定义 22.7 在度量空间 (H,ρ) 中 $\rho_0(X_n,X_m)=0$，定义 22.8 和定义 22.9 满足 $0<\rho_0(X_n,X_m)\leqslant 1$，则 $0<\rho(X_n,X_m)\leqslant d$。取 $0<d<\varepsilon$，设 V_1,V_2 是 $H(C,\Xi)$ 中同类开集，如果 $V_1\cap V_2=\phi$，则结论成立；设 $V_1\cap V_2\neq\phi$，$H(C,\Xi)$ 中任取一点 $x\in V_1\cap V_2$，则存在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$，有 $U_i(x,\varepsilon_1)\subset V_1$，$U_i(x,\varepsilon_2)\subset V_2$，$(i=1,2,\cdots,6)$。令 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$，则 $U_i(x,\varepsilon)\subset U_i(x,\varepsilon_1)\subset V_1$，$U_i(x,\varepsilon)\subset U_i(x,\varepsilon_2)\subset V_2$，即 $U_i(x,\varepsilon)\subset V_1\cap V_2$，则(2)成立。

22.3　多拓扑结构

Minkowski 复空间具有方向异性的特点，使四维非欧时空的度量体系有别于 Euclidean 几何的公理体系，时空元数的邻域和开球需要由多类开集覆盖，因此度

量空间 (H,ρ) 抽象出的拓扑空间也应具有奇异性质，由定理 22.1 作如下定义。

定义 22.10 设 S 是 $H(C,\Xi)$ 中通过 $\rho=d\rho_0(\varphi)$ 的一个集合，$\rho_0(\varphi)$ 为一个限定，τ 是 S 一个子集族，其中成员叫做 S 的开集，如 τ 满足下列三个条件，就叫集合 S 的一个拓扑。

(1) S 和 ϕ 是开集；

(2) 两个开集的交是一个开集；

(3) 任意多个开集的并是一个开集。

集合 S 与 τ 在一起叫 H 的一个广域拓扑空间。

显然 $H(C,\Xi)$ 构成了一个多拓扑空间，称 H 拓扑，记作 (H,τ)。非欧时空的不光滑性表现为度量空间 (H,ρ) 中的距离 $\rho=d\rho_0$ 由线度因子 a 和角度因子 ρ_0 共同决定，因为 $0\leqslant\rho_0(\varphi)\leqslant 1$ 在同一个区间具有多个取值，通过限定 ρ_0 的固定取值可给出一个同类集合。在类光区中，通过定义 22.4 和定义 22.5 中限定 $\rho_0=0$，给出开集 U_1 和 U_2 分别构成一个拓扑空间；取 C_1 类时区域中开集 U_3 和 U_4，限定 $\rho_0=0$，也分别构成一个拓扑空间；在 C_1 区域中由定义 22.8，限定 $0<\rho_0(\varphi)\leqslant 1$，可给出一类拓扑，命名为类时拓扑，但一般类时间隔是不能给出一个统一的度量，即一般不满足度量的三角关系。但是，如果限定 ρ_0 为一个固定取值，物理事件的世界线就确定了，距离的大小和方位也确定了，所对应的开集 U_5 通过定义 22.10 可以给出一个拓扑空间。

双曲复空间 $H(C,\Xi)$ 的拟距空间和虚距空间分别是可度量化的，但时空的奇异性和多度量性质使同一时空点的邻域需要用不同类的开集和拓扑覆盖，而不同类拓扑的并，不一定构成拓扑，例 $U_1\cup U_2$ 和 $U_3\cup U_4$ 就不构成拓扑。类时间隔的不同类拓扑的并一般也不构成拓扑。双曲复空间 $H(C,\Xi)$ 的多拓扑性质为 Minkowski 复空间方向奇异性奠定了理论基础。由于广域拓扑的复杂性，本章仅对 (H,τ) 部分性质进行讨论，首先讨论 (H,τ) 的平庸性质。

定理 22.2 度量空间 (H,ρ) 中方向因子 $\rho_0(\varphi)=0$，拟距离 $\rho=d\rho_0=0$ 所诱导的拓扑为平庸拓扑；但虚距离 $\rho=d>0$ 为非平庸拓扑。

证明 拟距离空间 $(H,\rho=0)$，仅有元数 0，则拓扑空间 (H,τ) 写为 $(0,\phi)$ 是平庸拓扑。虚距离空间 $(H,\rho_0=0,\rho=d)$，$\rho=d>0$ 对应非空开集为非平庸拓扑。

定义 22.11 设 X 是一个集合，在限定 A 中 $\xi=\{X,\tau\}_A$ 是 X 的一个平庸拓扑，如果 A 可诱导 B，使 $\zeta=\{X,\tau\}_{A,B}$ 成为 X 的一个非平庸拓扑，则称 $\zeta=\{X,\tau\}_{A,B}$ 为 $\xi=\{X,\tau\}_A$ 派生拓扑或诱导拓扑。

由 Euclidean 几何的公理体系所对应的平庸拓扑空间一般为有限个点所构成，但在 Minkowski 空间平庸拓扑空间却是一类无限大的类光区域。类时区中任一物理事件，只要它与其他事件通过光信号取得因果联系，其时空间隔不变量所对

应的模均为零，度量空间所抽象出的拓扑空间也为平庸拓扑空间。类光区对应电磁场或光量子的定义域，全类光空间的拟距度量均为零，所以平庸拓扑空间也称全域拓扑空间，对应整个 $H(\Xi)$ 的拟距度量空间。由平庸拓扑空间可以派生或诱导出非平庸拓扑空间，即虚距度量空间或称定域拓扑空间。在类时区它刻画了两物理事件通过光信号的传递所表现的因果联系，这种联系可以通过邻域和开集等概念叙述它的邻近关系。平庸拓扑诱导非平庸拓扑是非欧度量空间所独有的性质，体现了度量的突变和时空的不光滑性。它是各向同性的 Euclidean 几何所不具备的性质。M. Freedman 提出四维空间具有多种微分结构也体现了这种突变性质。平庸拓扑诱导非平庸拓扑以及全域拓扑空间派生定域拓扑空间的性质在量子力学中具有重要的应用。

广域度量空间包括了拟距度量空间和虚距度量空间，其中虚距度量空间是在拟距离的角度因子等于零的情况下所诱导的虚距离。如果 X 是具有广域度量的集合，则通过不同的邻域的族是 X 上的一个拓扑，此拓扑称为广域度量诱导的拓扑，以 X 的广域度量所诱导的拓扑空间称为广域拓扑空间。

定理 22.3 广域拟距度量空间在限定角度因子 $0 < \rho_0(\varphi) \leqslant 1$ 时为 Hausdorff 空间。

证明 广域拟距度量空间 (X,ρ) 的拟距离 $\rho = d\rho_0$，当在 $0 < \rho_0(\varphi) \leqslant 1$ 中限定一个 $\rho_0(\varphi)$，则 ρ 由 $d > 0$ 来决定。设 x 及 y 是 (X,ρ) 的两个相异的点，则 $\rho = d\rho_0 > 0$。取 ε 是一正实数，满足条件 $0 < \varepsilon < \dfrac{\rho(x,y)}{2}$，则 $B(x,\varepsilon)$ 及 $B(y,\varepsilon)$ 是分别包含 x 及 y 的开集，且 $B(x,\varepsilon)$ 及 $B(y,\varepsilon)$ 不相交。可在 x 及 y 之间取 $z \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon)$，有

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y) = \rho(x,z) + \rho(y,z) < \varepsilon + \varepsilon < \rho(x,y)$$

有矛盾，所以 $B(x,\varepsilon)$ 及 $B(y,\varepsilon)$ 不相交。

定理 22.4 广域拟距度量空间的限定角度因子 $\rho_0(\varphi) = 0$ 为平庸拓扑空间，派生的虚距度量空间 (X,d) 为 Hausdorff 空间。

定理 22.4 的证明可参照定理 22.2 和定理 22.3 而得证。

22.4 广域拓扑的分类和应用

双曲复域 $H(C,\Xi)$ 与 Minkowski 复空间相对应，物理上 C 区域对应静质量为 m_0 的实物粒子，Ξ 区域对应静质量为零的各种场。按照各类拓扑在物理上的应用，可命名 (Ξ_1,τ_1)，(Ξ_2,τ_2) 分别为逆从场拓扑和协从场拓扑，适用于电磁场理论；(C,τ_3)，(C,τ_4) 分别命名为拟从场粒子拓扑和协从场粒子拓扑，它们具有不同的微分结构，适用粒子和场的耦合；(C,τ_5) 命名为粒子拓扑，适用于一般相对论质

点系粒子；(C,τ_6) 为类空间隔，不能对应具有因果联系的物理事件。

在四维 Minkowski 动量空间，类时区域作平行和垂直 Ξ 的几何线(面)，将整个四维 Minkowski 相空间分成一系列定向相格。试将每个相格对应一个微观客体的量子态，沿任意两个相邻的平行线(面)取两个相邻相格，看做某微观客体通过跃迁所对应的初末量子态，每个非质点相格在 C 区域应具有粒子特征。在场粒子拓扑中，C 区域相格的基本线度可以表示具有静止质量微观客体的特征长度，不同相格之间的量子跃迁通过吸收或放出光量子与 Ξ 区域的类光粒子取得了因果联系。也就是说，微观客体特征长度与场的相干波长相关联，这是波粒二象性在 Minkowski 复空间的几何解释。对高速粒子满足 Lorentz 变换，Dirac 微分方程中时间分量和坐标分量均为一次微分，分立相格的线度为等距的；低速粒子满足 Galilei 变换，对应的 Schrödinger 方程时间分量为一次微分，坐标分量为二次微分，分立相格的线度不是等距的。但能量分量均满足关系式 $h\nu = E_2 - E_1$，其中 E_1, E_2 分别对应相邻相格微观客体跃迁前后的能态，$h\nu$ 为类光区域光量子的能态。可具体描述为，处于某一能级的粒子，其空间位置在连通区域对应某一相格，能级跃迁后处于另一能级，并对应另一相格，同时吸收或放出的光量子在零因子区也对应一个相格。这样通过对八维双曲相空间的定向格式化，在场粒子拓扑理论中可形象地刻画微观客体在分立时空进行能级跃迁以及场与粒子的耦合关系，从而使量子理论的基本假设在 Minkowski 复空间中找到一种合理的几何解释。

广域度量空间拟距离所诱导的粒子拓扑可以描述实物粒子的运动行为，高速粒子满足 Lorentz 变换，低速粒子满足 Galilei 变换。由于在粒子拓扑中不能与场取得联系，粒子可抽象为质点，对应狭义相对论或 Newton 力学的物理问题。场粒子拓扑描述的实物粒子与其运动行为无关，微观理论描述微观客体在运动中与光量子的相互作用，需要综合考虑粒子拓扑和场粒子拓扑的叠加作用。场粒子拓扑是由广域度量空间拟距离为零即平庸拓扑空间抽象出来的。它描述了实物粒子之间通过交换光信号取得的因果联系，因为涉及类时区的所有时空点，所以具有全域性。拟距离为零对应 Minkowski 复空间的类光区，传统理论不能讨论其邻近关系和局域性质，这也是狭义相对论和量子力学的缺憾所在。其实，在量子力学中，光量子的能量 $h\nu$ 和波长 λ 对应广域度量空间中的虚距离，使量子力学赋予了一种几何结构，将双曲多拓扑赋予它内在的物理内容会对量子力学和相对论的几何解释和拓扑分类给出重要的理论指导作用。在 Minkowski 复空间进行拓扑分类，其中场粒子拓扑既有别于一般经典物理的拓扑结构，也有别于相对论中宏观物体的拓扑结构。由于场粒子拓扑能够表述量子力学中一系列基本原理，我们认为，这为解决量子理论的拓扑结构打开了一个突破口，实际上，量子力学的拓扑问题一直是人们关心的热点。

Minkowski 空间的特点就是各向异性并具有无限大的类光区域。类光区是

光量子和电磁场的对应区域，在数学上又称迷向区或零因子区。这种四维的非Euclidean几何具有相当的复杂性，它的多微分结构和多拓扑问题一直是该学科的前沿课题。20世纪80年代，M. Freedman提出四维空间拓扑学中至少有两种微分结构，并预测四维空间和其他维空间之间这种本质区别是拓扑学的一个惊人的成就，它也可能是某些深刻而重要的物理原理的反映。我们在此所讲的所谓多拓扑，是相对Euclidean空间为原空间的拓扑理论而言的。因为Minkowski空间具有方向奇异性，表现为不同方向时空点的多微分结构。如将传统的拓扑理论称为单拓扑，它主要刻画点与点的邻近关系；而多拓扑不仅涉及不同点之间的邻近关系，也要考虑不同拓扑间的边值问题。这好比单色毛线织的毛衣，表现为各向同性；但多种颜色毛线织成的毛衣就可表现为各向异性，除了考虑同种颜色的毛线点与点的关系外，还要考虑不同颜色毛线之间的搭配关系和边值问题。正是Minkowski空间这种奇异性和多微分结构，可能建立起类光区和类时区的几何联系并通过它们特殊的度量关系来讨论奇点的局域性质，当然，这需要对Minkowski空间引入相应的公理体系，并进行代数和分析结构的建立。

Hawking的量子引力论也是想通过奇点度量和时空量子化来解决相对论与量子力学的几何关联问题。在广义相对论中，引力隐藏在流形的几何图形之中，并用它的曲率来定量描述，即物理学就是几何，这是所谓的"几何简明性"。同样，在四维Minkowski复空间，电磁场和微观客体以及它们之间相互关联也隐藏在Minkowski复空间的几何结构之中，使这种抽象的数学结构赋予它内在的物理诠释。Minkowski复空间的方向奇异性反映了Minkowski时空性质与拓扑分类的关联，这为大范围拓扑的几何化问题提出了一个新的课题。要想建立电磁场理论和引力理论的统一框架，首先应弄清它们对应几何空间的相互关联。弯曲的Riemann空间应是一种抽掉虚单位j的双曲复空间，这为建立Minkowski空间和Riemann空间的内在关联提供了理论依据。

广域Hilbert空间的原空间是一种新的、抽象的非Euclidean空间，它有别于传统的Hilbert空间。在这一抽象的空间中，实物粒子与光量子具有了不同的分立相格和定域区。它们不仅具有相对论效应，也能用时空坐标理论描述微观客体的几何属性和分析结构，形成相对论和量子力学的统一而自洽的数学框架。可以提出这样问题，两论一元化的主要特征是什么？利用双曲复函理论使两论对应的时空间、坐标变换、不变量、度量公理、群表示、算子算法、拓扑形式等得到了形式上的统一，并完善了它们的几何结构、分析结构以及代数结构就可能在数学基础中达到了一元化表述。这也促使我们有必要建立一种新的，包含相对论效应的量子理论，它应该囊括整个近代物理理论。

第二十三章　四维复空间的微积分及特殊函数

Minkowski 复空间具有方向奇异特点，双曲复函的极限既要注意趋近方向性也要考虑不同区域的关联性。类时区与类光区的关联可以描述实物粒子局域性和电磁场全域性的因果联系。Minkowski 空间的不光滑性使微积分具有了方向的限制，这有别于传统微积分的定义和性质。四维空间的 Cauchy-Riemann 方程和 Laplace 方程与传统相关方程类比具有性质上的差异。四维 Fourier 变换是三维空间 Fourier 变换的扩展，一方面是时空维数的扩展，另一方面也是实数到多复数的扩展。广域 Hilbert 相空间具有正交性的完备函数可以用 δ 函数和算符来表示，在量子力学中具有重要的应用。

23.1　双曲复函数的极限和连续

在 Minkowski 复空间 H 中取非类空点集 E、F，若 E 中的每个复数都在 F 中有唯一确定的复数与之对应，则在集 E 上确定了一个函数。用 f 表示该函数，记作 f：$E \to F$，E 称为函数 f 的定义域。将定义域 E 表示为 z，而把 F(f 的取值范围) 表示为 $w = f(z)$，称为映射。双曲复数 $w_0 = f(z_0)$ 称做点 z_0 在映射 f 之下的像，而点 z_0 则称做点 w_0 的原像。

定义域 E 中各点在 f 之下的像的全体记作 $f(E)$

$$f(E) = \{f(z) : z \in E\} \tag{23.1.1}$$

在 Minkowski 复空间要求双曲复函数单值，并可采用实部和虚部分开的二元方式。令 $z = ct + j\vec{r}$ 为四维双曲复数，点 z 所对应的 $f(z)$ 也可分写成实部和虚部

$$w = f(z) = f(ct + j\vec{r}) = u(ct, \vec{r}) + jv(ct, \vec{r}) \tag{23.1.2}$$

每一个双曲复函数都对应于两个二元实函数 $u(ct, \vec{r})$，$v(ct, \vec{r})$，例如，取 $w = z^2$，则有

$$w = z^2 = (ct + j\vec{r})(ct + j\vec{r}) = c^2t^2 + r^2 + 2jct\vec{r}$$

其中，

$$u = c^2t^2 + r^2, \quad v = 2ct\vec{r}$$

Minkowski 复空间的方向奇异性使复函数的极限要考虑时空的取向问题。在第二十一章已经讨论了点列的极限和连续问题，为了引入 Minkowski 复空间的导数和微分结构，现在从复函数的角度来定义极限和连续。

定义 23.1　H 为非类空广域，H_i 中设 E 为点集，E 上的函数 $w = f(z)$ 在

$z_0(\neq z)$ 处有定义，且 z_0 的类光去心邻域满足 $|z-z_0|=0$，z_0 的类时去心邻域满足 $0<|z-z_0|<R(R>0)$。如 w_0 是给定的一个复数，若对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得在类时去心邻域中有 $0<|z-z_0|<\delta$ 时恒有 $|f(z)-w_0|<\varepsilon$；在类光去心邻域中有 $|z-z_0|=0$，对应 $|f(z)-w_0|=0$。或合写成，在 $0\leqslant|z-z_0|<\delta$ 时，满足 $0\leqslant|f(z)-w_0|<\varepsilon$，则称当 z 趋于 z_0 时 $f(z)$ 以 w_0 为极限，记作 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=w_0$。

类时广域 H 有向极限的几何意义是，在 Minkowski 复空间的类时区中某时空点作为聚点时，其他时空点向它收敛时要考虑方向性问题，在收敛的不同方向上对应的距离或度量数值和性质是不同的。由于聚点的类时邻域和类光邻域分别对应不同的拓扑结构，在类时拓扑中可仿照实函数的极限定义，通过时空间隔来刻画时空点的邻域。即时空变点 z 进入 z_0 的充分小的去心邻域时，与它对应的像点 w 就落入 w_0 的一个给定的 ε 邻域之中。同一类时邻域满足：

(1) 若极限存在，则必唯一；

(2) 若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在点 z_0 处有极限，则二函数的和、差、积、商(分母极限不为零)在点 z_0 仍然有极限，且极限值分别等于 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在点 z_0 的极限值的和、差、积、商。

复函数的极限与该函数的实部和虚部的极限有关，所以复函数的极限可用二元实函数的极限来表示。

命题 23.1　设 $f(z)=u(ct,\vec{r})+\mathrm{j}v(ct,\vec{r})$，$A=a+\mathrm{j}b$，$z_0=ct_0+\mathrm{j}\vec{r}_0$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{ct\to ct_0\\ \vec{r}\to\vec{r}_0}}u(ct,\vec{r})=a$，$\lim\limits_{\substack{ct\to ct_0\\ \vec{r}\to\vec{r}_0}}v(ct,\vec{r})=b$，当 $|a|>|b|$ 时为类时邻域的极限，$|a|=|b|$ 时为类光邻域的极限。

证明　由

$$|f(z)-A|=|u(ct,\vec{r})-a+\mathrm{j}[v(ct,\vec{r})-b]|$$
$$\leqslant|u(ct,\vec{r})-a|+|v(ct,\vec{r})-b|$$

充分性得到证明。再从

$$|u(ct,\vec{r})-a|\leqslant|f(z)-A|\text{和}|v(ct,\vec{r})-b|\leqslant|f(z)-A|$$

必要性得到证明，且 $|a|=|b|$ 时 $|f(z)|=|A|=0$ 为类光区的时空间隔。

定义 23.2　H 为非类空广域，H_i 中设 E 为点集，E 上的函数 $w=f(z)$ 在 $z_0(\neq z)$ 处有定义。若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，即对任给正数 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta>0$。对类时邻域，只要 $\|z-z_0\|<\delta$，对应 $\|f(z)-f(z_0)\|<\varepsilon$；对类光邻域有 $\|z-z_0\|=0$，有 $\|f(z)-f(z_0)\|=0$，则称函数 $f(z)$ 在点 z_0 处连续。若 $f(z)$ 在点集 E 中每点都连续，则称 $f(z)$ 在点集 E 上连续。

广域复函数连续性第二十一章已有叙述，在此不加证明地认为满足如下结论：

(1) 连续复函数的和、积仍然是同一点或同一区域的连续复函数。

(2) 同一区域连续复函数的差,对应相互负元区域的复函数直和的连续运算,定义为同一区域或同一点的连续复函数。两复函数连线平行或垂直类光区时差值是类光区的连续复函数。

(3) 同一区域连续复函数的商(分母极限不为零)定义为同一区域或同一点的连续复函数。

(4) 分母极限为零时对应类光区函数,可利用实部函数 $u(ct,\vec{r})$ 和虚部函数 $v(ct,\vec{r})$ 的等值关系来定义复函数的连续性。

(5) 同类连续复函数的复合函数仍然是连续复函数。

命题 23.2 $f(z)=u(ct,\vec{r})+\mathrm{j}v(ct,\vec{r})$ 在 $z_0=ct_0+\mathrm{j}\vec{r}_0$ 处连续的充要条件是 $u(ct,\vec{r})$ 及 $v(ct,\vec{r})$ 在 $(ct_0,\vec{r}_0)$ 处都连续。

23.2 广域函数的微积分

由于 Minkowski 复空间的方向奇异性和多拓扑结构使双曲函数的微积分具有其特殊性,微分极限和积分方向要考虑不同类型的时空间隔。对类时间隔和类空间隔的微积分与传统数学的微积分类同;对类光间隔的微积分,表现了类时区各时空点与类光区的几何联系。将函数的导数和微分的概念推广到广域中的复函数,并考虑极限趋近的方向。取 $z=ct+\mathrm{j}\vec{r}$,$z_0=ct_0+\mathrm{j}\vec{r}_0$,有 $\Delta z_0=c\Delta t+\mathrm{j}\Delta\vec{r}$,$\lim\limits_{z\to z_0}\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{c\Delta t\to 0\\ \Delta r\to 0}}$。由 $|c\Delta t|=|\Delta\vec{r}|$,$|c\Delta t|>|\Delta\vec{r}|$ 以及 $|c\Delta t|<|\Delta\vec{r}|$,分别表示极限沿类光间隔、类时间隔以及类空间隔三个不同方位趋近。

定义 23.3 H 为非类空广域,设函数 $w=f(z)$ 在 H 上有定义,$z,z_0,\Delta z\in H$。取 $z=a+\mathrm{j}b$,$z_0=a_0+\mathrm{j}b_0$,$\Delta z=\Delta a+\mathrm{j}\Delta b$,若同类(零)因子的极限

$$\lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\Leftrightarrow\lim_{\Delta a\to 0}\frac{f(a_0+\Delta a)-f(a_0)}{\Delta a}\text{ 和}\lim_{\Delta b\to 0}\frac{f(b_0+\Delta b)-f(b_0)}{\Delta b}$$

存在,则称 $f(z)$ 在点 z_0 定向可导;这个定向极限值称为 $f(z)$ 在点 z_0 的有向导数,简称导数,记作 $f'(z)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=z_0}$。

定向导数分为三种类型:当 $|\Delta a|=|\Delta b|$,为类光导数;$|\Delta a|>|\Delta b|$,为类时导数;$|\Delta a|<|\Delta b|$,为类空导数。类时区同一时空点的多导数或多微分结构体现了 Minkowski 复空间的不光滑性。若取

$$\rho(\Delta z)=\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0) \tag{23.2.1}$$

则

$$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z \tag{23.2.2}$$

定义 23.4　广域函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 的增量 Δw 可表示为

$$\Delta w = A\Delta z + o(|\Delta z|) \tag{23.2.3}$$

其中，A 是一个与 z_0 有关的复常数，则称 $w=f(z)$ 在点 z_0 处可微，$A\Delta z$ 称为 $w=f(z)$ 在点 z_0 的微分，记作

$$\mathrm{d}w = A\mathrm{d}z \tag{23.2.4}$$

或写成

$$\mathrm{d}w = f'(z_0)\mathrm{d}z \tag{23.2.5}$$

有向导数 $f'(z)$ 或 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\big|_{z=z_0}$ 如对应类光间隔的微积分表现了类时区各时空点与类光区的几何联系，增量 $\mathrm{d}w$ 的实部和虚部相等，满足

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^*\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right) = 0 \tag{23.2.6}$$

命题 23.3　广域函数在一点可导(可微)，则必在该点连续。$w=f(z)$ 在广域 H 内处处可导时，称 $f(z)$ 在广域 H 内可导。

双曲复函数每一类积分都对应着一类性质不同的拓扑结构，所以积分路径不能跨越不同的拓扑结构。即在 Minkowski 复空间是不能进行环路积分的，一般情况下可沿世界线进行积分。

定义 23.5　广域 H 中，L 为同一类型(类时、类光、类空)时空间隔所对应的曲线(世界线)。A 和 B 分别为 L 的起点和终点，$w=f(z)$ 是定义在 L 上的一个连续函数。在 L 上任取分点 $z_0(=A), z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n(=B)$，$\xi_k$ 是第 k 段 $[z_{k-1}, z_k]$ 上的任一点。令 $n\to\infty$，且每一段长度 $|\Delta z|\to 0$ (类光间隔 $|\Delta z|=0$)时，若和式的极限 $\lim\limits_{\max|\Delta z|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$ 存在，且与弧段的分法及各 ξ_k 的选取无关，则称此极限为 $f(z)$ 沿曲线 L 的积分，记作

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\max|\Delta z|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \tag{23.2.7}$$

双曲复变函数的积分性质和路径与传统的复变函数积分有一定区别。在 Minkowski 复空间某类时区中，积分路径分为类时路径、类光路径以及类空路径，一般情况下三者不能相互混扰和重叠。如不考虑类空路径，在四维时空间(或四维动量空间)中类时路径往往沿世界线积分，其中惯性系中的世界线为直线，非惯性系的世界线为曲线，对应实物粒子的运动轨迹或粒子与粒子之间的因果作用；类光路径是指沿平行或垂直类光区的路径，积分的结果与过程无关，只与初末态的差值有关，满足

$$\int_{\mu}^{\nu} f(z)\mathrm{d}z = S(\nu) - S(\mu) = S(\theta) \in \Xi \tag{23.2.8}$$

有关系

$$S^{+}(\theta)S(\theta)=0 \tag{23.2.9}$$

式(23.2.8)类同于传统物理中保守力场的积分，因为保守场的积分与路径无关，只与初末态的位置有关。不同的是，四维类光路径积分需要指定积分沿类光路径，初末态的差值联系着类光区的时空点。其实，保守力场积分和类光路径积分也存在着共同点，它们都对应着实物客体与保守场的相互作用，只是电磁场对应的是平直空间，引力场为弯曲空间。类光路径积分可能为消除量子场论中质量积分发散问题提供了一种解决方法，即质量和电荷积分并不存在或不考虑积分的累计效果，只考虑初末态物理量的差值，显然，这种积分与非欧几何的时空奇异性质存在着逻辑关联。

23.3　双曲广域的 Cauchy-Riemann 方程

由命题 23.1 和命题 23.2，广域函数 $f(z)=u(ct,\vec{r})+\mathrm{j}v(ct,\vec{r})$ 在 $z_0=ct_0+\mathrm{j}\vec{r}_0$ 点的极限和连续可归结为函数的实部和虚部 $u(ct,\vec{r})$ 及 $v(ct,\vec{r})$ 在 $(ct_0,\vec{r}_0)$ 处的极限和连续。$f(z)$ 的可导和可微也可用 $u(ct,\vec{r})$ 及 $v(ct,\vec{r})$ 的微分形式来表示。

定理 23.1　广域函数 $f(z)=u(ct,\vec{r})+\mathrm{j}v(ct,\vec{r})$ 在点 $z_0=ct_0+\mathrm{j}\vec{r}_0$ 可导的充要条件是，二元函数 $u(ct,\vec{r})$ 及 $v(ct,\vec{r})$ 在点 $(ct_0,\vec{r}_0)$ 处可微并在该点满足 Cauchy-Riemann 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial ct}=\frac{\partial v}{\partial \vec{r}},\quad \frac{\partial v}{\partial ct}=\frac{\partial u}{\partial \vec{r}} \tag{23.3.1}$$

证明　先证必要性。设 $f(z)$ 在点 $z=ct+\mathrm{j}\vec{r}$ 可导，记

$$f'(z)=a+\mathrm{j}b$$

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+\mathrm{j}\Delta v$$

由式(23.2.2)，得

$$\Delta u+\mathrm{j}\Delta v=(a+\mathrm{j}b)(c\Delta t+\mathrm{j}\Delta\vec{r})+\rho(\Delta z)\Delta z$$

设 $\rho(\Delta z)=\rho_1+\mathrm{j}\rho_2$，所以

$$\begin{aligned}\Delta u+\mathrm{j}\Delta v&=(a+\mathrm{j}b)(c\Delta t+\mathrm{j}\Delta\vec{r})+(\rho_1+\mathrm{j}\rho_2)(c\Delta t+\mathrm{j}\Delta\vec{r})\\&=ac\Delta t+b\Delta\vec{r}+\rho_1 c\Delta t+\rho_2\Delta\vec{r}+\mathrm{j}(a\Delta\vec{r}+bc\Delta t+\rho_2 c\Delta t+\rho_1\Delta\vec{r})\end{aligned} \tag{23.3.2}$$

由于 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$，则 $\lim\limits_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta r\to 0}}\rho_1=0$，$\lim\limits_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta r\to 0}}\rho_2=0$。比较式(23.3.2)两边的实部和虚部，得

$$\Delta u=ac\Delta t+b\Delta\vec{r} \tag{23.3.3}$$

$$\Delta v=bc\Delta t+a\Delta\vec{r} \tag{23.3.4}$$

或写成

$$a=\frac{\partial u}{\partial ct}=\frac{\partial v}{\partial \vec{r}},\quad b=\frac{\partial v}{\partial ct}=\frac{\partial u}{\partial \vec{r}} \tag{23.3.5}$$

满足式(23.3.1)。

再证充分性。设 $u(ct,\vec{r})$ 及 $v(ct,\vec{r})$ 在点 $(ct,\vec{r})$ 可微，写成全微分

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial ct}c\Delta t+\frac{\partial u}{\partial \vec{r}}\Delta\vec{r}+\eta_1$$

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial ct}c\Delta t+\frac{\partial v}{\partial \vec{r}}\Delta\vec{r}+\eta_2$$

其中，η_1,η_2 为高阶无穷小。设 $u(ct,\vec{r})$ 及 $v(ct,\vec{r})$ 满足 Cauchy-Riemann 方程，取 $a=\frac{\partial u}{\partial ct}=\frac{\partial v}{\partial \vec{r}},b=\frac{\partial v}{\partial ct}=\frac{\partial u}{\partial \vec{r}}$，则有

$$\begin{aligned}f(z+\Delta z)-f(z)&=\Delta u+\mathrm{j}\Delta v=ac\Delta t+b\Delta\vec{r}+\eta_1+\mathrm{j}(bc\Delta t+a\Delta\vec{r}+\eta_2)\\&=(a+\mathrm{j}b)(c\Delta t+\mathrm{j}\Delta\vec{r})+(\eta_1+\mathrm{j}\eta_2)\end{aligned}$$

即

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=a+\mathrm{j}b+\eta$$

其中，$\eta=\frac{\eta_1+\mathrm{j}\eta_2}{c\Delta t+\mathrm{j}\Delta\vec{r}}$，使

$$|\eta|\leqslant\frac{|\eta_1|}{\sqrt{c^2\Delta t^2-\Delta r^2}}+\frac{|\eta_2|}{\sqrt{c^2\Delta t^2-\Delta r^2}}\to 0,\quad(\Delta z\to 0)$$

从而

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=a+\mathrm{j}b \tag{23.3.6}$$

即 $f(z)$ 在点 $z=ct+\mathrm{j}\vec{r}$ 可微。

导数公式可写作

$$\begin{aligned}f'(z)&=a+\mathrm{j}b=\frac{\partial u}{\partial ct}+\mathrm{j}\frac{\partial v}{\partial ct}=\frac{\partial v}{\partial \vec{r}}+\mathrm{j}\frac{\partial u}{\partial \vec{r}}\\&=\frac{\partial u}{\partial ct}+\mathrm{j}\frac{\partial u}{\partial \vec{r}}=\frac{\partial v}{\partial ct}+\mathrm{j}\frac{\partial v}{\partial \vec{r}}\end{aligned} \tag{23.3.7}$$

将定理 23.1 应用于区域，可以得到函数解析的一个充要条件。

定理 23.2　广域函数 $f(z)=u(ct,\vec{r})+\mathrm{j}v(ct,\vec{r})$ 在区域 H 内解析的充要条件是 $u(ct,\vec{r})$ 及 $v(ct,\vec{r})$ 在广域 H 内可微且满足 Cauchy-Riemann 方程。

在广域中函数有二阶连续偏导数且满足 Laplace 方程，称为调和函数。在三维实数空间 Laplace 算子为

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{23.3.8}$$

命题 23.4 广域 H 内解析函数的实部与虚部都是 H 内的调和函数。

证明 设 $f(z)=u(ct,\vec{r})+\mathrm{j}v(ct,\vec{r})$ 在广域 H 内解析。由 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial ct}=\frac{\partial v}{\partial \vec{r}},\quad \frac{\partial v}{\partial ct}=\frac{\partial u}{\partial \vec{r}} \tag{23.3.9}$$

式(23.3.9)再次进行微分，可得

$$\frac{\partial^2 u}{c^2\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial \vec{r}\partial ct},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial ct\partial \vec{r}} \tag{23.3.10}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \vec{r}\partial ct}=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2},\quad \frac{\partial^2 v}{c^2\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{c\partial t\partial \vec{r}} \tag{23.3.11}$$

$u(ct,\vec{r})$ 及 $v(ct,\vec{r})$ 具有任意阶连续偏导数，由式(23.3.10)和(23.3.11)，可得

$$\frac{\partial^2 u}{c^2\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2},\quad \frac{\partial^2 v}{c^2\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \tag{23.3.12}$$

由式(23.3.12)可写成

$$\frac{\partial^2 u}{c^2\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0 \tag{23.3.13}$$

以及

$$\frac{\partial^2 v}{c^2\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)=0 \tag{23.3.14}$$

因为 $f(z)=u(ct,\vec{r})+\mathrm{j}v(ct,\vec{r})$，则由式(23.3.13)和(23.3.14)可组合成

$$\frac{\partial^2 f}{c^2\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)=0 \tag{23.3.15}$$

式(23.3.15)为四维复函数的 Laplace 方程，式(23.3.15)也可写成

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_\mu^+\partial X_\mu}=0 \tag{23.3.16}$$

23.4 Euclidean 复空间的 Cauchy-Riemann 方程

作为对比，在四维 Euclidean 复空间引入 Cauchy-Riemann 方程和 Laplace 方程。取椭圆复函数 $f(z)=u(ct,\vec{r})+\mathrm{i}v(ct,\vec{r})$，在 $z_0=ct_0+\mathrm{i}\vec{r}_0$ 点的极限和连续可归结为函数的实部 $u(ct,\vec{r})$ 和虚部 $v(ct,\vec{r})$ 在 $(ct_0,\vec{r}_0)$ 处的极限和连续。$f(z)$ 的可导和可微也可用 $u(ct,\vec{r})$ 及 $v(ct,\vec{r})$ 的微分形式来表示。

定理 23.3 复函数 $f(z)=u(ct,\vec{r})+\mathrm{i}v(ct,\vec{r})$ 在点 $z_0=ct_0+\mathrm{i}\vec{r}_0$ 处可导的充要条件是，二元函数 $u(ct,\vec{r})$ 及 $v(ct,\vec{r})$ 在点 $(ct_0,\vec{r}_0)$ 可微并在该点满足

Cauchy-Riemann 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial ct}=\frac{\partial v}{\partial \vec{r}},\quad \frac{\partial v}{\partial ct}=-\frac{\partial u}{\partial \vec{r}} \tag{23.4.1}$$

证明　在此只证必要性。设 $f(z)$ 在点 $z=ct+\mathrm{i}\vec{r}$ 处可导，记

$$f'(z)=a+\mathrm{i}b$$

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v$$

由式(23.2.2)，得

$$\Delta u+\mathrm{i}\Delta v=(a+\mathrm{i}b)(c\Delta t+\mathrm{i}\Delta\vec{r})+\rho(\Delta z)\Delta z$$

设 $\rho(\Delta z)=\rho_1+\mathrm{i}\rho_2$，所以

$$\begin{aligned}\Delta u+\mathrm{i}\Delta v&=(a+\mathrm{i}b)(c\Delta t+\mathrm{i}\Delta\vec{r})+(\rho_1+\mathrm{i}\rho_2)(c\Delta t+\mathrm{i}\Delta\vec{r})\\&=ac\Delta t-b\Delta\vec{r}+\rho_1c\Delta t-\rho_2\Delta\vec{r}+\mathrm{i}(a\Delta\vec{r}+bc\Delta t+\rho_2c\Delta t+\rho_1\Delta\vec{r})\end{aligned} \tag{23.4.2}$$

由于 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$，则 $\lim\limits_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta\vec{r}\to 0}}\rho_1=0$，$\lim\limits_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta\vec{r}\to 0}}\rho_2=0$。比较式(23.4.2)两边的实部和虚部，得

$$\Delta u=ac\Delta t-b\Delta\vec{r} \tag{23.4.3}$$

$$\Delta v=bc\Delta t+a\Delta\vec{r} \tag{23.4.4}$$

或写成

$$a=\frac{\partial u}{\partial ct}=\frac{\partial v}{\partial \vec{r}},\quad b=\frac{\partial v}{\partial ct}=-\frac{\partial u}{\partial \vec{r}} \tag{23.4.5}$$

满足式(23.4.1)。

导数公式可写作

$$f'(z)=a+\mathrm{i}b=\frac{\partial u}{\partial ct}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial ct}=\frac{\partial v}{\partial \vec{r}}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \vec{r}}=\frac{\partial u}{\partial ct}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \vec{r}}=\frac{\partial v}{\partial \vec{r}}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial ct} \tag{23.4.6}$$

定理 23.4　椭圆函数 $f(z)=u(ct,\vec{r})+\mathrm{i}v(ct,\vec{r})$ 在区域 E 内解析的充要条件是 $u(ct,\vec{r})$ 及 $v(ct,\vec{r})$ 在复域 E 内可微且满足 Cauchy-Riemann 方程。

在椭圆复域中函数有二阶连续偏导数且满足 Laplace 方程

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{23.4.7}$$

命题 23.5　椭圆复域 E 内解析函数的实部与虚部都是 E 内的调和函数。

证明　设 $f(z)=u(ct,\vec{r})+\mathrm{i}v(ct,\vec{r})$ 在复域 E 内解析。由 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial ct}=\frac{\partial v}{\partial \vec{r}},\quad \frac{\partial v}{\partial ct}=-\frac{\partial u}{\partial \vec{r}} \tag{23.4.8}$$

式(23.4.8)再次进行微分，可得

$$\frac{\partial^2 u}{c^2\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial\vec{r}\partial ct},\quad -\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial ct\partial\vec{r}} \tag{23.4.9}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\vec{r}\partial ct}=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2},\quad \frac{\partial^2 v}{c^2\partial t^2}=-\frac{\partial^2 u}{c\partial t\partial\vec{r}} \tag{23.4.10}$$

$u(ct,\vec{r})$ 及 $v(ct,\vec{r})$ 具有任意阶连续偏导数，由式(23.4.9)和(23.4.10)可得

$$\frac{\partial^2 u}{c^2\partial t^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial r^2},\quad \frac{\partial^2 v}{c^2\partial t^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \tag{23.4.11}$$

由式(23.4.11)可写成

$$\frac{\partial^2 u}{c^2\partial t^2}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0 \tag{23.4.12}$$

以及

$$\frac{\partial^2 v}{c^2\partial t^2}+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)=0 \tag{23.4.13}$$

因为 $f(z)=u(ct,\vec{r})+\mathrm{i}v(ct,\vec{r})$，则由式(23.4.12)和(23.4.13)可组合成

$$\frac{\partial^2 f}{c^2\partial t^2}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)=0 \tag{23.4.14}$$

式(23.4.14)为四维椭圆复函数的 Laplace 方程，式(23.4.14)也可写为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial Y_\mu^+\partial Y_\mu}=\frac{\partial^2 f}{\partial Y^\mu\partial Y_\mu}=0 \tag{23.4.15}$$

23.5 Minkowski 复空间的 Fourier 变换

Fourier 变换是量子力学中不可缺少的数学工具，但是在 Minkowski 复空间应建立一套与之对应的 Fourier 变换理论，即双曲型 Fourier 变换。在 Minkowski 复空间双曲复数可以写成双曲函数和幂级数形式：

$$X=ct+\mathrm{j}r=R(\mathrm{ch}\varphi+\mathrm{j}\,\mathrm{sh}\varphi)=R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}=R\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{j}\varphi)^n}{n!} \tag{23.5.1}$$

对一般双曲复函 $f(X)$，参照传统的 Fourier 变换理论，在$[-l,l]$区间展成双曲型 Fourier 变换级数

$$\begin{aligned}f(X)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{ch}\frac{n\pi X}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\mathrm{sh}\frac{n\pi X}{l}\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}}{l}n\pi X}+\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}}{l}n\pi X})+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{j}\frac{b_n}{2}(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}}{l}n\pi X}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}}{l}n\pi X})\end{aligned} \tag{23.5.2}$$

或

$$f(X)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}}{l}n\pi X},\quad (-l\leqslant X\leqslant l) \tag{23.5.3}$$

其中，

$$C_0=\frac{a_0}{2},\quad C_n=\frac{1}{2}(a_n+\mathrm{j}b_n),\quad C_{-n}=\frac{1}{2}(a_n-\mathrm{j}b_n) \tag{23.5.4}$$

满足

$$C_{-n}C_n=C_n^*C_n=\frac{1}{4}\left|a_n^2-b_n^2\right| \tag{23.5.5}$$

令 $k_n=\frac{n\pi}{l}$，则

$$f(X)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_nX} \tag{23.5.6}$$

对式(23.5.6)乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_mX}$，并对全空间积分，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_nX}f(X)\mathrm{d}X=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(k)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_mX}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_nX}\mathrm{d}X \tag{23.5.7}$$

取 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_nX}$ 为 Minkowski 复空间一组正交基底，有

$$\int_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(k_n-k_m)X}\mathrm{d}X=\delta(k_n-k_m) \tag{23.5.8}$$

其中，$\delta(k_n-k_m)$ 为 Dirac　δ 函数，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_mX}f(X)\mathrm{d}X=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(k)\delta_{nm}=C_m(k) \tag{23.5.9}$$

令 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_nX}=\psi_n(X)$，代入式(23.5.6)，可写作

$$f(X)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(X')f(X')\psi_n(X)\mathrm{d}X'=\int_{-\infty}^{+\infty}f(X')\delta(X-X')\mathrm{d}X' \tag{23.5.10}$$

式(23.5.10)称为双曲型 Fourier 级数，其中，

$$\delta(X-X')=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(X')\psi_n(X) \tag{23.5.11}$$

取 $\Delta k=1$，式(23.5.6)可写作

$$f(X)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_nX}\Delta k$$

或

$$f(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}kX}\mathrm{d}k \tag{23.5.12}$$

其中，

$$C(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(X)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kX}\mathrm{d}X \tag{23.5.13}$$

式(23.5.12)和(23.5.13)称为双曲型 Fourier 积分。

23.6 Euclidean 复空间的 Fourier 变换

在四维 Euclidean 复空间取椭圆四元数

$$Y = ct + \mathrm{i}r = L(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) = L\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} = L\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\psi)^n}{n!} \tag{23.6.1}$$

式(23.6.1)参照式(19.1.16)和(19.1.19)，展开为四维椭圆型 Fourier 变换级数

$$f(Y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi Y}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi Y}{l}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{l}n\pi Y} + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{l}n\pi Y}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{l}n\pi Y} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{l}n\pi Y}\right) \tag{23.6.2}$$

也可以写成

$$f(Y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{l}n\pi Y} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n Y} \tag{23.6.3}$$

其中，$k_n = \frac{n\pi}{l}$，$-l \leqslant Y \leqslant l$，并满足

$$C_0 = \frac{a_0}{2},\quad C_n = \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}b_n),\quad C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n) \tag{23.6.4}$$

有

$$C_{-n}C_n = C_n^* C_n = \frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2) \tag{23.6.5}$$

对式(23.6.3)乘 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_n Y}$，并对全空间积分，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_n Y} f(Y)\mathrm{d}Y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(k)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_m Y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n Y}\mathrm{d}Y \tag{23.6.6}$$

取

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_n - k_m)Y}\mathrm{d}Y = \delta(k_n - k_m) \tag{23.6.7}$$

参照式(23.5.12)有关系式

$$f(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kY}\mathrm{d}k \tag{23.6.8}$$

其中，

$$C(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(Y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kY}\mathrm{d}Y \tag{23.6.9}$$

式(23.6.8)和(23.6.9)称为椭圆型 Fourier 积分。

23.7　广域 Hilbert 相空间的 δ 函数

在广域 Hilbert 相空间中，每一个微观客体可抽象为一个分立相格，相格的四维时空间隔和四维能量动量间隔均为零，在物理上表示微观实物客体吸收或放出光量子，而光量子的零间隔与实物客体的时空和动量能量变化有关。如果用相格表示微观客体的量子态，用 ψ 表示为态函数，则态函数与时空间隔和动量能量间隔取得了几何关联，这种联系在第八章中进行了论述。由于态函数的正交性和完备性以及 Fourier 均需用 Dirac　δ 函数表示，有必要在广域 Hilbert 相空间中引入 Dirac　δ 函数表示态函数 ψ 的性质。在分立的广域 Hilbert 相空间中的 Dirac　δ 函数与 Minkowski 复空间的方向奇异性有关，取一维 δ 函数：

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0, x\neq x_0\\ \infty, x=x_0\end{cases} \tag{23.7.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=1 \tag{23.7.2}$$

三维 δ 函数可定义为

$$\delta^3(r)=\delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{23.7.3}$$

其中三维矢量 $\vec{r}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$，有关系

$$\delta^3(r)=\begin{cases}0, r\neq r_0\\ \infty, r=r_0\end{cases} \tag{23.7.4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^3(r)\mathrm{d}^3r=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z)\mathrm{d}z=1 \tag{23.7.5}$$

δ 函数为偶函数，满足

$$\delta(x-x_0)=\delta(x_0-x) \text{ 或 } \delta(x)=\delta(-x) \tag{23.7.6}$$

对一维时间，取 $\delta(t-t_0)$ 为 δ 函数，考虑时间的正定性，满足关系

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}0, t\neq t_0\\ \infty, t=t_0\end{cases} \tag{23.7.7}$$

$$\int_{0}^{\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1 \tag{23.7.8}$$

在广域 Hilbert 相空间取四维 δ 函数

$$\delta^4(X)=\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(ct) \tag{23.7.9}$$

其中，

$$X=\mathrm{j}(x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z)+ct \tag{23.7.10}$$

有关系式

$$\delta^4(X)=\begin{cases}0, X\neq 0\\ \infty, X=0\end{cases} \tag{23.7.11}$$

$$\int_{(4)}\delta^4(X)\mathrm{d}^4(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z)\mathrm{d}z\int_{0}^{\infty}\delta(ct)\mathrm{d}(ct)=1 \tag{23.7.12}$$

由式(23.7.9)，当空间坐标在 0 至∞区间取 $\delta^4(X)$，在 $-\infty$至 0 区间取 $\delta^4(X^*)$，考虑时间的正定性，式(23.7.12)满足正定归一性。

数学上通常采用 L. Schwartz 的方法，将 $\delta(X)$ 函数与广义函数联系起来。定义 $f(X)$ 为函数空间的连续线性泛函，称为广义函数与 $\delta(X)$ 函数具有对偶关系。可以将广义函数的概念扩展到双曲复函，设在 Minkowski 复空间抽象出的广域 Hilbert 相空间 $H(\Omega)$ 中，Ω 为某一类时区域，$C(\Omega)$ 为定义在 Ω 上具有连续导数的函数的集合。序列 $\{\varphi_n\}$ 在 $C(\Omega)$ 上收敛到函数 φ，有极限

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi \tag{23.7.13}$$

式(23.7.13)是一个从 $C(\Omega)$ 到双曲复域的一个连续映射，其中任一元数 $\varphi(X)$ 称为基本函数；$C(\Omega)$ 上每一个连续线性泛函 $f(\varphi)$，称为 $C(\Omega)$ 上的广义函数。而 $f(\varphi)$ 与 $\varphi(X)$ 存在一种对偶关系，满足

$$f(\varphi)=\int_H f(X)\varphi(X)\mathrm{d}X \tag{23.7.14}$$

线性连续泛函具有两个基本性质：

(1) 线性，$\forall\ \varphi_1,\varphi_2\in C(\Omega)$，$\forall c_1,c_2\in\mathbf{R}$，有

$$f(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)=c_1f(\varphi_1)+c_2f(\varphi_2) \tag{23.7.15}$$

(2) 连续性，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi,\varphi\in C(\Omega)$，则

$$\lim_{n\to\infty}f(\varphi_n)=f(\varphi) \tag{23.7.16}$$

全体 $C(\Omega)$ 上的广义函数的集合称为广义函数空间。将元数 $\varphi(X)$ 取为 $\delta(X)$ 函数，则所对应的广义函数满足以下的性质。

性质 23.1　在广域 H，若广义函数 $f(X)$ 是定义在坐标区间 $(\infty,-\infty)$，时间区间 $(0,\infty)$ 的连续函数，则

$$\int_{(4)}f(X)\delta(X-X_0)\mathrm{d}X=f(X_0) \tag{23.7.17}$$

由式(23.7.17)可证明 $\delta(X)$ 函数满足式(23.5.12)和(23.5.13)的双曲型 Fourier 积分变换关系，令 $f(X)=\delta(X-X')$，代入式(23.5.13)，得

$$C(k)=\int_{(4)}\delta(X-X')\mathrm{e}^{-jkX}\mathrm{d}X=\mathrm{e}^{-jkX'} \tag{23.7.18}$$

将式(23.7.18)代入式(23.5.12)即有

$$\delta(X-X')=\int_{(4)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kX'}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kX}\mathrm{d}k=\int_{(4)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(X-X')}\mathrm{d}k \tag{23.7.19}$$

式(23.7.19)为$\delta(X)$函数所对应 Fourier 积分变换的四维形式。由式(23.7.19)，取态函数$\psi(X)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}kX}$，$\psi(X')^{*}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kX'}$，则$\delta(X)$函数可构成一组正交归一完备函数表达式

$$\delta(X-X')=\int_{(4)}\psi^{*}(X')\psi(X)\mathrm{d}k \tag{23.7.20}$$

式(23.7.20)在量子力学中具有重要应用。

第二十四章　张量分析与算符表示

双曲复函数的运算规则与 Minkowski 复空间的几何性质相吻合，在非欧几何中用复函数和四维算符构成的微分方程可以通过非欧空间的奇异性质描述实物客体的运动规律和与场的相互作用。在 Minkowski 几何中抽掉双曲虚单位引入一类具有相互厄米共轭性质的逆变张量和协变张量，抽掉虚单位后的时空间，形式上为实空间但仍然保留着双曲复空间中复矢量相互厄米共轭的特点。由于逆变张量和协变张量可扩展到弯曲的 Riemann 空间，这为 Minkowski 复空间与 Riemann 空间的几何关联，狭义相对论到广义相对论的拓展奠定了理论基础。

24.1　逆变张量和协变张量

四维双曲复时空间中把 $(ct, \mathrm{j}\vec{r})$ 看做四个相互独立的分量或元数，命名为四维双曲复矢量。其中，三维空间的矢量 $\vec{r}$ 看做广义复数的虚部，ct 为实部，对四维双曲复矢量进行运算可抽象出一类双曲张量。

定义 24.1　四维双曲矢量的并矢，是两个矢量并写在一起构成 16 个元素，可命名为二阶双曲张量，而双曲矢量可看做一阶双曲张量。

取双曲复矢量 $A(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 和 $B(B_1, B_2, B_3, B_4)$ 的并矢满足

$$T_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu = [A_\mu B_\nu] \quad (\mu = 1, \cdots, 4; \nu = 1, \cdots, 4) \tag{24.1.1}$$

式(24.1.1)所示的并矢运算满足结合律、分配律，但不满足交换律。

定义 24.2　双曲矢量的内积，是在复空间中取矢量 A_μ 与其共轭空间中某一矢量 B_μ^+ 的并矢，再进行一次缩并的联合运算。

双曲矢量的内积可简写成

$$A_\mu B_\mu^+ = B_\mu^+ A_\mu = C \tag{24.1.2}$$

C 为常量，可见双曲矢量的内积为一不变量。当 $B_\mu = A_\mu$ 时，

$$A_\mu^+ A_\mu = R^2 \tag{24.1.3}$$

式(24.1.3)与复数的模平方或时空间隔不变量相对应。

双曲矢量(张量)和其厄米共轭矢量(张量)可分别定义为逆变矢量(张量)和协变矢量(张量)。在四维 Minkowski 复时空间，取两坐标 $X'^\mu = ct' + \mathrm{j}\vec{r}'$ 和 $X^\nu = ct + \mathrm{j}\vec{r}$，它们之间的变换关系可用微分形式表示

$$\mathrm{d}X'^\mu = \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\nu}\mathrm{d}X^\nu \tag{24.1.4}$$

$$dX^{\nu} = \frac{\partial X^{\nu}}{\partial X'^{\mu}} dX'^{\mu} \tag{24.1.5}$$

令

$$C^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial X'^{\mu}}{\partial X^{\nu}}, \quad D^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial X^{\nu}}{\partial X'^{\mu}} \tag{24.1.6}$$

取 A'^{μ},A^{ν} 表示一般四维双曲矢量,可写成

$$A'^{\mu} = C^{\mu}_{\nu} A^{\nu} \tag{24.1.7}$$

$$A^{\nu} = D^{\nu}_{\mu} A'^{\mu} \tag{24.1.8}$$

$$T^{\nu\mu} = D^{\nu}_{\rho} D^{\mu}_{\lambda} T'^{\rho\lambda} \tag{24.1.19}$$

式(24.1.18)和(24.1.19)为二阶双曲逆变张量的变换关系式。同理有二阶双曲协变张量

$$T'_{\mu\nu} = T_{\lambda\rho} \bar{C}^{\lambda}_{\mu} \bar{C}^{\rho}_{\nu} \tag{24.1.20}$$

$$T_{\nu\mu} = T'_{\rho\lambda} \bar{D}^{\rho}_{\nu} \bar{D}^{\lambda}_{\mu} \tag{24.1.21}$$

二阶双曲混合张量可写为

$$\begin{cases} T'^{\mu}_{\nu} = \bar{C}^{\mu}_{\lambda} C^{\rho}_{\nu} T^{\lambda}_{\rho} \\ T^{\nu}_{\mu} = \bar{D}^{\lambda}_{\mu} D^{\nu}_{\rho} T'^{\rho}_{\lambda} \end{cases} \tag{24.1.22}$$

对式(24.1.22)进行缩并，注意到式(24.1.15)，可构成式(24.1.14)的内积空间的不变量。

$$T'^{\mu}_{\mu} = \bar{C}^{\mu}_{\lambda} C^{\rho}_{\mu} T^{\lambda}_{\rho} = \delta^{\rho}_{\lambda} T^{\lambda}_{\rho} = T^{\rho}_{\rho} = C \tag{24.1.23}$$

显然缩并一般只能在混合张量中进行。n 阶双曲张量可表式成

$$T'^{\mu\cdots}_{\nu\cdots} = C^{\mu}_{\xi} \cdots C^{\zeta}_{\nu} \cdots T^{\xi\cdots}_{\zeta\cdots} \tag{24.1.24}$$

双曲张量一般不满足交换律，取二阶双曲张量

$$A^{\mu}A^{\nu} - A^{\nu}A^{\mu} = F^{\mu\nu} \tag{24.1.25}$$

$$A_{\mu}A_{\nu} - A_{\nu}A_{\mu} = F_{\mu\nu} \tag{24.1.26}$$

$$A^{\mu}A_{\nu} - A^{\nu}A_{\mu} = F^{\mu}_{\nu} \tag{24.1.27}$$

其中，式(24.1.25)和(24.1.26)分别称为二阶反对称逆变张量和二阶反对称协变张量。式(24.1.27)为二阶反对称混合张量，式(17.1.5)亦为二阶反对称混合张量。

24.2 四维矢量的梯度、散度和旋度

在四维双曲时空中定义

$$\Box \equiv \frac{\partial}{\partial X_{\mu}} = \frac{\partial}{\partial ct} + \mathrm{j}\,\nabla \tag{24.2.1}$$

$$\Box^{+} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial X_{\mu}}\right)^{+} = \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial ct} - \mathrm{j}\,\nabla \tag{24.2.2}$$

其中式(24.2.1)为协变矢，式(24.2.2)为逆变矢，$\Box$和$\Box^{+}$为相互厄米共轭的四维梯度算子，∇为三维梯度算子。由式(24.1.7)和(24.1.12)，对应变换式为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial X'_{\mu}} = \bar{D}^{\mu}_{\nu} \dfrac{\partial}{\partial X_{\nu}} \\ \dfrac{\partial}{\partial X'^{\mu}} = D^{\nu}_{\mu} \dfrac{\partial}{\partial X^{\nu}} \end{cases} \tag{24.2.3}$$

由式(24.1.14)，对式(24.2.1)和(24.2.2)取内积，满足

$$\square^2 = \frac{\partial}{\partial X_\mu}\frac{\partial}{\partial X^\mu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{24.2.4}$$

可见协变矢与逆变矢的混合内积构成 D'Alembert 算符。

取纯量 ϕ 的梯度

$$\square\phi = \frac{\partial\phi}{\partial X_\mu},\quad \square^+\phi = \frac{\partial\phi}{\partial X^\mu} \tag{24.2.5}$$

式(24.2.5)中，$\frac{\partial\phi}{\partial X_\mu}$ 构成四维双曲协变矢量；而 $\frac{\partial\phi}{\partial X^\mu}$ 为四维双曲逆变矢量。

双曲矢量的梯度为梯度算子与双曲矢量的并矢，构成二阶双曲张量

$$\square\cdot A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial X_\mu},\quad \square^+\cdot A_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} \tag{24.2.6}$$

$$\square\cdot A_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu},\quad \square^+\cdot A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial X_\mu} \tag{24.2.7}$$

式(24.2.6)中第一式和第二式均为二阶混合张量；式(24.2.7)中第一式为二阶协变张量，第二式为二阶逆变张量。

双曲矢量的散度为双曲矢量梯度的内积，构成不变量。有

$$\square A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial X_\mu},\quad \square^+ A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\mu} \tag{24.2.8}$$

$$\square A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\mu},\quad \square^+ A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial X^\mu} \tag{24.2.9}$$

例如，取双曲矢量 $A^\mu = A_0 + \mathrm{j}A, A_\mu = A_0 - \mathrm{j}A$，有

$$\square A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial X_\mu} = \square^+ A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\mu} = \frac{\partial A_0}{\partial ct} + \nabla\cdot\vec{A}$$

$$\square A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu} = \square^+ A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial X^\mu} = \frac{\partial A_0}{\partial ct} - \nabla\cdot\vec{A}$$

显然，对双曲矢量梯度的缩并不受混合张量的限制。

令双曲逆变矢量的四维旋度为

$$(curl)^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial X^\nu} = F^{\mu\nu} \tag{24.2.10}$$

式(24.2.10)为二阶双曲反对称逆变张量。双曲协变矢量的四维旋度为

$$(curl)_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu} = F_{\mu\nu} \tag{24.2.11}$$

式 (24.2.11)为二阶双曲反对称协变张量，式(24.2.10)和(24.2.11)相互厄米共轭。

二阶双曲反对称混合张量可写作

$$(curl)^\nu_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial X_\nu} = F^\nu_\mu \tag{24.2.12}$$

从协变矢和逆变矢的性质来看,式(16.6.21)与(24.2.12)类同,应该为二阶双曲反对称混合张量。

双曲时空中间隔不变量可写作

$$ds^2 = dX_\mu dX^\mu = dX'_\mu dX'^\mu \tag{24.2.13}$$

式(24.2.13)也可写作

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \tag{24.2.14}$$

$$ds^2 = g^{\mu\nu} dX_\mu dX_\nu \tag{24.2.15}$$

$g_{\mu\nu}$ 和 $g^{\mu\nu}$ 称为基本度规张量。利用逆变矢量变换关系式(24.1.5),则式(24.2.14)可写成

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial X'^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial X'^\beta} dX'^\alpha dX'^\beta = g'_{\mu\nu} dX'^\mu dX'^\nu \tag{24.2.16}$$

将式(24.2.16)左边 α、β 与 μ、ν 互换,有

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial X'^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial X'^\nu} g_{\alpha\beta} \tag{24.2.17}$$

故 $g_{\mu\nu}$ 系二阶协变张量。由式(24.2.14)满足

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \tag{24.2.18}$$

同理可定义二阶逆变张量 $g^{\mu\nu}$ 和混合张量 g^μ_ν。且有

$$g^\mu_\nu = g^{\mu\sigma} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\nu \tag{24.2.19}$$

基本度规张量变换性质与通常文献类同。可推广到 Riemann 空间构成弯曲空间基本度规张量和度规不变量。

24.3 逆(协)变张量的性质

双曲复空间定义的逆变张量、协变张量以及混合张量具有特殊的几何意义和物理意义。双曲张量虽然形式上与传统的张量相类同,但它们之间却有很大的区别。众所周知,一般非欧空间可选用两种时空坐标:一种为实数空间,有逆变张量与协变张量之分,较广泛地应用于 Riemann 空间讨论广义相对论问题;另一种为复数空间,有复矢量和共轭矢量之分,较多地应用于平直的 Minkowski 空间或 Euclidean 空间论述狭义相对论和量子理论的内容。在传统理论中虽然两种时空间矢量(张量)都可以通过对偶空间引入,但实数空间的逆变矢量、协变矢量和复数空间的复矢量、共轭矢量之间并没有对等的内在关联。值得注意的是,在双曲复空间或 Minkowski 复空间命名的各种张量具有一种特殊的内在关联。由于两坐标系 X'^μ,X^ν 和 X'_μ,X_ν 分别处于相互对偶的时空中,它们的变换关系式(24.1.7)和(24.1.12)相互厄米共轭,时空变换不变量对应矢量内积关系式(24.1.14)。

在 Minkowski 空间中 X^μ 和 X_μ 的分量形式分别可写成

$$X^1 = x,\quad X^2 = y,\quad X^3 = z,\quad X^4 = ct \tag{24.3.1}$$

$$X_1 = -x,\quad X_2 = -y,\quad X_3 = -z,\quad X_4 = ct \tag{24.3.2}$$

式(24.3.1)和(24.3.2)相互厄米共轭，内积为

$$X^1 X_1 + X^2 X_2 + X^3 X_3 + X^4 X_4 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{24.3.3}$$

式(24.3.3)为时空变换不变量。式(24.2.11)中度规张量可写作

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{24.3.4}$$

可将各类张量以及张量的运算与狭义相对论的复空间联系起来。在Minkowski空间，如图20.1类时区C_1中双曲复向量(复张量)命名为逆变矢(逆变张量)，C_5中的复向量(复张量)可命名为协变矢(协变张量)，它们互为厄米共轭。混合张量可看做这两个区域矢量(张量)的混合积，这样就可把张量以及张量的运算与狭义相对论的对应的复空间联系起来。在本书中，按习惯将双曲复向量或逆变矢写作A_μ，厄米共轭向量或协变矢写作A_μ^+。

实空间中逆变张量和协变张量的厄米共轭关系体现了复空间中复数和其共轭复数的变换性质，使狭义相对论所对应的平直空间和广义相对论的弯曲空间和谐地联系起来。很可能Riemann空间形式上虽然为实数空间，实际上由于逆变张量、协变张量及混合张量包含了双曲复数的全部性质，这种实坐标应是一种抽掉了虚单位所对应的弯曲复空间。双曲复数之所以能把Minkowski空间和Riemann空间和谐地吻合起来，我们认为这反映了这种数学理论和自然规律的协调关系及该理论本身的自洽性。因双曲复数的定义区域就是Minkowski空间，既满足相对论中两个基本原理，又能解释相对论中的物理问题。双曲虚单位的对称性满足$\mathrm{j}^2 = 1$，在把虚单位j抽掉后，双曲复数和其共轭复数用逆变矢和协变矢来取代，各类矢量的并矢运算并不能引起符号的混乱。而椭圆复数却做不到这一点，由于$\mathrm{i}^2 = -1$，在进行各类复矢量并矢运算时掺杂了一些符号的变异，这样就不可能简单地把逆变矢、协变矢与复数对应起来。在这种意义下狭义相对论与广义相对论并没有协调一致，他们各自的矢量表示方法是不相容的，其根本原因是椭圆复数的性质与Minkowski空间性质不符造成的。

在许多文献中，一般认为逆变矢和协变矢仅是同一物理量的不同表式法，对此我们也有异议。在双曲时空中，数学上逆变矢(张量)和协变矢(张量)相互厄米共轭，分别位于两个不同的连通区域；物理上物质有正、反粒子之分，而反粒子的时间、空间及电荷的联合反演对应着正粒子，反之亦然。反粒子的时空区与正粒子的厄米共轭空间有关，分别对应的逆变矢(张量)和协变矢(张量)不仅表示不同的物理量，也可能描述两种不同性质的微观粒子。由此可见双曲复时空间的建立不仅

把狭义相对论和广义相对论的时空性质结合起来，更重要的是，可以将物质世界的半边天——反粒子引进广义相对论，并且认为引力场与电磁场一样参与正、反粒子的产生和湮灭，并由粒子和反粒子共同决定的。事实上，在传统的广义相对论中我们完全抛开了反粒子，并且也无法对反粒子进行讨论。我们相信，双曲复数与 Riemann 空间的吻合一定会给广义相对论和宇宙论带来一场变革，揭开自然的本来面目。

24.4 双曲函数的算符表示

力学量所对应的四维算符可以通过力学量的平均值的求解而得到。在广域 Hilbert 空间，力学量的平均值或量子力学中的期望值为

$$\bar{A} = \int_{(\mu)} \psi^* A\psi \mathrm{d}^{(\mu)} x \tag{24.4.1}$$

其中，$\psi = \sum_n C_n\psi_n$ 为全集，$\mathrm{d}^{(\mu)} x$ 为 μ 维体积元，积分区域为 μ 维全空间积分。在四维 Minkowski 动量空间取平均动量为

$$\overline{P_\mu} = \int_{-\infty\,(\mu=4)}^{+\infty} \varphi^*(P_\mu)P_\mu\varphi(P_\mu)\mathrm{d}^{(\mu)} p \tag{24.4.2}$$

由式(23.5.12)，取

$$\varphi(P_\mu) = \int_{-\infty\,(\mu=4)}^{+\infty} \psi(X_\mu)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}}{\hbar}P_\mu X_\mu^*}\,\mathrm{d}^{(\mu)} x \tag{24.4.3}$$

代入式(24.4.2)，则

$$\overline{P_\mu} = \int_{-\infty\,(3\mu)}^{+\infty} \mathrm{d}^{(\mu)} p\mathrm{d}^{(\mu)} x'\psi^*(X'^*_\mu)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}}{\hbar}P_\mu^* X'_\mu}P_\mu\psi(X_\mu)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}}{\hbar}P_\mu X_\mu^*}\,\mathrm{d}^{(\mu)} x \tag{24.4.4}$$

因 $P_\mu^* X_\mu = P_\mu X_\mu^*$，所以

$$\overline{P_\mu} = \int_{-\infty\,(2\mu)}^{+\infty} \mathrm{d}^{(\mu)} p\mathrm{d}^{(\mu)} x'\psi^*(X'^*_\mu)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}}{\hbar}P_\mu^* X'_\mu}\int_{-\infty\,(\mu)}^{+\infty} \mathrm{d}^{(\mu)} x\psi(X_\mu)(\mathrm{j}\hbar\Box_p^*)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}}{\hbar}P_\mu X_\mu^*} \tag{24.4.5}$$

其中，$\Box_p^*$ 为四维梯度算符。在四维广域 $H(C,\Xi)$，由式(24.2.1) 和(24.2.2)，引入四维 Hamilton 算符

$$\Box_p = \frac{\partial}{\partial ct} + \mathrm{j}\left(\vec{x}_0\frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}_0\frac{\partial}{\partial y} + \vec{z}_0\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial ct} + \mathrm{j}\,\nabla = \frac{\partial}{\partial X_\mu} \tag{24.4.6}$$

式(24.4.6)的复共轭为

$$\Box_p^* = \frac{\partial}{\partial ct} - \mathrm{j}\left(\vec{x}_0\frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}_0\frac{\partial}{\partial y} + \vec{z}_0\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial ct} - \mathrm{j}\,\nabla = \frac{\partial}{\partial X_\mu^*} \tag{24.4.7}$$

在 Minkowski 复空间，如取粒子波函数为 $\psi(X)$，要求单值、连续，在边界 $(\pm\infty)$ 为零。对式(24.4.5)后一部分进行分部积分：

$$\overline{P_\mu} = \int_{\substack{-\infty \\ (2\mu)}}^{+\infty} d^{(\mu)} p d^{(\mu)} x' \psi^* (X'^*_\mu) e^{-\frac{j}{\hbar} P^*_\mu X'_\mu} \int_{\substack{-\infty \\ (\mu)}}^{+\infty} d^{(\mu)} x e^{\frac{j}{\hbar} P_\mu X^*_\mu} (-j\hbar \Box^*_p) \psi(X_\mu) \quad (24.4.8)$$

利用

$$f^*(X^*_\mu) = \int_{\substack{-\infty \\ (2\mu)}}^{+\infty} d^{(\mu)} p d^{(\mu)} x' f^* (X'^*_\mu) e^{-\frac{j}{\hbar} P_\mu (X^*_\mu - X'^*_\mu)} \quad (24.4.9)$$

将式(24.4.9)代入式(24.4.8)，得

$$\overline{P_\mu} = \int_{\substack{-\infty \\ (\mu)}}^{+\infty} d^{(\mu)} x \psi^* (X^*_\mu) \hat{P}_\mu \psi(X_\mu) \quad (24.4.10)$$

其中

$$\hat{P}_\mu = \frac{\hat{E}}{c} + j\hat{\vec{p}} = -j\hbar \Box^*_p = -j\hbar \frac{\partial}{\partial X^*_\mu} = -j\hbar \left(\frac{\partial}{\partial ct} - j\nabla \right) \quad (24.4.11)$$

式(24.4.11)的复共轭

$$\hat{P}^*_\mu = j\hbar \Box_p = j\hbar \frac{\partial}{\partial X_\mu} = j\hbar \left(\frac{\partial}{\partial ct} + j\nabla \right) \quad (24.4.12)$$

式(24.4.11)为四维双曲动量算符，可分写作

$$\hat{\vec{p}} = j\hbar \nabla, \quad \hat{E} = -j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (24.4.13)$$

式(24.4.13)为一维能量和三维动量算符。对式(24.4.11)和(24.4.12)取内积，有关系式

$$\Box^*_p \Box_p = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \quad (24.4.14)$$

由对称性，取坐标函数的平均值

$$\overline{X_\mu} = \int_{\substack{-\infty \\ (\mu=4)}}^{+\infty} \psi^* (X_\mu) X_\mu \psi(X_\mu) d^{(\mu)} x \quad (24.4.15)$$

经运算可以得到式(24.4.10)类同的形式

$$\overline{X_\mu} = \int_{\substack{-\infty \\ (\mu)}}^{+\infty} \varphi^* (P^*_\mu) \hat{X}_\mu \varphi(P_\mu) d^{(\mu)} p \quad (24.4.16)$$

其中

$$\hat{X}_\mu = \hat{ct} + j\hat{\vec{r}} = -j\hbar \Box^*_r = -j\hbar \frac{\partial}{\partial P^*_\mu} = -j\hbar \left(c \frac{\partial}{\partial E} - j\nabla_p \right) \quad (24.4.17)$$

$$\hat{X}_\mu^* = \mathrm{j}\hbar\Box_r = \mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial P_\mu} = \mathrm{j}\hbar\left(c\frac{\partial}{\partial E} + \mathrm{j}\,\nabla_p\right) \qquad (24.4.18)$$

式(24.4.17)和(24.4.18)为四维双曲坐标算符,可分写作

$$\hat{t} = -\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial E}\left(\text{或 } \hat{r}_0 = \hat{ct} = -\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial(E/c)} = -\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial p_0}\right) \qquad (24.4.19)$$

$$\hat{\vec{r}} = \mathrm{j}\hbar\,\nabla_p = \mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{p}} \qquad (24.4.20)$$

式(24.4.19)和(24.4.20)分别为一维时间和三维坐标算符。

将式(24.4.11)和(24.4.17)看做是逆变矢量,它们与式(24.1.4)和(24.2.2)相吻合;式(24.4.12)和(24.4.18)为协变矢量,它们与式(24.1.9)和(24.2.1)相吻合。对式(24.4.17)和(24.4.18)取内积,有关系式

$$\Box_r^*\Box_r = \left(c\frac{\partial}{\partial E}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial p_x}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial p_y}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial p_z}\right)^2 \qquad (24.4.21)$$

24.5 椭圆函数的算符表示

在 Euclidean 复空间,力学量的平均值也可写为

$$\bar{A} = \int_{(\mu)} \psi^* A\psi \mathrm{d}^{(\mu)}x \qquad (24.5.1)$$

其中,$\psi = \sum_n C_n\psi_n$ 为全集,$\mathrm{d}^{(\mu)}x$ 为 μ 维体积元,积分区域为 μ 维全空间积分。在四维 Euclidean 动量空间,取平均动量为

$$\overline{P_\mu} = \int_{-\infty\,(\mu=4)}^{+\infty} \varphi^*(P_\mu)P_\mu\varphi(P_\mu)\mathrm{d}^{(\mu)}p \qquad (24.5.2)$$

由式(24.5.9),取

$$\varphi(P_\mu) = \int_{-\infty\,(\mu=4)}^{+\infty} \psi(X_\mu)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}P_\mu X_\mu^*}\mathrm{d}^{(\mu)}x \qquad (24.5.3)$$

代入式(24.5.2),则

$$\overline{P_\mu} = \int_{-\infty\,(3\mu)}^{+\infty} \mathrm{d}^{(\mu)}p\mathrm{d}^{(\mu)}x'\psi^*(X'^*_\mu)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}P_\mu^* X'_\mu}P_\mu\psi(X_\mu)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}P_\mu X_\mu^*}\mathrm{d}^{(\mu)}x \qquad (24.5.4)$$

因 $P_\mu^* X_\mu = P_\mu X_\mu^*$,所以

$$\overline{P_\mu} = \int_{-\infty\,(2\mu)}^{+\infty} \mathrm{d}^{(\mu)}p\mathrm{d}^{(\mu)}x'\psi^*(X'^*_\mu)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}P_\mu^* X'_\mu}\int_{-\infty\,(\mu)}^{+\infty}\mathrm{d}^{(\mu)}x\psi(X_\mu)(\mathrm{i}\hbar\Box_p^*)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}P_\mu X_\mu^*} \qquad (24.5.5)$$

其中,$\Box_p^*$ 为四维梯度算符。在四维椭圆复空间,由位矢 $X = ct + \mathrm{i}\vec{r}$,引入四维

Hamilton 算符

$$\Box_p = \frac{\partial}{\partial ct} + \mathrm{i}\left(\vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial ct} + \mathrm{i}\,\nabla = \frac{\partial}{\partial X_\mu} \quad (24.5.6)$$

式(24.5.6)的复共轭为

$$\Box_p^* = \frac{\partial}{\partial ct} - \mathrm{i}\left(\vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial ct} - \mathrm{i}\,\nabla = \frac{\partial}{\partial X_\mu^*} \quad (24.5.7)$$

对式(24.5.5)后一部分进行分部积分，

$$\bar{P}_\mu = \int_{\substack{-\infty \\ (2\mu)}}^{+\infty} \mathrm{d}^{(\mu)} p \mathrm{d}^{(\mu)} x' \psi^*(X'^*_\mu) \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} P_\mu X_\mu^*} \int_{\substack{-\infty \\ (\mu)}}^{+\infty} \mathrm{d}^{(\mu)} x \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} P_\mu X_\mu^*} (\mathrm{i}\hbar \Box_p^*) \psi(X_\mu) \quad (24.5.8)$$

利用

$$f^*(X_\mu^*) = \int_{\substack{-\infty \\ (2\mu)}}^{+\infty} \mathrm{d}^{(\mu)} p \mathrm{d}^{(\mu)} x' f^*(X'^*_\mu) \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} P_\mu (X'^*_\mu - X_\mu^*)} \quad (24.5.9)$$

将式(24.5.9)代入式(24.5.8)，得

$$\overline{P_\mu} = \int_{\substack{-\infty \\ (\mu)}}^{+\infty} \mathrm{d}^{(\mu)} x \psi^*(X_\mu^*) \hat{P}_\mu \psi(X_\mu) \quad (24.5.10)$$

其中

$$\hat{P}_\mu = \frac{\hat{E}}{c} + \mathrm{i}\hat{\vec{p}} = \mathrm{i}\hbar \Box_P^* = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial X_\mu^*} = \mathrm{i}\hbar \left(\frac{\partial}{\partial ct} - \mathrm{i}\,\nabla\right) \quad (24.5.11)$$

式(24.5.11)的复共轭

$$\hat{P}_\mu^* = -\mathrm{i}\hbar \Box_P = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial X_\mu} = -\mathrm{i}\hbar \left(\frac{\partial}{\partial ct} + \mathrm{i}\,\nabla\right) \quad (24.5.12)$$

式(24.5.11)为四维椭圆动量算符，可分写作

$$\hat{\vec{p}} = -\mathrm{i}\hbar\,\nabla, \quad \hat{E} = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (24.5.13)$$

式(24.5.13)为一维能量和三维动量算符。对式(24.5.11)和(24.5.12)取内积，有关系式

$$\Box_p^* \Box_p = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \quad (24.5.14)$$

由对称性，取坐标函数的平均值

$$\overline{X_\mu} = \int_{\substack{-\infty \\ (\mu=4)}}^{+\infty} \psi^*(X_\mu) X_\mu \psi(X_\mu) \mathrm{d}^{(\mu)} x \quad (24.5.15)$$

经运算可以得到式(24.5.10)类同的形式：

$$\overline{X_\mu} = \int_{\substack{-\infty \\ (\mu)}}^{+\infty} \varphi^*(P_\mu^*) \hat{X}_\mu \varphi(P_\mu) \mathrm{d}^{(\mu)} p \quad (24.5.16)$$

其中

$$\hat{X}_\mu = \hat{ct} + \mathrm{i}\hat{\vec{r}} = \mathrm{i}\hbar\Box_r^* = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial P_\mu^*} = \mathrm{i}\hbar\left(c\frac{\partial}{\partial E} - \mathrm{i}\nabla_p\right) \qquad (24.5.17)$$

式(24.5.17)为四维双曲坐标算符，可分写作

$$\hat{t} = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial E}, \quad \hat{\vec{r}} = -\mathrm{i}\hbar\nabla_p = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial \vec{p}} \qquad (24.5.18)$$

式(24.5.18)为一维时间和三维坐标算符，对式(24.5.17)取内积，有关系式

$$\Box_r^*\Box_r = \left(c\frac{\partial}{\partial E}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial p_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial p_y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial p_z}\right)^2 \qquad (24.5.19)$$

第二十五章　四维数学物理方程

Minkowski 空间具有方向异性的特点，本章尝试在四维时空中建立球谐坐标和相应的数学物理方程，但没有对四维特殊函数进行求解。四维 Laplace 方程在四维坐标中可看做由三维球谐坐标和一维时间坐标所构成，也可以将四维时空抽象为一个四维球谐空间。在分离变量时，求解三维球谐函数和四维球谐函数的分立解，应该与 Minkowski 空间或广域 Hilbert 相空间的分立结构相对应，与粒子四维本征方程的分立解有关。将四维双曲型复时空与四维椭圆型复空间进行对比，可以分析两类复空间的共性和个性的差异。

25.1　Minkowski 空间的 Laplace 方程

由双曲广域 Cauchy-Riemann 方程写成式(23.3.13)四维 Laplace 方程形式

$$\frac{\partial^2 u}{c^2\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0$$

令 $u(x,y,z,t)=T(t)v(x,y,z)$，代入式(23.3.13)并分离变量，取

$$\frac{T''}{c^2T}=\frac{1}{v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)=-k^2 \tag{25.1.1}$$

其中，k^2 为待定系数。式(25.1.1)可分写成

$$\begin{cases}T''+c^2k^2T=0\\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}+k^2v=0\end{cases} \tag{25.1.2}$$

式(25.1.2)第一式有解

$$T(t)=a_1\cos kct+a_2\sin kct \tag{25.1.3}$$

式(25.1.2)第二式在球坐标系 (r,θ,ϕ) 中可写成

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\phi^2}+k^2v=0 \tag{25.1.4}$$

令 $v(r,\theta,\phi)=R(r)Y(\theta,\phi)$，代入式(25.1.4)，进行分离变量

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+k^2r^2=-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}=l(l+1) \tag{25.1.5}$$

式(25.1.5)可分写成两个关系式

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + [k^2r^2 - l(l+1)]R = 0 \tag{25.1.6}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + l(l+1)Y = 0 \tag{25.1.7}$$

式(25.1.6)为 l 阶 Bessel 方程，而式(25.1.7)为 l 阶球函数方程。

令 $x = kr$，$R(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}y(x)$，则式(25.1.6)化为 $l + \frac{1}{2}$ 阶 Bessel 方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left[x^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)\right]y = 0 \tag{25.1.8}$$

对式(25.1.7)进一步分离变量，取 $Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$，代入式(25.1.7)乘以 $\frac{\sin^2\theta}{\Theta\Phi}$，并移项分离变量，有

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + l(l+1)\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = \lambda \tag{25.1.9}$$

式(25.1.9)可写成两个方程

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \lambda\Phi = 0 \tag{25.1.10}$$

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + [l(l+1)\sin^2\theta - \lambda]\Theta = 0 \tag{25.1.11}$$

对式(25.1.10)取 $\lambda = m^2$，$(m = 0,1,2,\cdots)$，为本征值，对应本征函数为

$$\Phi(\phi) = b_1\cos m\phi + b_2\sin m\phi \tag{25.1.12}$$

式(25.1.12)与(25.1.3)具有相同的形式。式(25.1.11)中，令 $\Theta(\theta) = y, \cos\theta = x$，则 $\frac{d}{d\theta} = -\sin\theta\frac{d}{dx}$，代入式(25.1.11)有

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - x^2}\right]y = 0 \tag{25.1.13}$$

式(25.1.13)为 l 阶连带 Legendre 方程。

25.2 四维 Laplace 方程的解

广域 Cauchy-Riemann 方程对应的四维 Laplace 方程通过分离变量可分写为式(25.1.2)。而式(25.1.2)第二式通过变量变换可分解为式(25.1.8)、(25.1.10)以及式(25.1.11)，求解这四个方程的解，综合起来就是求四维 Laplace 方程的解。对式(25.1.13)的 Legendre 方程，一般数理方法书中都有求解。为了与四维方程有个对比，在此简单列出方程的解。当 $m = 0$ 时，式(25.1.13)化为 Legendre 方程

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right] + l(l+1)y = 0 \tag{25.2.1}$$

在 $x=0$ 邻域，把式(25.2.1)的解表成 Taylor 级数

$$y=\sum_k C_k x^k \tag{25.2.2}$$

比较同幂次项系数，有 C_k 的递推关系

$$C_{k+2}=\frac{k(k+1)-l(l+1)}{(k+1)(k+2)}C_k \tag{25.2.3}$$

这样 $C_k(k=2,4,\cdots)$ 可用 C_0 表示，$C_k(k=1,3,\cdots)$ 可用 C_1 表示。方程(25.2.1)的通解为

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x) \tag{25.2.4}$$

其中，$y_1(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{2k}x^{2k}$，$y_2(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{2k+1}x^{2k+1}$。方程(25.2.1)在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 中有本征解，并对应于一个 l 有唯一的一个多项式。取 Legendre 多项式

$$C_l=\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} \tag{25.2.5}$$

在式(25.2.3)中令 $k=l-2,l-4,\cdots$。用归纳法，得

$$C_{l-2r}=(-1)^r\frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!},\quad r=0,1,2,\cdots,\left[\frac{l}{2}\right] \tag{25.2.6}$$

有多项式(25.2.4)的解为

$$P_l(x)=\sum_{r=0}^{\frac{l}{2}}(-)^r\frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!}x^{l-2r} \tag{25.2.7}$$

式(25.2.7)满足关系式

$$P_l(-x)=(-1)^l P_l(x) \tag{25.2.8}$$

对式(25.1.13)连带 Legendre 方程，$x=\pm1,\infty$ 为正则奇点，当 $x=\pm1$，其指标解为 $\pm\frac{m}{2}$，作变换

$$y(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}v(x) \tag{25.2.9}$$

代入式(25.1.13)，有关系

$$(1-x^2)v''-2(m+1)xv'+[\mu-m(m+1)]v=0 \tag{25.2.10}$$

对方程(25.2.10)求导，只是 m 变为 $m=1$，v 变为 v'，所以式(25.2.10)的解可由 Legendre 方程求导 m 次而得到

$$v(x)=\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)\quad(0\leqslant m\leqslant l) \tag{25.2.11}$$

注意到式(25.2.9)，则式(25.1.13)的一个解为

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)\quad(0\leqslant m\leqslant l) \tag{25.2.12}$$

式(25.2.12)称为 m 阶 l 次连带 Legendre 函数，在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 中是有界的。

将式(25.1.12)和(25.2.12)代入 $Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$，有球谐函数的解

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)=P_l^m(\cos\theta)(b_1\cos m\phi+b_2\sin m\phi)$$
$$m=0,1,\cdots,l;l=0,1,2,3,\cdots \tag{25.2.13}$$

或复数形式

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)=P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}\quad m=0,1,\cdots,l;l=0,1,2,3,\cdots \tag{25.2.14}$$

对于 Bessel 方程(25.1.8)在此给出结论性的解，令 $y=\dfrac{w}{\sqrt{x}}$，则式(25.1.8)可改写成

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dw}{dx}+\left[1-\left(\frac{l+1/2}{x}\right)^2\right]w=0 \tag{25.2.15}$$

式(25.2.15)为 $l+\frac{1}{2}$ 阶 Bessel 方程。式(25.2.15)的解可表示成

$$i_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+1/2}(x) \tag{25.2.16}$$

取 $n=l+\frac{1}{2}$，有

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \tag{25.2.17}$$

式(25.2.17)有性质

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x) \tag{25.2.18}$$

当 $n=0,1,2,3,\cdots$，为整数时，有

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \tag{25.2.19}$$

综合式(25.1.3)、(25.1.12)、(25.2.12)以及式(25.2.16)，四维 Laplace 方程(23.3.13)变换成球谐函数后的解可写成

$$\begin{aligned}u(r,\theta,\phi,t)&=T(t)v(r,\theta,\phi)=T(t)R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)\\&=(a_1\cos kct+a_2\sin kct)(b_1\cos m\phi+b_2\sin m\phi)P_l^m(\cos\theta)i_l(r)\end{aligned} \tag{25.2.20}$$

式(25.2.20)也可写成复数形式

$$u(r,\theta,\phi,t)=P_l^m(\cos\theta)i_l(r)e^{i(kct+m\phi)} \tag{25.2.21}$$

式(25.2.20)或(25.2.21)为 Minkowski 空间中由广域 Cauchy-Riemann 方程对应的四维 Laplace 方程的解。

式(25.2.20)或(25.2.21)满足正交的归一化完备函数

$$\int u'^*(r',\theta',\phi',t')\cdot u(r,\theta,\phi,t)dV_\mu=\delta_{k'k}\delta_{n'n}\delta_{l'l}\delta_{m'm} \tag{25.2.22}$$

或

$$<u(r',\theta',\phi',t'),u(r,\theta,\phi,t)>\mathrm{d}V_{\mu}=\delta_{k'k}\delta_{n'n}\delta_{l'l}\delta_{m'm} \qquad (25.2.23)$$

式(25.2.22)或(25.2.23)既可讨论具有相对论效应的高速运动粒子，也可应用于低速运动的微观粒子。

25.3　四维双曲型 Legendre 方程和 Bessel 方程

利用四维双曲复空间的直角坐标系 $X(ct,\mathrm{j}x,\mathrm{j}y,\mathrm{j}z)$ 讨论四维算符的运算，可以将双曲复空间的直角坐标变换到四维球谐坐标 $X(R,\theta,\phi,\psi)$，令

$$\begin{cases} x=R\sin\theta\sin\varphi\,\mathrm{sh}\psi \\ y=R\sin\theta\cos\varphi\,\mathrm{sh}\psi \\ z=R\cos\theta\,\mathrm{sh}\psi \\ ct=R\,\mathrm{ch}\psi \end{cases} \qquad (25.3.1)$$

在式(25.3.1)中，$R=(c^2t^2-x^2-y^2-z^2)^{\frac{1}{2}}$ 为四维时空间隔，$\psi=\mathrm{arcth}\,\frac{r}{ct}$，对应类时区中相对应 ct 轴的辐角。式(25.3.1)分别满足三角函数和双曲函数关系式

$$\begin{cases} \sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \\ \sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1 \\ \mathrm{ch}^2\psi-\mathrm{sh}^2\psi=1 \end{cases} \qquad (25.3.2)$$

从式(25.3.1)和(25.3.2)看出，四维球谐坐标 $X(R,\theta,\varphi,\psi)$ 中的三维坐标分量类同于三维球坐标，而时间分量与空间分量构成双曲旋转体，$X(R,\theta,\varphi,\psi)$ 命名为四维球谐坐标。式(25.3.1)的逆变换可写作

$$\begin{cases} R=(c^2t^2-x^2-y^2-z^2)^{\frac{1}{2}} \\ \psi=\mathrm{th}^{-1}\left[\frac{1}{ct}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \theta=\tan^{-1}\left[\frac{1}{z}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \varphi=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \qquad (25.3.3)$$

在四维双曲复域 $H(C,\boxminus)$，对位矢 $X=ct+\mathrm{j}\vec{r}$ 取微分，得

$$\mathrm{d}X=c\mathrm{d}t+\mathrm{j}\mathrm{d}\vec{r} \qquad (25.3.4)$$

对式(25.3.4)取内积

$$\mathrm{d}^2s=\mathrm{d}X^*\mathrm{d}X=c^2\mathrm{d}^2t-\mathrm{d}^2x-\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}^2z$$

或

$$\mathrm{d}s=(c^2\mathrm{d}^2t-\mathrm{d}^2x-\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}^2z)^{\frac{1}{2}} \qquad (25.3.5)$$

在直角坐标系 $X(ct,\mathrm{j}x,\mathrm{j}y,\mathrm{j}z)$ 中，取四维体积元

$$dV = cdtdxdydz = \prod_{i=1}^{4} ds_i \tag{25.3.6}$$

令

$$ds_i = H_i dq_i \quad (i = 1,\cdots,4) \tag{25.3.7}$$

其中

$$H_i = \left[\left(\frac{\partial ct}{\partial q_i}\right)^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 - \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{25.3.8}$$

同理，在四维球谐坐标 $X(R,\theta,\varphi,\psi)$ 中，取四维体积元

$$dV = ds_R ds_\theta ds_\varphi ds_\psi \tag{25.3.9}$$

注意到式(19.6.10)，将式(25.3.1)代入式(25.3.8)，有

$$\begin{cases} H_R = 1 \\ H_\theta = R\mathrm{sh}\psi \\ H_\varphi = R\sin\theta\mathrm{sh}\psi \\ H_\psi = R \end{cases} \tag{25.3.10}$$

把式(25.3.10)代入式(25.3.7)和(25.3.9)，可得到 $X(R,\theta,\varphi,\psi)$ 中的四维体积元

$$dV = R^3\sin\theta\,\mathrm{sh}^2\psi dRd\theta d\varphi d\psi \tag{25.3.11}$$

在四维双曲球谐坐标中取变量 $u = u(R,\theta,\phi,\psi)$，有微分方程

$$\Box^2 u + \lambda u = 0 \tag{25.3.12}$$

由式(25.3.8)和(25.3.12)，可得到

$$\Box^2 u = \frac{1}{H_R H_\theta H_\varphi H_\psi}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{H_R H_\theta H_\varphi H_\psi}{H_i^2}\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\right) \tag{25.3.13}$$

将式(25.3.10)代入式(25.3.13)，得

$$\Box^2 u = \frac{1}{R^3}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R^3\frac{\partial u}{\partial R}\right)\right] + \frac{1}{R^2\sin\theta\,\mathrm{sh}^2\psi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)$$
$$+ \frac{1}{R^2\sin^2\theta\,\mathrm{sh}^2\psi}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{R^2\mathrm{sh}^2\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\mathrm{sh}^2\psi\frac{\partial u}{\partial\psi}\right) \tag{25.3.14}$$

利用分离变量关系，有

$$u(R,\theta,\varphi,\psi) = \Omega(R)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\Psi(\psi) \tag{25.3.15}$$

将式(25.3.14)和(25.3.15)代入式(25.3.12)，得到

$$\frac{\sin^2\theta\,\mathrm{sh}^2\psi}{\Omega R}\frac{d}{dR}\left(R^3\frac{d\Omega}{dR}\right) + \frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$$
$$+ \frac{\sin^2\theta}{\Psi}\frac{d}{d\psi}\left(\mathrm{sh}^2\psi\frac{d\Psi}{d\psi}\right) + \lambda R^2\sin^2\theta\mathrm{sh}^2\psi = 0 \tag{25.3.16}$$

在式(25.3.16)中，取

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d\Phi}{d\varphi} = -m^2 \tag{25.3.17}$$

将式(25.3.17)代入式(25.3.16)中，有

$$\frac{\mathrm{sh}^2\psi}{\Omega R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R^3\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}R}\right)+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}$$
$$+\frac{1}{\Psi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi}\left(\mathrm{sh}^2\psi\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\psi}\right)+\lambda R^2\mathrm{sh}^2\psi=0 \qquad (25.3.18)$$

在式(25.3.18)中取

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=-\mu \qquad (25.3.19)$$

式(25.3.19)代入式(25.3.18)，得

$$\frac{1}{\Omega R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R^3\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}R}\right)-\frac{\mu}{\mathrm{sh}^2\psi}+\lambda R^2+\frac{1}{\Psi\mathrm{sh}^2\psi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi}\left(\mathrm{sh}^2\psi\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\psi}\right)=0 \quad (25.3.20)$$

取

$$\frac{1}{\Psi\,\mathrm{sh}^2\psi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi}\left(\mathrm{sh}^2\psi\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\psi}\right)-\frac{\mu}{\mathrm{sh}^2\psi}=-h \qquad (25.3.21)$$

式(25.3.21)代入式(25.3.20)，有

$$\frac{1}{\Omega R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R^3\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}R}\right)-h+\lambda R^2=0 \qquad (25.3.22)$$

整理式(25.3.17)、(25.3.19)、(25.3.21)和(25.3.22)，得到如下四个方程，其中m,μ,h 和λ 是待定常数：

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+m^2\Phi=0 \qquad (25.3.23)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\mu-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0 \qquad (25.9.24)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\psi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi}\left(\mathrm{sh}^2\psi\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\psi}\right)+\left(h-\frac{\mu}{\mathrm{sh}^2\psi}\right)\Psi=0 \qquad (25.3.25)$$

$$\frac{1}{R^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}R}\right)+\left(\lambda+\frac{h}{R^2}\right)\Omega=0 \qquad (25.3.26)$$

由式(25.3.23)，将$\Phi=\Phi(\varphi)$ 变换为$y=y(x)$，可写作

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+m^2y=0 \qquad (25.3.27)$$

式(25.3.27)为二阶常微分方程。

由式(25.3.24)，令$\Theta=y,x=\cos\theta,\mathrm{d}x=-\sin\theta\mathrm{d}\theta$，式(25.3.24)可写作

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(\mu-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0 \qquad (25.3.28)$$

式(25.3.28)为连带 Legendre 方程。

在式(25.3.25)中，令$x=\mathrm{ch}\psi,\mathrm{d}x=\mathrm{sh}\psi\mathrm{d}\psi$，和$\Psi=y$，注意到式(25.3.2)，有关系$\mathrm{sh}^2\psi=x^2-1$，代入式(25.3.25)，得

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}-\left(h+\frac{\mu}{x^2-1}\right)y=0 \tag{25.3.29}$$

在式(25.3.26)中,取 $\lambda=k^2, kR=x, \Omega=\frac{y}{x}$,得

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \tag{25.3.30}$$

其中,$n^2=h+1$,式(25.3.30)为 Bessel 方程。

25.4 四维双曲 Legendre 方程的解

参照三维空间的 Legendre 方程的求解,在四维双曲复空间,式(25.3.28)与三维连带 Legendre 方程具有相同的形式。对式(25.3.29)的求解,在 $x=0$ 邻域,把式(25.3.29)的解表成 Taylor 级数形式 $y=\sum_k C_k x^k$,当 $\mu=0$ 时,有方程

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+hy=0 \tag{25.4.1}$$

将式(25.2.3)代入式(25.4.1)中,有

$$(x^2-1)\sum_{k=0}^{\infty}C_k k(k-1)x^{k-2}+3x\sum_{k=0}^{\infty}C_k kx^{k-1}+h\sum_{k=0}^{\infty}C_k x^k=0 \tag{25.4.2}$$

并项之后,有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{-(k+2)(k+1)C_{k+2}+[k(k+2)+h]C_k\}x^k=0 \tag{25.4.3}$$

导出递推关系

$$C_{k+2}=\frac{k(k+2)+h}{(k+2)(k+1)}C_k \tag{25.4.4}$$

由式(25.4.4),同样 $C_k(k=2,4,\cdots)$ 可用 C_0 表示,$C_k(k=1,3,\cdots)$ 可用 C_1 表示,则式(25.4.1)的解可写作

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_{2k}x^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}C_{2k+1}x^{2k+1} \tag{25.4.5}$$

取 $h=(1+s)(1-s)$,式(25.4.4)可写作

$$C_{k+2}=\frac{k(k+2)+(1+s)(1-s)}{(k+2)(k+1)}C_k \tag{25.4.6}$$

当 $k=s-1$ 时,有

$$C_{s+1}=\frac{k(k+2)+(1+s)(1-s)}{(k+2)(k+1)}C_{s-1} \tag{25.4.7}$$

并有 $C_{s+1}=0, C_{s+3}=0,\cdots$。方程在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 中有本征解,并对应一个 s 有唯一的一个多项式。在 $h>0$ 范围内,可取 $s=\pm\frac{1}{2}$,有 $h=\frac{3}{4}$。

25.5　椭圆型 Legendre 方程和 Bessel 方程

在四维椭圆复空间对四元数取微分，得

$$dY = c\mathrm{d}t + \mathrm{i}\mathrm{d}\vec{r} \tag{25.5.1}$$

式(25.5.1)取内积，四维距离

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}L = \mathrm{d}Y^* \mathrm{d}Y = (c^2\mathrm{d}^2t + \mathrm{d}^2x + \mathrm{d}^2y + \mathrm{d}^2z)^{\frac{1}{2}} \tag{25.5.2}$$

四维椭圆复空间的体积元分别对应式(19.6.8)和(19.6.11)，在四维球谐坐标 $u = u(L,\theta,\varphi,\psi)$ 中取微分方程

$$\Box^2 u = \frac{1}{R^3}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R^3\frac{\partial u}{\partial R}\right)\right] + \frac{1}{R^2\sin\theta\sin^2\psi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)$$
$$+\frac{1}{R^2\sin^2\theta\sin^2\psi}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{R^2\sin^2\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\sin^2\psi\frac{\partial u}{\partial\psi}\right) \tag{25.5.3}$$

式(25.5.3)中，

$$\Box^2 = \frac{\partial^2}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2}{\partial c^2t^2} + \nabla^2 \tag{25.5.4}$$

同样取式(25.3.15)分离变量的形式 $u(L,\theta,\varphi,\psi) = \Omega(L)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\Psi(\psi)$，代入式(25.5.3)，有

$$\frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{\Omega L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}L}\left(L^3\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}L}\right) + \frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}$$
$$+\frac{\sin^2\theta}{\Psi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi}\left(\sin^2\psi\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\psi}\right) + \lambda L^2\sin^2\theta\sin^2\psi = 0 \tag{25.5.5}$$

取待定常数 m,μ,λ,h，由式(25.5.5)，可分离出椭圆型微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + m^2\Phi = 0 \tag{25.5.6}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(\mu - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0 \tag{25.5.7}$$

$$\frac{1}{\sin^2\psi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi}\left(\sin^2\psi\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\psi}\right) + \left(h - \frac{\mu}{\sin^2\Psi}\right)\Psi = 0 \tag{25.5.8}$$

$$\frac{1}{L^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}L}\left(L^3\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}L}\right) + \left(\lambda - \frac{h}{L^2}\right)\Omega = 0 \tag{25.5.9}$$

式(25.5.6)和(25.5.7)经变量替换，有与式(25.3.23)和(25.3.24)相同的关系式。对式(25.5.8)令 $x = \cos\psi, \mathrm{d}x = \sin\psi\mathrm{d}\psi$，和 $\Psi = y$，有关系 $\sin^2\psi = 1 - x^2$，代入式(25.5.8)，得

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 3x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(h - \frac{\mu}{1-x^2}\right)y = 0 \tag{25.5.10}$$

在式(25.5.9)中,取 $\lambda = k^2, kR = x, \Omega = \frac{y}{x}$,得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{25.5.11}$$

其中,$n^2 = h + 1$,式(25.5.11)为椭圆型 Bessel 方程。

参考文献

1 William Clifford. On the space-theory of matter. Proceeding of the Cambridge Philosophical Society,1876,2:157-158

2 Baylis W E. Clifford (geometric) algebra with applications to physics. mathematics. and engineering. Birkhäuser,1996

3 Baylis W E. Classical Eigenspinors and the Dirac equation. phys. Rev,1992,45A:4293-4302

4 Keller J. Spinors as a basis of a geometric super-algebra. Advances in Applied Clifford Algebras,1991,1(1):31-50

5 Keller J and Oziewicz Z. The theory of the electron. Advances in Applied Clifford Algebras,1997,7(S):498

6 Kopczyński W, R Maszczyk. Spinorial idempotents in the Clifford algebras three-dimensional vector spaces. Advances in Applied Clifford Algebras1,1991(1):85-93

7 Lounesto P. Clifford algebras and spinors. Cambridge University Press,1977

8 THooft G. Renormalization of massless Yang-Mills fields. Nucl. Phys,1971,B33:173-199

9 熊锡金.泛复变函数. 武汉大学学报,1980(1),1981(4)

10 И·М· 雅格龙. 九种平面几何.陈光还,译.上海科学出版社,1985

11 熊锡金.泛复变函数极其在数学与物理中的应用.东北师范大学出版社,1988

12 A· P· 扬波尔斯基. 双曲函数.邢富冲,译.中央民族学院出版社,1987

13 张筑生.微分拓扑新讲.北京大学出版社,2002

14 侯伯元,侯伯宇.物理学家用微分几何.科学出版社,1990

15 余扬政,冯承天.物理学中的几何方法.高等教育出版社,施普林格出版社,1998

16 刘希明.高等量子力学.山东科学技术出版社,2002

17 周仲良,郭镜明 译. 美国数学的现在和未来.复旦大学出版社,1986

18 曾谨言.量子力学.科学出版社,1990

19 吴大猷.量子力学.科学出版社,1984

20 郭敦仁.数学物理方法.人民教育出版社,1978

21 龚怀云等. 应用泛函分析.西安交通大学出版社,1985

22 刘树勇等. 不可思议的反物质.河北科学技术出版社,2002

23 戈登·弗雷泽. 反物质:世界的终极镜像.江向东,黄艳华,译.上海科技教育出版社,2002

24 关洪.一代神话:哥本哈根学派.武汉出版社,2002

25 M.雅默.量子力学的哲学.秦克诚,译.商务出版社,1989

26 戴元本.相互作用的规范理论.科学出版社,2005

27 曹昌祺.量子非阿贝尔规范场论.科学出版社,2008

28 倪光桐,陈苏卿.高等量子力学.复旦大学出版社,2002

29 Yu X G. Hyperbolic lagrangian functions. Applied Mathematics and Mechanics,1998,19(12):1189-1195

30 Yu X G. Hyperbolic multi-topology and the basic principle in quantum mechanics. Advances in Applied Clifford Algebras,1999,9(1): 109-118

31 Yu X G. Hyperbolic Hilbert space. Advances in Applied Clifford Algebras,2000,10(1):49-60

32 Yu X G and Li W M. The four dimensional hyperbolic spherical harmonics. Advances in Applied Clifford Algebras,2000,10(2):163-171

33 Yu X G and Zhang S N. Clifford spinor algebra and the Dirac wave equations. Advances in Applied Clifford Algebras, 2001, 11(1): 27-38

34 Yu X Q, Huang Q N and Yu X G. Clifford algebra and the four-dimensional Lorentz transformation. Advances in Applied Clifford Algebras, 2002, 12(1): 13-19

35 Yu X G and Yu X Q. The geometrical Interpretation of uncertainty ralation. Advances in Applied Clifford Algebras, 2003, 13(1): 65-70

36 Zhao Z and Yu X G. Hyperbolic Schrodinger equation. Advances in Applied Clifford Algebras, 2004, 14(2): 207-213

37 Zhu W and Yu X G. Some physics questions in hyperbolic complex space. Advances in Applied Clifford Algebras, 2007, 17(2)

38 Yu X G and Gao J L. Analysis of hyperbolic tensor investigation of the space-time in general theory of relativity, Proceedings of the 2 International Conference on Nonlinear Mechanics. Peking University Press, 1993, 883

39 Ma Y Y, Yu X G. Hyperbolic half measurement space. Applied Functional Analysis. SCI-TECH Information services. 1997, 147

40 于学刚,于学钎. 双曲复函与相对论. 数学物理学报,1995,15(4):435-441

41 于学刚. 双曲型 Lagrangian 函数. 应用数学和力学,1998,19(12):1095-1100

42 于学刚. 双曲复空间的拓扑结构与应用. 应用泛函分析学报,2000,2(3):271-275

43 于学刚. 一类双曲型 Dirac 方程. 吉林大学自然科学学报,1999(2):55-62

44 宁丹,刘成友,于学刚,刘铁城. 一类双曲型 Dirac 算符及幺正变换. 吉林大学学报,2009(5):5[illegible]5-578

45 于学刚. 四维双曲复空间的不变量. 云南大学学报,2000(1):29-31

46 于学刚,于学钎. 双曲张量分析. 东北师大学报,1995(12)

47 于学刚,李武明. 双曲复空间的若干性质. 现代数学和力学,上海大学出版社,1997:539

48 于学刚,崔景茂. 双曲量子力学. 松辽学刊,1995(4):1-6

49 于学刚,郑明才. 相对论与量子力学的逻辑关联. 松辽学刊,1997(4):10-13

50 于学刚. 论量子力学和相对论的若干关联问题. 松辽学刊,1998(1):18-21

51 于学刚. Clifford 泛函分析概要. 通化师院学报,1997(4):12-19

52 于学刚. Clifford 几何与量子力学的基本原理. 通化师院学报,1998(1):1-9

53 李武明,于学刚. 二维双曲 Euler 公式的推广. 通化师院学报,1998(2):15[illegible]

54 于学刚. 四维 Lorentz 变换的一般形式. 通化师院学报,1999(2)

55 于学刚. 双曲球坐标与四元数算子. 通化师院学报,2000(2):6-9

56 姜云侠,于学刚. 一类四元数的矩阵表示. 通化师院学报,2002(10):46-48

57 赵征,于学刚. 一类双曲 Minkowski 空间中的物理问题. 天津商学院学报,2004,24(6):10-13

58 于学刚. 克里福德的空间哲学与闵可夫斯基几何的时间单向性. 天津商学院学报,2005,25(6):6-8

59 于学刚. “薛定谔猫”新议. 天津商学院学报,2006,26(5):59-62

60 于学刚. 对反物质的再认识. 天津商业大学学报,2008,28(6):64-67

61 于学刚. 四维复空间的超复数和单位球. 长春大学学报,2006,16(6):6-8